Міністерство освіти і науки України
Львівський національний аграрний університет

З. Р. Рижок, Л. Л. Поляковська
Р. М. Ступень, П. П. Колодій

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Навчальний посібник

ЛЬВІВ
«Галицька видавнича спілка»
2020

УДК 528.02:528.2(075)

Рецензенти:

І. П. Ковальчук, д-р географ. наук, професор кафедри геодезії та геоінформатики Національного університету біоресурсів і природокористування України;

О. М. Нахмуров, канд. техн. наук., професор кафедри геодезії та землеустрою Одеської державної академії будівництва та архітектури

Рекомендувала до друку Вчена рада
Львівського національного аграрного університету
(протокол № 3 від 2 грудня 2020 року)

Рижок З. Р.

Математична обробка геодезичних вимірів: навчальний посібник / З. Р. Рижок, Л. Л. Поляковська, Р. М. Ступень, П. П. Колодій — Львів : «Галицька видавнича спілка», 2020. — 179 с.

ISBN

У навчальному посібнику розглянуто теоретичні та методичні основи теорії похибок вимірів, математичного опрацювання геодезичних вимірів, їх застосування для обробки результатів виконаних геодезичних робіт й отримання найбільш надійних результатів для ймовірної оцінки їх точності. Наведено відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики, методу найменших квадратів, що дозволяє розв'язувати різноманітні задачі математичного опрацювання геодезичних вимірювань.

Навчальний посібник призначений для студентів землевпорядних факультетів закладів вищої освіти, які навчаються за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій», а також може бути корисний для широкого кола фахівців-землевпорядників, наукових працівників, викладачів, аспірантів, молодих учених та спеціалістів сучасного геодезичного виробництва.

ISBN 978-617-7809-66-0

ЗМІСТ

ВСТУП

При проведенні геодезичних та кадастрових робіт виконується безмежно велика кількість вимірів. У геодезії виконують складні вимірювання з визначення форми та розмірів Землі, складання карт і планів, розв'язання великого спектру інженерних задач. У землевпорядних та кадастрових роботах виконують виміри з організації територій, складання кадастрових планів, визначення параметрів нерухомості для розв'язування задач з управління територіями. Тому студенти, які вивчають спеціальність 193 «Геодезія та землеустрій», повинні мати ґрунтовні знання не лише з технології виконання вимірювань, а й володіти методами математичної обробки їх результатів.

Математична обробка геодезичних вимірів – це дисципліна, що вивчає математичні методи обробки результатів вимірів з метою отримання надійних кількісних і якісних характеристик. Дисципліна заснована на знаннях з математики, фізики, вищої математики, а її математичним фундаментом є теорія ймовірностей і математична статистика. При розробці методів математичної обробки вимірів широко використовують знання з теорії випадкових функцій, дисперсійного та кореляційного аналізу, метод найменших квадратів, теорії графів, теорії надійних інтервалів та інших математичних наук.

У навчальному посібнику «Математична обробка геодезичних вимірів» застосовано сучасні комп’ютерні технології, що дозволяють зручно використовувати наближені методи обчислень з метою отримання високоточних результатів математичного опрацювання геодезичних вимірювань, враховуючи сучасні умови геодезичного виробництва.

Наведений посібник складається з чотирьох розділів та додатків. У першому теоретичному розділі розкрито основні елементи теорії похибок, відображено класифікацію вимірювань та їх похибок, критерії для оцінки точності їх результатів, розподіл ймовірностей випадкових похибок, середні квадратичні похибки функцій виміряних величин, поняття ваги нерівноточних вимірювань, визначення ваги функції виміряних величин середньої квадратичної похибки одиниці ваги із ряду парних нерівноточних вимірювань, методику математичного опрацювання рядів рівноточних та нерівноточних вимірювань. Подано елементи теорії ймовірностей, а саме, основні її поняття і теореми, класифікацію випадкових подій, а також випадкових величин, їх закони розподілу та числові характеристики. Визначено елементи математичної статистики, її основні поняття, графічні методи зображення статистичного матеріалу, статистичної оцінки параметрів розподілу, вирівнювання статистичного ряду, основи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізів. Відображено основи параметричного та корелатного методів врівноваження геодезичних мереж, як у матричному вигляді, так і в розгорнутому, оцінку точності результатів їх врівноваження.

У другому практичному розділі відображено методику виконання лабораторних робіт поряд із прикладами їх детального розв’язку, у третьому – перелік питань, що виносяться на іспит, а четвертому – на тести.

Застосування сучасної обчислювальної техніки і програмного забезпечення дозволяють автоматизувати процес вирівнювання найскладніших геодезичних мереж, відкривають нові можливості для розвитку математичних методів обробки результатів геодезичних вимірів. За цих умов розкритий у навчальному посібнику теоретичний та практичний матеріал буде корисним не лише студентам, але й спеціалістам сучасного геодезичного виробництва.

РОЗДІЛ 1.
САМОСТІЙНА РОБОТА З ОПРАЦЮВАННЯ ЛЕКЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ПІДГОТОВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

1.1. Основи теорії похибок вимірів

Предмет та задачі теорії похибок вимірів. Будь-який вимір, як би ретельно він не був проведений та які б точні інструменти при цьому не застосовували, завжди обтяжений більшою або меншою похибкою, тобто одержані результати будуть мати більші чи менші відхилення від істинного значення вимірюваної величини, яка в більшості випадків залишається невідомою. Тому на практиці вимірювання проводять таким чином, щоб результати не були обтяжені надмірно великими похибками та могли б бути одержані з певною заданою точністю. Точність вимірів обумовлюється багатьма факторами: точністю інструмента, методом вимірів, кваліфікацією виконавця, зовнішніми умовами, а також другорядними чинниками, які при переході від одного вимірювання до другого змінюють та обумовлюють випадкові коливання результатів вимірів відносно деякого середнього значення вимірюваної величини. В природі немає жодного фізичного явища, у якому б не були присутні в тій чи іншій мірі елементи випадковості. Випадковість об'єктивно та завжди причино обумовлена. Однак, вона не є необхідністю із закономірного розвитку даного явища, а є лише доповненням і формою прояву необхідності. Так буває і при вимірах. Як би точно не були враховані основні умови в процесі виміру, завжди матиме місце вплив випадкових факторів, і ми не можемо досягти того, щоб при повторному вимірюванні були одержані точно такі ж самі результати. Усі чинники, які викликають появу похибок, впливають на результат виміру незалежно один від одного і при тому в різних напрямках щодо знаку. Отже, остаточне значення вимірюваної величини матиме похибку, яка представляє сумарний ефект впливу всіх джерел похибок, що мали місце в процесі вимірювання.

Поняття «задана точність» супроводжується певними числовими критеріями, які являють собою ймовірнісну характеристику можливих відхилень одержаних результатів опрацювання вимірів від їх істинних значень. Основна задача теорії похибок полягає у встановлені критеріїв оцінки та розроблення методів щодо їх одержання та оцінки одержаних результатів (вимірів). На базі такої головної задачі можна сформулювати основні питання, що розглядає теорія похибок, а саме вивчення законів виникнення та розподілу похибок вимірів та обчислень; відшукання найбільш точного, найбільш надійного за ймовірністю, значення вимірюваної величини із результатів багаторазових її вимірювань; обчислення наперед очікуваної точності та оцінка точності одержаних результатів вимірів; встановлення допусків, тобто критеріїв, що вказують на наявність недопустимих відхилень результатів вимірювань від істинного значення (грубих похибок).

Класифікація вимірів. Під виміром деякої фізичної величини розуміють порівняння її з якоюсь другою фізичною величиною того ж самого роду, що прийнята за одиницю порівняння.

Виміри поділяють:

а) за фізичним виконанням – на прямі (безпосередні) та непрямі (посередні). До прямих відносять такі, при яких безпосередньо можна порівняти дві фізичні величини – вимірювану та прийняту за одиницю порівняння. Якщо вимірюють одну або декілька фізичних величин, а шукану величину одержують за обчисленнями як функцію результатів вимірювань цих величин, аргументів, у такому випадку говорять про посередні виміри. Наприклад, визначення довжини лінії шляхом вимірювання короткого базису та паралактичного кута або визначення перевищення з тригонометричного нівелювання;

б) за кількістю – на необхідні та додаткові (надмірні). Необхідними вважаються такі виміри, що дозволяють одержати тільки один результат прямого чи непрямого виміру шуканої величини або по одному результату кожної з сумісно вишукуваних величин; надмірні виміри – це такі, що в сукупності з необхідними дозволяють одержати більше ніж один результат вимірюваної величини або кожної з сумісно вишукуваних величин. У геодезичних роботах надмірні виміри обов'язкові, тому що вони дозволяють виявити грубі похибки у вимірах та обчисленнях, а також підвищити точність результатів;

в) за точністю – на рівноточні та нерівноточні. Такий поділ вимірів базується на аналізуванні умов, у яких вони здійснюються: об'єкт, суб’єкт виміру, вимірювальний прилад, метод вимірювань, зовнішнє середовище. Якщо умови вимірювань однакові, тоді виміри рівноточні, якщо ні – нерівноточні;

г) за умовами вимірів – на залежні та незалежні. Якщо виконуються два виміри в зовсім різних умовах, коли вимірюються два фізично різних об’єкти, різними виконавцями, різними вимірювальними приладами та методами, що найбільш важливе, в різних зовнішніх умовах, можна вважати такі виміри незалежними, тому що немає підстав стверджувати, що вплив умов на виміри буде одноманітним. В протилежних випадках виміри будуть залежними.

Поняття похибки та поправки до результату вимірів. Джерела виникнення похибок. Під похибкою Δ результату виміру x деякої величини X розуміють різницю

$$\Delta = x - m_x . \tag{1.1.1}$$

Джерела похибок обумовлені різними причинами, зокрема обмеженою чутливістю органів чуття виконавця, недосконалістю вимірювальних приладів, несприятливими зовнішніми умовами тощо. Однією з задач математичного опрацювання результатів вимірів є знаходження засобів по ослабленню впливу похибок на результати вимірів. Будь-який з таких засобів в решті решт зводиться до введення в результати вимірів так званої поправки, тобто такої величини, яка при введенні в результат виміру, усунула б похибку (в ідеальному випадку), або звела її до мінімуму. Таким чином, поправку в ідеальному випадку визначають як

$$\upsilon = L - l. \tag{1.1.2}$$

Природно такого ідеального випадку на практиці досягти неможливо, тому ми можемо вести мову лише про такі значення поправок, які б тільки максимально приближувались би до похибок вимірів.

Класифікація похибок вимірів. Похибки вимірів за своїм походженням поділяються на інструментальні, особисті, зовнішнього середовища. За характером впливу на результати вимірів на систематичні, випадкові, грубі (промахи). Інструментальні похибки вимірів обумовлені:

1. недосконалістю виготовлення окремих частин інструмента – похибки нанесення штрихів похибки шкал вимірювальних приладів, похибки ходу мікрометричних гвинтів та багато інших, що за своїм впливом мають систематичний характер;

2. не цілком точним юстуванням інструмента та приведенням його в робочий стан (колімаційна похибка, обумовлена не горизонтальністю осі обертання труби теодоліта, похибки, викликані нерівністю підставок і т.д.). Ретельна перевірка інструмента може усунути такі похибки, а деякі з них зникають або зменшуються в результаті застосування певної методики спостережень;

3. інструментальні похибки можуть бути обумовлені також зміною властивостей інструмента з часом, що залишаються найменш вивченими.

Особисті (персональні) похибки обумовлені обмеженою чутливістю органів чуття, недостатньою досвідченістю та психофізіологічними особливостями і станом спостерігача. Ці похибки носять випадковий характер.

Похибки зовнішнього середовища обумовлюються зміною зовнішніх умов та несприятливим їх впливом на виміри. Сюди належать впливи температури, атмосферного тиску, вологості та непрозорості повітря, вітру, рельєфу місцевості, нестійкості ґрунту (пісок, луки, болото) та багато інших.

Для врахування або послаблення впливу таких похибок доводиться вводити поправки в результати вимірів, наприклад, за температуру та атмосферний тиск або вживати спеціальних заходів, щоб робити виміри в більш сприятливих умовах та більш досконалими методами. Повністю виключити такі похибки неможливо, бо вони є випадковими за своїм характером.

Систематичні похибки – це похибки λ, які входять у $\Delta = \lambda + \delta$ та є результатами вимірів згідно з певним законом залежно від тих факторів, які обумовлюють їх виникнення. Вони можуть бути постійними та змінними. Постійні похибки систематичного характеру від одного виміру до другого не змінюються ні за величиною, ні за знаком, оскільки виникають з причин незмінно діючих факторів, а саме не точним встановленням кутовимірювального інструменту або візирного знаку над центром пункту (похибки центрування), не точним визначенням довжини вимірювального приладу при лінійних вимірах, не точним нанесенням поділок на різних шкалах, не повним тестуванням інструменту тощо. Для встановлення постійної систематичної похибки треба проводити спеціальні дослідження.

Змінні систематичні похибки – це такі, що змінюють свою величину і знак за законом, аналітична форма якого щораз інша. Такі похибки в теорії похибок до теперішнього часу не вивчались, тому що неможливо встановити загальні правила виявлення та виключення їх із результатів вимірів.

Грубі похибки трапляються головним чином в результаті неуважності та недбайливості спостерігача або обчислювача. Це похибки, які не можна допустити при даних умовах вимірів. Для їх виявлення проводять повторні контрольні виміри та обчислення, а також використовують певні критерії, щоб бракувати грубі результати.

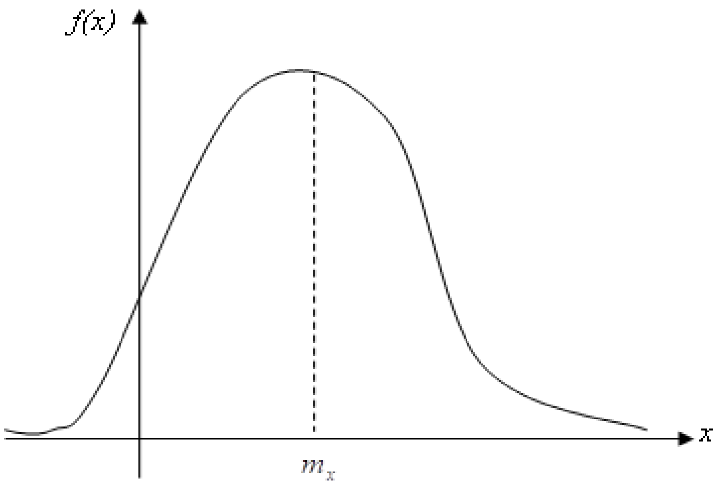
Випадкові похибки – це похибки, що в процесі вимірів змінюють свою величину та знак без будь-якої наявної закономірності. Випадкова похибка являє собою сумарний ефект впливу багатьох відомих та невідомих нам причин, кожна з яких незалежно від інших вносить до результату виміру свою невеличку елементарну похибку. Поняття «випадкової похибки» підкреслює лише той факт, що або ми не спостерігаємо безпосередньо того зв'язку, який існує між самим процесом вимірів та причинами, що обумовили виникнення випадкової похибки, або такий зв'язок настільки складний, що про нього нічого не можна сказати, а тільки констатувати самий факт появи випадкової похибки.

Розподіл похибок вимірів. В геодезичній практиці виміри та попередня їх підготовка проводяться таким чином (за такими методиками), щоб позбутися більшої частини впливу систематичних похибок, а також зменшити вплив випадкових факторів. Для цього використовують різні методи повторних вимірів. У результаті таких вимірів можуть залишатися ще деякі впливи (їх називають «залишковими»), але вони повинні бути значно меншими від випадкових похибок, чого можна досягнути при певній організації процесу вимірювань.

Оскільки в кінцевому результаті найбільших впливів набувають випадкові похибки, то згідно з центральною граничною теоремою А. М. Ляпунова можна стверджувати, що результати вимірів та їх похибки повинні мати нормальний закон розподілу (закон К. Ф. Гауса).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{1.1.3}$$

де m_x – математичне сподівання та σ_x – середнє квадратичне відхилення вважають параметрами розподілу. Графік функції має вигляд



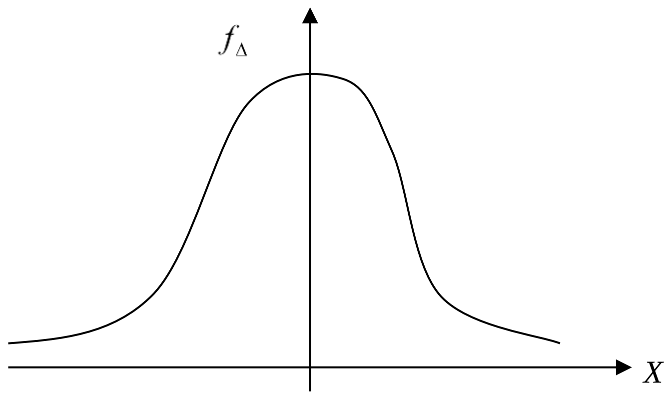
У працях Гауса та його послідовників за параметр розсіювання нормально розподіленої випадкової величини – похибки приймається так звана міра точності:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (1.1.4)$$

Згідно з виразом (1.1.1) величину $x - m_x$ можна розглядати як похибку випадкової величини X, позначимо її δ. Тоді $\delta = x - m_x$, а $f_\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2}$

$$\text{або } f_\delta = N(x, 0, h), \quad (1.1.5)$$

тобто M[δ] = 0, а математичне сподівання випадкових похибок вимірів дорівнює 0. Графік такої функції має вигляд:



З формули (1.1.4) видно, що чим більше h, тим точніше результати вимірів, тому що менше розсіювання σ. Через це величина:

$$m = \sqrt{\int_{-\infty}^{\pm\infty} \Delta^2 f_\Delta(x) d\Delta}. \quad (1.1.6)$$

За змістом формула (1.1.6) близька до σ і називається середньою квадратичною похибкою, тому міру точності можна ще записати у вигляді:

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}. \quad (1.1.7)$$

Властивості випадкових похибок. Як і всі явища в природі, випадкові похибки підлягають певним статистичним закономірностям, тобто таким, які доводяться на основі вивчення кількісних змін або розподілів певних характеристик у масових та однорідних випадкових явищах.

Випадкові похибки вимірів, характеризуються величиною похибки та її знаком. Вивчаючи розподіл випадкових похибок за їх величиною та знаком у досить великих рядах вимірів одних і тих самих величин, було виявлено такі статистичні закономірності, відомі як властивості випадкових похибок.

1. При даних умовах вимірів випадкові похибки щодо своєї абсолютної величини не можуть переходити певну границю $\Delta_{гран} \le \Delta$.

Ця властивість характеризують умови вимірів, а саме точність вимірювального приладу, майстерність та досвід виконавця, досконалість методики тощо.

2. Малі щодо абсолютної величини похибки зустрічають частіше ніж великі. Ця властивість характеризує закон розподілу випадкових похибок за їх величиною, тобто густина ймовірностей появи малих похибок більша $P(\Delta_1) \ge P(\Delta_2); \quad |\Delta_1| \le |\Delta_2|$.

3. Додатні, похибки з'являються так само часто, як і рівні їм за абсолютною величиною від’ємні похибки. Ця властивість є наслідком дії закону великих чисел, тобто похибки, що складаються з дії сукупності великої кількості випадкових та незалежних між собою факторів, так впливають на результат, що він майже не залежить від випадковостей $P(\Delta_1) = P(\Delta_2); \quad \Delta_1 \ne \Delta_2; \quad |\Delta_1| = |\Delta_2|$.

4. Середнє арифметичне з випадкових похибок вимірів однієї і тієї ж величини прямує до нуля при необмеженому зростанні кількості вимірів

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0.$$

Це також прояв закону великих чисел.

5. Випадкові похибки при переході від одного вимірювання до другого змінюють свою величину та знак без будь-якої закономірності.

Ця властивість випливає з властивостей будь-якої випадкової величини, про конкретний результат якої не можна сказати наперед.

Критерії оцінки точності. Як вже відзначалося вище, задача теорії похибок полягає не тільки, в тому щоб знайти найбільш надійні значення вимірюваних величин, а також таких, що знаходять за результатами вимірів як функції, а і в тому щоб вказати методи оцінки точності самих вимірів та результатів їх обробки. Для цього треба встановити на основі яких даних можна виконати оцінку точності, які засоби або критерії для цього будуть найкращими.

Якщо відомий єдиний вимір l_1 будь-якої величини X, тоді ми можемо встановити істинну похибку даного конкретного виміру при умові, що X – його істинне значення $\Delta_1 = l_1 - X$. Але значення Δ_1 ще нічого не може сказати про точність.

Наприклад, похибку 5» у виміряному куті ми можемо одержати, якщо будемо вимірювати кут 1' тахеометром при сприятливих умовах. Таку ж саму похибку можна отримати при вимірюванні кута більш точним інструментом (5»-им або 2»-им).

Цей приклад свідчить про те, що для отримання об'єктивної оцінки точності одного виміру недостатньо, необхідно виконувати цілий ряд вимірів. У таких випадках можна виключити систематичні похибки, відкинути грубі виміри, після чого можна, одержати ряд істинних випадкових похибок: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Нехай, наприклад, маємо два ряди вимірів однієї і тієї ж величини: l'_i l''_i $i=1,2,\ldots,n$ з похибкою Δ'_i , Δ''_i. При порівнянні цих двох рядів вимірів, очевидно, кращим буде той, результати якого щонайменше відрізняються один від одного, тобто вони мають найменше розсіювання. Тому природно за критерії оцінки точності прийняти такі числові характеристики випадкової величини, які можуть бути мірою розсіювання її окремих значень відносно центру розподілу. З теорії ймовірностей нам відомі такі характеристики розсіювання, як дисперсія та середнє квадратичне відхилення, середнє арифметичне відхилення, асиметрія, ексцес, ймовірне відхилення. Оскільки закон розподілу випадкових похибок нормальний, асиметрія та ексцес приймають значення «нуль». Тому звернемо увагу на решту характеристик:

- дисперсія (середнє квадратичне відхилення)

$$D_x = D[X] = M[(X - m_x)^2],\ \sigma_x = \sqrt{D_x}\ ;$$

- середнє арифметичне відхилення (абсолютний центральний момент першого порядку)

$$\mu_1 = M[|X - m_x|];$$

− серединне (ймовірне відхилення) Е

P(X<E) = P(X> E) = ½.

У випадку нормального розподілу, як відомо, $\mu_1 = 0{,}8\sigma_X$, $E = 0{,}6745\sigma_x$.

Відповідно зазначеним характеристикам вводять такі критерії:

Середня квадратична похибка:

$$m = \sqrt{\int_{-\infty}^{=\infty} \Delta^2 f_\Delta(x) d\Delta} = \sqrt{D_\Delta}\ .$$

Тобто це додатний корінь другого степеня з дисперсії випадкових величин вигляду $\Delta_i = l_i - X$.

Існують дві статистичні оцінки дисперсії

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ – зміщена,}$$

$$\breve{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ – незміщена,}$$

де під різницею $x - \bar{x}$ розуміють похибку виміру Δ_i

Згідно з цими оцінками можна записати два вирази середньої квадратичної похибки:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2} \quad \text{або} \quad m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\,, \tag{1.1.8}$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2} \quad \text{або} \quad m = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}\ . \tag{1.1.9}$$

Вираз (1.1.8) носить назву формули Гауса. Тут під Δ_i розуміють істинні похибки вимірів. Вираз (1.1.9) відомий як формула Бесселя, де під δ_i розуміють відхилення від середнього арифметичного $\bar{x}$ з результатів вимірів.

Середня похибка:

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n}. \tag{1.1.10}$$

Імовірнісна похибка r, що лежить у центрі ряду похибок, виписаного у порядку зростання їх модулів. Згідно з існуючими співвідношеннями у нормальному законі розподілу встановлюють також співвідношення між *m*, Θ, *r:*

$$\Theta = 4/5m,\ r = 2/3m. \tag{1.1.11}$$

Суттєвим недоліком середньої та імовірної похибок є недостатня їх чутливість до розсіювання окремих результатів вимірів. Найкращим критерієм буде середня квадратична похибка тому що:

а) вона чутливо реагує на великі щодо абсолютної величини похибки окремих результатів вимірів, які в решті решт і визначають точність виміру;

б) середня квадратична похибка швидко стабілізується та приймає деяке постійне значення вже при невеликій кількості вимірів;

в) середня квадратична похибка дозволяє визначити граничну похибку ряду, тобто таку максимальну похибку, яка ще можлива у даному ряді вимірів, а похибки, що її перевищують, будуть вважатися грубими;

$$\Delta_{гран} = 3m, \tag{1.1.12}$$

це співвідношення встановлюється за відомим у теорії ймовірностей правилом «трьох сигм»:

г) за допомогою середньої квадратичної похибки легко одержати закон накопичення випадкових похибок, тобто за допомогою певних формул легко записати вираз для середньої квадратичної похибки будь-якої функції результатів вимірів.

У практичних обчисленнях часто оцінюють точність самого значення середньої квадратичної похибки за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \qquad (1.1.13)$$

оскільки, середня квадратична похибка являє собою емпіричну дисперсію, а будь-яка емпірична величина підлягає оцінці точності та надійності. На підставі статистично незміщеної оцінки m_m параметру m одержана точніша формула:

$$m_m = \frac{0{,}75m}{\sqrt{n}}. \qquad (1.1.14)$$

Вирази (1.1.13) та (1.1.14) використовують для визначення необхідної кількості значущих цифр у числовому значенні m. Наприклад, одержано значення $m = 1{,}623$ з $n = 50$ вимірів. За формулою (1.1.14) $m = 0{,}75 \times 1{,}623 \div 50 = 0{,}17$. Очевидно, що немає сенсу в значенні m лишати навіть соті долі та треба записати $m = 1{,}6$. Похибки, середню квадратичну m, середню Θ, ймовірну r, істинну Δ, називають абсолютними. Відношення відповідної похибки до значення виміряної величини називають відносною похибкою. Нехай *x* виміряне значення якоїсь величини X, тоді:

$\frac{m}{x} = \frac{1}{N_1}$ – середня квадратична відносна похибка цієї величини;

$\frac{\Theta}{x} = \frac{1}{N_2}$ – середня відносна;

$\frac{r}{x} = \frac{1}{N_3}$ – ймовірна відносна;

$\frac{\Delta}{x} = \frac{1}{N_4}$ – істина відносна.

Відносну похибку записують у вигляді дробу з чисельником одиниця. Її вираховують переважно у випадках, коли вимірюють лінійні величини та площі.

Дослідження рядів вимірів. Дослідження рядів вимірів проводять для визначення точності результатів вимірів, а також закономірності розподілу їх похибок. Ставиться експеримент, або аналізують результати певних геодезичних робіт і розв'язують такі конкретні задачі:

1. вибірка грубих вимірів;

2. визначення точності одного виміру;

3. визначення характеристик систематичних впливів, якщо це можливо;

4. визначення критеріїв згоди з нормальним розподілом.

Зауважимо, що повне дослідження має сенс лише при наявності великої кількості результатів, $n \geq 50$. Якщо $n \leq 50$, то можна розв'язувати лише окремі задачі. Якщо істинні значення виміряних величин відомі, тоді виконують дослідження ряду істинних похибок вимірів. Для того, щоб виявити виміри, що обтяжені грубими похибками, необхідно знати середню квадратичну похибку m одного виміру:

$$m^2 = m_\Delta^2 + m_\sigma^2, \tag{1.1.15}$$

де m_Δ – середня квадратична похибка, що характеризує вплив випадкових похибок; m_σ – середня квадратична похибка, що характеризує вплив систематичних похибок.

За формулою (1.1.12) визначають граничну допустиму похибку. Якщо середня квадратична похибка невідома, то для виявлення грубої похибки:

1. обчислюють середнє значення й з ряду істинних похибок

$$\bar{\Delta} = \frac{[\Delta]}{n}, \tag{1.1.16}$$

потім відхилення $\xi = \Delta_i - \bar{\Delta}$;

2. обчислюють наближене значення середньої квадратичної похибки:

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{[\xi^2]}{n-1}}, \tag{1.1.17}$$

3. отримують граничне відхилення як $\Delta_{гран} = 3 \cdot m_\Delta$.

Відхилення Δ_i, абсолютні значення яких перебільшують значення $\Delta гран$, вказують на недопустимі похибки, тому відповідні результати вимірів треба проаналізувати, а похибки, що перевищують $\Delta гран$ треба відкинути.

Далі обчислюють за формулою (1.1.17) нове значення m_Δ, використовуючи результати вимірів, що залишилися після вибірки. Таке значення m_Δ буде характеристикою випадкової похибки одного виміру. Що стосується параметра m_σ, то для того щоб отримати надійне його значення, треба виконати достатню (велику) кількість вимірів у різних умовах. Отримують ряд істинних похибок, що розбивають на групи із врахуванням різних комплексів умов. Для кожної з таких груп похибок вираховують середні значення Θ_j та вважають їх за конкретні значення випадкової величини X.

Далі отримують:

$$m_\sigma^2 \approx \frac{\left\lfloor \overline{\Theta^2} \right\rfloor}{k}, \tag{1.1.18}$$

де κ – кількість груп.

Для того, щоб обміркувати надійність отриманої характеристики впливу систематичних похибок, необхідно ще вирахувати загальне середнє Θ_{cp} з похибок $\Theta_{cp} = \frac{\left\lfloor \overline{\Theta} \right\rfloor}{n}$.

І, якщо

$$\Theta_{cp} \leq \frac{m_\sigma}{\sqrt{k}}, \tag{1.1.19}$$

це є свідоцтвом того, що різноманітність умов ураховано досить добре.

Зауважимо, що надійність параметра m_σ, залежить від кількості груп (бажано, щоб їх було $k \geq 20$) та від правильного врахування різноманітності умов.

При відсутності істинного значення вимірюваної величини (істинних похибок) на групи розбивають результати вимірів x_i, користуючись такими міркуваннями, що і при дослідженні істинних похибок. Середню квадратичну похибку в такому випадку обчислюють за формулою:

$$m_\sigma^2 = \frac{\left[\delta^2\right]}{k-1}, \tag{1.1.20}$$

де κ – кількість груп; $\delta_j = \overline{x_j} - x$, $\overline{x_j}$ – середнє значення в кожній групі.

Після того як будуть знайдені значення та $m=\sqrt{m_{\sigma}^{2}+m_{\Delta}^{2}}$ проводять дослідження рядів Θ_i та Δ_i на нормальність розподілу відомими вже методами.

Середні квадратичні похибки функцій виміряних величин. Посередні виміри отримують як функції виміряних величин. Очевидно, що похибка такої функції буде залежати від похибок аргументів, за якими вона визначена та від виду функції.

Як же знайти середню квадратичну похибку функції? При розв'язуванні такої задачі можуть виникнути два випадки:

1. аргументи, що входять у функцію, корельовані (тобто статистично залежні). Тоді коефіцієнти кореляції парного статистичного зв'язку не будуть дорівнювати нулю $r_{xy} \neq r_{xz} \neq ...... \neq 0$;

2. аргументи не корельовані, тоді $r_{xy} = r_{xz} = ... = 0$.

Одержимо вираз для середньої квадратичної похибки функції виміряних аргументів для першого випадку. Нехай задана функція

$$F = f(x, y, z......u), \tag{1.1.21}$$

де *x,y,z,….,.u* – корельовані аргументи, що одержані зі спостережень, з середніми квадратичними похибками $m_x, m_y, ..., m_u$. Необхідно знайти середню квадратичну похибку цієї функції.

Нехай $\Theta_x, \Theta_{y,} \Theta_z, ..., \Theta_u$ – істинні похибки аргументів, тобто, $\Theta_x = x - X$,

$$\Theta_y = y - Y, \quad \Theta_z = z - Z, \; ......, \; \Theta_u = u - U, \tag{1.1.22}$$

тут X, Y, Z, ….., U – істинні значення виміряних величин. Тоді істинна похибок функції буде:

$$\Theta_F = f(x, y, z, ..., u) - f(X, Y, Z, ..., U),$$

або відповідно формули (1.1.22):

$$\Theta_F = f(x, y, z, ..., u) - f(x - \Theta_x, y - \Theta_{y,} ....., u - \Theta_u). \tag{1.1.23}$$

Оскільки похибки вимірів дуже малі величини порівняно з самими вимірами, вираз (1.1.23) можна розкласти в рад за формулою Тейлора:

$$\Theta_F = f(x,y,z,....,u) - [f(x,y,z,....,u) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Theta_x - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Theta_y - .... - \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \Theta_u + R. \quad (1.1.24)$$

Тут індекс 0 при часткових похідних визначає, що числове значення похідної вираховується за виміряними значеннями величин x, y, z, …, u;

R – залишковий член розкладу, що є сумою всіх нелінійних членів розкладу. В більшості випадків геодезичної практики залишковим членом R можна нехтувати. Тоді:

$$\Theta_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Theta_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Theta_y + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \Theta_u . \quad (1.1.25)$$

Нагадаємо тепер визначення дисперсії як математичного сподівання квадрата різниці між випадковою величиною x та її математичним сподіванням $M[x]$. Тобто $D_x = M[x - M(x)]^2$.

У нашому випадку випадковою величиною можна вважати функцію, $f(x,y,z......u)$, а за математичне сподівання згідно закону великих чисел можна взяти $f(X,Y,Z,......,U)$. Тоді $D_x = M[\Theta_x^2]$, а $D_x = m_x^2$.

Тоді:

$$m_F^2 = M[\Theta_F^2]. \quad (1.1.26)$$

Таким чином, квадрат середньої квадратичної похибки можна розглядати як математичне сподівання квадрата істинної похибки. Тепер, застосовуючи (1.1.26) до виразу (1.1.25), одержимо, попередньо доводячи до квадрата:

$$\Theta_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \Theta_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \Theta_y^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 \Theta_u^2 + 2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Theta_x \cdot \Theta_y + \\ + 2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Theta_x \cdot \Theta_z + ... \quad (1.1.27).$$

Тут часткові похідні $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \ldots$ вираховують при деяких наближених значеннях аргументів, тому їх можна вважати постійними. Далі:

$$M\left[\Theta_F^2\right]=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2\cdot M\left[\Theta_x^2\right]+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2\cdot M\left[\Theta_y^2\right]+......+$$
$$+2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\cdot M\left[\Theta_x\cdot\Theta_y\right]+.........$$

Вирази вигляду $M\left[\Theta_x\cdot\Theta_y\right]$ визначимо з відомої формули коефіцієнта кореляції:

$$r_{xy}=\frac{M\left[(x-M(x)\right]\left[y-M(y)\right]}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

Або, маючи на увазі, що $\sigma_x=m_x$, $\sigma_y=m_y$, $x-M(x)=\Theta_x$, $y-M(y)=\Theta_y$

$$r_{xy}=\frac{M(\Theta_x\cdot\Theta_y)}{m_x\cdot m_y}.$$

Тоді:

$$M\left[\Theta_F^2\right]=m_F^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2\cdot m_x^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2\cdot m_y^2+.......+2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\cdot r_{xy}\cdot m_x\cdot m_y+..... \quad (1.1.28).$$

Для практичного застосування формули (1.1.28) коефіцієнти кореляції повинні бути визначені із спеціальних досліджень. На практиці методики геодезичних вимірів розробляють так, щоб забезпечити вимоги незалежності вимірів. Тоді у формулі (1.1.28) всі коефіцієнти кореляції дорівнюють нулю, і вона приймає вигляд:

$$m_F^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2\cdot m_x^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2\cdot m_y^2+.......+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2\cdot m_u^2. \quad (1.1.29)$$

Питання для самоконтролю:

1. Розкрийте предмет та задачі теорії похибок вимірів.
2. Охарактеризуйте суть та види вимірів.
3. Назвіть складові елементи вимірювального процесу.
4. Дайте класифікацію похибок вимірів (інструментальні, особисті похибки вимірів, похибки зовнішнього середовища).
5. Визначте, якими є систематичні похибки вимірів.
6. Дайте визначення грубих похибок вимірів.
7. Опишіть випадкові похибки вимірів.

8. Назвіть властивості випадкових похибок вимірів.

9. Охарактеризуйте метод виявлення властивостей випадкових похибок експериментальним способом.

10. Розкрийте принцип арифметичної середини.

11. Опишіть математичні властивості для середнього арифметичного.

12. Визначте критерії для оцінки точності результатів вимірів. Розкрийте поняття середньої та середньої квадратичної похибки.

13. Що таке імовірна похибка.

14. Як розрахувати середню квадратичну похибку функції незалежно від виміряних величин.

15. Розкрийте окремі випадки оцінки точності функцій.

Рекомендована література: 4; 5; 16; 30; 34.

1.2. Рівноточні виміри

Виміри однієї або декількох однорідних величин називають *рівноточними*, якщо вони були проведені згідно з однаковими *умовами вимірювання*, а саме вимірювання було виконано інструментами з однаковою точністю, одним і тим же методом, спостерігачами однакової кваліфікації та досвіченості, за приблизно однаковими зовнішніми умовами тощо. У геодезичній практиці, як правило, умови вимірювання регулюються спеціальними настановами та інструкціями через встановлення допусків на кожний з чинників, що впливають на точність вимірів.

Математична обробка ряду рівноточних вимірів однієї величини. Під час обробки ряду результатів рівноточних вимірів однієї величини необхідно:

1) визначити найнадійніше або найімовірніше значення вимірюваної величини;

2) знайти середню квадратичну похибку m одного виміру, що характеризує точність вимірів згідно з даними умовами;

3) визначити середню квадратичну похибку остаточного значення, одержаного в результаті обробки.

За найнадійніше або найімовірніше значення вимірюваної величини, що можна одержати з результатів числа рівноточних вимірів цієї величини, застосовують середнє арифметичне за формулою:

$$L_0 = [l]/n . \qquad (1.2.1)$$

Математичні властивості середнього арифметичного обчислюють за формулою:

1) якщо $L_0 - l_i = \upsilon_i$, де i=1, 2, …., n. Υ_i – відхилення даних величин від їх середнього арифметичного;

$$[\upsilon] = 0. \qquad (1.2.2)$$

2) сума $[\upsilon\upsilon]$ квадратів відхилень даного ряду величин l_i i=1,2,…, n від їхнього середнього арифметичного L_o завжди буде менша від суми $[\delta\delta]$ квадратів відхилень цих величин від будь-якого довільного числа L'.

$$[\delta\delta]>[\upsilon\upsilon]. \qquad (1.2.3)$$

Але ще краще, особливо для великої кількості вимірів n, знаходити його за допомогою наближеного заокругленого значення l_0 і відхилень $\varepsilon_i = l_i - l_0$ за формулою:

$$L_0 = l_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}_i]/n, \qquad (1.2.4)$$

де ε_i – відхилення виміряних значень від наближеного (як правило, за наближене значення l_0 приймають мінімальне значення за результатами вимірів).

Якщо відомі відхилення ε_i, то відхилення виміряних значень від середнього арифметичного можна обчислити за формулою:

$$\Delta_i = \varepsilon_i - [\varepsilon]/n. \qquad (1.2.5)$$

Середня квадратична похибка m одного виміру визначається за формулою Бесселя:

$$m = \pm\sqrt{([\delta^2]/(n\text{-}1))}, \qquad (1.2.6)$$

з контролем обчислення за формулою Петерса:

$$m = \pm\ 1{,}253[|\delta|]/\sqrt{(2(\mathrm{n}\text{-}1))}. \qquad (1.2.7)$$

Після обчислення середньої квадратичної похибки m виконують її власну оцінку точності за формулою:

$$m_{\mathrm{m}} = \pm\, m/\sqrt{2(n-1)}\,. \qquad (1.2.8)$$

Для контролю обчислень використовуються формули:

$$[\delta] = n\alpha, \qquad (1.2.9)$$

де α – помилка заокруглення для обчислення середнього арифметичного L_0.

$$[\delta\delta] = [\delta\varepsilon], \qquad (1.2.10)$$

$$[\delta^2] = [\varepsilon^2] - [\varepsilon]^2/n. \qquad (1.2.11)$$

Середня квадратична похибка M середнього арифметичного визначається за формулою:

$$M = \pm\sqrt{([\delta^2]/n(n\text{-}1))} = \pm\, m/\sqrt{n}. \qquad (1.2.12)$$

Кінцевий результат обробки ряду рівноточних вимірів подається у вигляді $L_o \pm M$.

Оцінка точності результатів подвійних рівноточних вимірів однорідних величин. У геодезичному виробництві часто доводиться проводити подвійні виміри однорідних величин, зокрема кутів, довжин ліній, перевищень між пікетами тощо. Вимірюючи будь-яку величину два рази, за найімовірніше її значення приймають середнє арифметичне, тоді середня квадратична похибка M буде в $\sqrt{2}$ разів меншою від похибки m одного виміру. Але така оцінка точності не є надійною, тому що вона є виведеною тільки з двох вимірів. Крім того, точність кожного середнього арифметичного буде характеризуватись своєю похибкою M і кожна з них не може бути прийнята за величину для оцінки точності всіх результатів подвійних вимірів однорідних величин загалом. Через це точність подвійних вимірів оцінюють так.

Нехай маємо результати рівноточних подвійних вимірів однорідних величин $I'_{\mathrm{i}}, I''_{\mathrm{i}}$ (i= 1,2,…,n).

Знайдемо їхні різниці

$$d_{\mathrm{i}} = I'_{\mathrm{i}} - I''_{\mathrm{i}} \qquad (1.2.13)$$

Методика оцінювання точності залежить від наявності чи відсутності в різницях подвійних вимірів систематичних похибок.

За відсутності систематичних похибок виконується умова $[d] = 0$ $|[d]| \le 0{,}25[|d|]$. Тоді d є істинними похибками, а тому середня квадратична похибка однієї різниці обчислюється за формулою:

$$m_{\mathrm{d}} = \pm\sqrt{[d^2]/n}, \tag{1.2.14}$$

де n – кількість подвійних вимірів.

Середня квадратична похибка одного виміру:

$$m = \pm\sqrt{[d^2]/2n}. \tag{1.2.15}$$

Середня квадратична похибка середнього значення з пари вимірів:

$$m_{\text{сер}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{[d^2]/n}. \tag{1.2.16}$$

У разі систематичних похибок $[d] \ne 0$ $|[d]| > 0{,}25[|d|]$, тоді для виключення систематичних похибок припускаємо, що їхні значення у всіх різницях є однаковими та дорівнюють:

$$d_o = [d]/n; \tag{1.2.17}$$

$$\Delta d_i = d_i - d_o, \tag{1.2.18}$$

де Δd_i – можна вважати за найімовірнішу похибку.

Середня квадратична похибка однієї різниці:

$$m_d = \pm\sqrt{([\Delta d^2]/(n-1))}. \tag{1.2.19}$$

Середня квадратична похибка одного виміру:

$$m = \pm\sqrt{([\Delta d^2]/2(n-1))}. \tag{1.2.20}$$

Середня квадратична похибка середнього значення з пари вимірів:

$$m_{\text{сер}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{([\Delta d^2]/(n-1))}. \tag{1.2.21}$$

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть головні чинники, що визначають точність геодезичних вимірів.

2. Дайте визначення поняття рівноточних вимірів.

3. Охарактеризуйте найімовірніші похибки.

4. Розкрийте формулу Бесселя.

5. Розкрийте формулу середньої квадратичної похибки через найімовірніші похибки.

6. Розкрийте значення формули Петера.

7. Визначте нерівність, що вказує про відсутність систематичних похибок у результатах подвійних рівноточних вимірів.

8. Дайте оцінку точності результатів подвійних рівноточних однорідних величин за відсутності систематичної похибки.

9. Дайте оцінку точності результатів подвійних рівноточних однорідних величин за наявності систематичної похибки.

Рекомендована література: 2; 3; 10; 11; 12.

1.3. Нерівноточні виміри

Часто окремі визначення, чи то за допомогою вимірів або через обчислення однієї величини, або різних, але однорідних проводяться за різних умов вимірювання – неоднакової точності інструментів, різними методами, спостерігачами неоднакової кваліфікації та досвідченості, за різних зовнішніх умов. Результати таких визначень одержують з різними точністю і мірою надійності, де одні з них будуть більш, а інші – менш точними. Такі виміри називаються *нерівноточними*. Очевидно, що остаточним значенням із ряду нерівноточних вимірів вже не буде просте середнє арифметичне, тому що на остаточний результат більш точний вимір повинен мати більший вплив. При виводі остаточного значення з ряду результатів нерівноточних вимірів необхідно брати до уваги якість та надійність кожного окремого виміру.

Якість результату виміру x_i, міру його надійності визначають числом p_i, яке називається його вагою:

$$p = \frac{\lambda}{m}, \tag{1.3.1}$$

де $\lambda = \mu^2$ – сталий коефіцієнт пропорціональності λ, що дорівнює квадрату середньої квадратичної похибки μ такого виміру, вага якого прийнята рівною одиниці.

Математична обробка ряду нерівноточних вимірів. Під час обробки ряду результатів нерівноточних вимірів однієї величини необхідно:

1) знайти найнадійніше або найімовірніше значення вимірюваної величини;

2) зробити оцінку точності вимірів, тобто знайти середню квадратичну похибку μ одиниці ваги;

3) визначити середню квадратичну похибку M_0 остаточного значення вимірюваної величини.

За найімовірніше значення вимірюваної величини з ряду результатів нерівноточних вимірів цієї величини приймають середнє арифметичне за вагами (загальне середнє арифметичне), що можна обчислити за формулою:

$$L_o = [pl]/[p] \qquad (1.3.2)$$

Але ще краще, особливо для великої кількості вимірів n, знаходити L_o за допомогою наближеного заокругленого значення l_o і відхилень ε_i за формулою:

$$L_o = l_o + [p\varepsilon]/[p]; \qquad (1.3.3)$$

$$\varepsilon_i = l_i - l_o\,, \qquad (1.3.4)$$

де ε_i – відхилення виміряних значень від наближеного (зазвичай за наближене значення приймають мінімальне значення з результатів вимірів).

Під час оцінки точності нерівноточних вимірів необхідно розрізняти два випадки, а саме: перший, коли відомі результати вимірів та їх середні квадратичні похибки m_i і другий, коли відомі результати вимірів та їх ваги, виведені не за середніми квадратичними похибками, а за іншими даними.

Ці два випадки відрізняються тим, що в першому із них ми можемо провести оцінку точності (знайти середню квадратичну похибку одиниці ваги) двома незалежними способами:

по-перше, за середніми квадратичними похибками m_i окремих результатів за формулою:

$$\mu = \pm\sqrt{([pm^2]/n)}, \quad (1.3.5)$$

або за формулою:

$$\mu = \pm\sqrt{\lambda}, \quad (1.3.6)$$

де λ – квадрат середньої квадратичної похибки виміру, вага якого береться рівною одиниці (коефіцієнт пропорціональності для обчислення ваг);

по-друге, за найімовірнішими похибками δ_i. Як бачимо, перший спосіб оцінки точності не залежить від обчислення загального арифметичного, а звідси й від найімовірніших похибок δ_i.

У другому випадку оцінку точності можна провести лише за імовірнішими похибками δ_i за формулою:

$$\mu = \sqrt{([p\delta^2]/(n-1))}, \quad (1.3.7)$$

$$\delta_i = \varepsilon_i - [\varepsilon]/n. \quad (1.3.8)$$

Середня квадратична похибка загальної арифметичної середини за вагами розраховується за формулою:

$$M_0 = \pm\mu/\sqrt{[p]} \quad (1.3.9)$$

Середні квадратичні похибки окремих результатів обчислюються за формулою:

$$m_i = \pm\mu/\sqrt{p_i}. \quad (1.3.10)$$

Під час виконання обчислень обов’язково перевіряють такі контрольні співвідношення, як:

$$[p\delta] \le \alpha \cdot [p], \quad (1.3.11)$$

де α – помилка заокруглення для обчислення середнього вагового L_0:

$$[p\delta^2] = [p\varepsilon\delta], \quad (1.3.12)$$

$$[p\delta^2] = [p\varepsilon\delta] - [p\varepsilon]^2/[p]. \quad (1.3.13)$$

Кінцевий результат обробки ряду нерівноточних вимірів прийнято у вигляді:

$$L_0 \pm M.$$

Оцінка точності результатів подвійних нерівноточних вимірів. У геодезичному виробництві часто доводиться проводити подвійні виміри однорідних величин, зокрема кутів, довжин ліній, перевищень між пікетами тощо. Вимірюючи яку-небудь величину два рази, за найімовірніше її значення приймають як середнє арифметичне, а середня квадратична похибка M буде в $\sqrt{2}$ разів меншою від похибки m одного виміру. Але така оцінка точності не є надійною, тому що вона виведена тільки з двох вимірів. Крім того, точність кожного середнього арифметичного буде характеризуватись своєю похибкою M, а тому кожна з них не може бути прийнята за величину для оцінки точності всіх результатів подвійних вимірів однорідних величин загалом. Через це точність подвійних вимірів оцінюють так.

Нехай маємо результати подвійних вимірів однорідних величин I'_i, I''_i ($i = 1,2,\ldots,n$).

Припустимо спочатку, що окремі виміри в парі є рівноточні, але виміри в різних парах – нерівноточні. Знайдемо за цих умов середню квадратичну похибку μ, що відповідає одиниці ваги.

Позначимо ваги окремих результатів вимірів у парах відповідно через p_i ($i = 1.2,\ldots, n$) і знайдемо їхні різниці:

$$d_i = I'_i - I''_i\,, \tag{1.3.14}$$

з вагами цих різниць $p_i/2$.

Методика оцінювання точності залежить від наявності чи відсутності в різницях подвійних вимірів систематичних похибок.

За відсутності систематичних похибок виконується умова:

$$|[d\sqrt{p}\,]| \le 0{,}25[|d\sqrt{p}\,|]. \tag{1.3.15}$$

Тоді d є істинною похибкою, а середня квадратична похибка μ одиниці ваги розраховується за формулою:

$$\mu = \pm\sqrt{([pd^2]/2n)}, \tag{1.3.16}$$

де n – кількість подвійних вимірів.

Якщо ваги результатів вимірів в одній парі будуть різними, то ваги різниць визначаються за формулою:

$$P_{d\,i} = (p'_i p''_i)/(p'_i + p''_i); \qquad 1.3.17)$$

$$\mu = \pm\sqrt{([pd^2]/n)}, \qquad (1.3.18)$$

При наявності систематичних похибок, коли $|[d\sqrt{p}\,]| > 0{,}25[|d\sqrt{p}\,|]$, то їхні систематичні похибки необхідно спочатку виключити і лише після цього можна проводити оцінку точності в такий спосіб. Позначимо систематичні похибки окремих різниць через σi (i= 1,2,…, n). Виключивши їх, одержимо:

$$\Delta d_i = d_i - \sigma i\,, \qquad (1.3.19)$$

Δd_i – можна вважати за найімовірніші похибки різниць з вагами $p_i/2$. Застосувавши формулу (1.3.7), знаходимо середню квадратичну похибку одиниці ваги:

$$\mu = \pm\sqrt{([p\Delta d^2]/2(n-1))}. \qquad (1.3.20)$$

Якщо ваги результатів вимірів в одній парі будуть різними, то ваги різниць визначаються за формулою (1.3.17).

Тоді:

$$\mu = \pm\sqrt{([p\Delta d^2]/(n-1))}. \qquad (1.3.21)$$

Точність середньо вагового значення з кожної пари вимірів можна оцінити за формулою:

$$m_i = \mu/\sqrt{((p'_i + p''_i)}. \qquad (1.3.22)$$

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть головні чинники, що визначають точність геодезичних вимірів.

2. Дайте визначення поняття нерівноточних вимірів та їхніх ваг.

3. Що таке вага арифметичної середини.

4. Дайте визначення загального середнього арифметичного.

5. Визначте середню квадратичну похибку одиниці ваги за істинними похибками.

6. Визначте середню квадратичну похибку одиниці ваги за найімовірнішими похибками.

7. Розкрийте значення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини.

8. Визначте ваги функцій незалежно від виміряних величин.

9. Охарактеризуйте нерівність, що вказує про відсутність систематичних похибок у результатах подвійних нерівноточних вимірів.

10. Дайте оцінку точності результатів подвійних нерівноточних однорідних величин за відсутності систематичної похибки.

11. Дайте оцінку точності результатів подвійних нерівноточних однорідних величин за наявності систематичної похибки.

Рекомендована література: 19; 20; 21; 22; 23.

1.4. Елементи теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – математична дисципліна, мета якої передбачає вивчення кількісних ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

Випробуванням (експериментом) називають здійснення певного комплексу основних умов, внаслідок чого з’являється та чи інша подія. Події бувають *достовірні, випадкові* та *неможливі*.

Достовірною подією називають таку подію, яка за розглянутих умов обов’язково трапиться. Вона позначається латинською літерою U. Ймовірність достовірної події $p(U) = 1$.

Неможливою називають таку подію, що за розглянутих умов не може трапитись. Вона позначається латинською літерою V. Ймовірність неможливої події $p(V) = 0$.

Випадковою подією називають таку подію, яка за умов, що розглядаються, може трапитися, а може й не трапитися. Ймовірність випадкової події $0<p<1$.

Наприклад, якщо в урні є лише чорні кульки, то добування чорної кульки з урни – достовірна подія, а іншого кольору – неможлива подія.

Отримання позитивної похибки під час вимірів буде випадковою подією, тому що можна отримати і від'ємну похибку.

Випадкові події прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту, наприклад $A, B, C, D, X, Y, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Різновиди випадкових подій. Випадкові події можуть бути рівноможливими і нерівноможливими, сумісними і несумісними, залежними і незалежними, єдиноможливими, протилежними та складати повну групу подій.

Випадкові події можуть бути *простими* (за однієї реалізації комплексу основних умов) та *складними* (бути сумою або добутком подій).

Рівноможливі події такі, ймовірність настання або ненастання яких є одинаковим.

Події називають *несумісними*, якщо поява однієї з них A виключає появу інших B у одному і тому ж випробуванні, тобто $AB = V$.

Події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно).

Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо внаслідок випробування хоча б одна з них з'являється обов'язково.

Дві несумісні події, які утворюють повну групу, називають *протилежними*.

Подія, протилежна події A, позначається $\overline{A}$. $A + \overline{A} = U$, $A \cdot \overline{A} = V$.

Елементарними наслідками називають такі події, які неможливо розділити на простіші. Множину усіх можливих елементарних наслідків називають *простором елементарних наслідків*. Простір елементарних наслідків може містити скінчену, злічену або незлічену множину елементів. У ролі елементарних наслідків можна розглядати точки n-вимірного простору, відрізок деякої лінії, точки поверхні S або об'єму V трьох вимірного простору, функцію однієї або багатьох змінних.

Об'єднанням (сумою) випадкових подій $A \cup B$ (або $A+B$) називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій (A або B) або (A та B). Якщо A та

B – несумісні, то $A \cup B$ означають появу події A або події B. Аналогічно визначають суму більшої кількості випадкових подій.

Об'єднанням (сумою) випадкових подій $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ називають таку випадкову подію, що полягає в появі хоча б однієї з цих подій.

Якщо події попарно несумісні, то їхня сума полягає в тому, що повинна з'явитися подія A_1 або A_2... або A_n.

Нескінчену суму випадкових подій позначають $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Різницею B-A (або $B \backslash A$) двох випадкових подій B, A називають усі наслідки, які полягають у тому, що подія A не з'являється.

Добутком (перетином) $A \cap B$ (або $A \cdot B$) випадкових подій A, B називають таку випадкову подію, яка полягає у появі одночасно подій A та B.

Якщо A та B – несумісні, то добуток $A \cap B$ є множина, що не має жодного елемента. Така множина називається пустою (порожньою) і позначається $\acute{\varnothing}$.

Таким чином, у разі несумісності подій А,В маємо $A \cap B = A \cdot B = \acute{\varnothing}$.

Добутком (перетином) скінченої кількості випадкових подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають таку випадкову подію, що полягає у сумісній появі усіх цих подій одночасно.

Подія $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ означає, що розглядаються одночасно усі події.

Ймовірність події є числовою мірою степеня об'єктивної можливості цієї події.

Ймовірність події A $P(A)$ дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, що сприяють появі події A, до загального числа всіх єдино можливих та рівно можливих елементарних наслідків (*класичне означення ймовірності*).

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.4.1}$$

де m – число елементарних наслідків, що сприяють події A;

n – число всіх єдино можливих та рівно можливих наслідків.

Класичне означення ймовірності має місце лише тоді, коли m та n скінчені, усі елементарні наслідки рівно можливі.

Якщо множина усіх елементарних наслідків нескінчена і, як наслідок, займає деяку область G, а події A сприяє лише частина $g \in G$, то обчислення ймовірності події A виконують згідно з геометричним означенням ймовірності.

Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри g до міри G (*геометричного означення ймовірності*):

$$P(A) = m(g)/m(G). \tag{1.4.2}$$

Якщо область G – проміжок, поверхня або просторове тіло, g – частина G, тоді мірою G та g буде довжина, площа або об'єм відповідної області. Якщо G та g проміжки часу, тоді їх мірою буде час.

Відносною частотою події A $p_n(A)$(або $W(A)$) називають відношення числа випробувань, у яких подія A з'явилась, до числа фактично виконаних випробувань:

$$p_n(A) = W(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.4.3}$$

де m – кількість випробувань, у яких з'явилась подія A;

n – кількість всіх випробувань.

Ймовірність $P(A)$ події A обчислюється до випробування, а частота $p_n(A) = W(A)$ обчислюється після випробування. Частота має властивість стійкості. Для великої кількості випробувань частота змінюється дуже мало, коливаючись біля деякого постійного числа ймовірності появи цієї події:

$$p(A) = \lim p_n(A), \tag{1.4.4}$$

де $n \to \infty$.

Статистична ймовірність – це відносна частота або число, близьке до неї.

Основні властивості ймовірності:

1. Якщо подія A достовірна, то її ймовірність дорівнює одиниці, тобто $p(A)$ =1.

2. Якщо подія *A* неможлива, то її ймовірність дорівнює нулеві, тобто $p(A) = 0$.

3. Якщо подія *A* випадкова, то її ймовірність задовольняє співвідношенню $0 < p(A) < 1$.

Властивість ймовірності випадкових подій використовується для здійснення самоконтролю під час розв'язання багатьох задач теорії ймовірностей.

Різні групи, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються *комбінаціями цих елементів*.

Комбінації бувають трьох видів: переставлення, розміщення та сполучення.

Комбінації з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів, називають *переставленням цих елементів* P_n:

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!, \qquad (1.4.5)$$

де $n!$ – n факторіал ($0! = 1$).

Розміщенням з n елементів з m називають такі комбінації, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів ($m<n$) і відрізняються як порядком, так і елементами.

Кількість розміщень з n елементів по m позначають A_n^m і знаходять за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=n!/(n-m)! \qquad (1.4.6)$$

Сполученням із n елементів до m називають комбінації, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів і які відрізняються хоч би одним елементом.

Кількість сполучень з n елементів до m позначають C_n^m і знаходять за формулою:

$$C_n^m = n!/(m!(n-m)!) \qquad (1.4.7)$$

Переставлення можна розглядати як частковий випадок розміщень:

$$P_n = A_n^n = n! \tag{1.4.8}$$

Між кількістю переставлень, розміщень та сполучень існує простий зв'язок:

$$C_n^m = A_n^n / P_m . \tag{1.4.9}$$

Часто доцільно використовувати такі властивості сполучень:

$$C_n^m = C_n^{n-m} ; \quad C_n^m = C_{n+m-1}^m = (n+m-1)!/(m!(n-1)!); \quad C_n^n = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n. \tag{1.4.10}$$

Якщо множина A містить n елементів, а множина B містить m елементів і $A \cap B = \acute{\varnothing}$, тоді множина $A \cup B$ містить $n+m$ елементів (*принцип суми*).

Принцип суми має місце для суми k множин, тобто для:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \tag{1.4.11}$$

Якщо множина A містить n елементів, а множина B містить m елементів, то множина C всіх можливих пар (a_i,b_k) $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,m)$ містить $n \cdot m$ елементів (*принцип добутку*).

Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема 1. Ймовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.4.12}$$

Теорема 2. Якщо випадкові події A_1, A_2, ..., A_n попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{1.4.13}$$

Теорема 3. Сума ймовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{1.4.14}$$

Наслідок. Дві протилежні події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу, тому має місце рівність:

$$P(A+\overline{A}) = 1, \tag{1.4.15}$$

з якої одержано формулу:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \qquad (1.4.16)$$

Випадкові події *A* та *B* називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події.

Якщо ймовірність появи однієї події не залежить від появи або не появи другої, то такі події називають *незалежними*.

Ймовірність події *B*, обчислена за умови появи події *A*, називають умовною йімовірністю події *B* і позначають $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

Якщо події *A* та *B* незалежні, то умовна ймовірність дорівнює безумовній імовірності, тобто:

$$P_A(B) = P(B). \qquad (1.4.17)$$

Теорема 4. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій *A* та *B* дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій та умовної ймовірності другої події за умови, що перша подія з'явилась:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (1.4.18)$$

Вище наведене співвідношення називають *формулою множення ймовірностей залежних випадкових подій*.

Наслідок. У випадку незалежних випадкових подій *A* та *B* формула множення ймовірностей набуває вигляд:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \qquad (1.4.19)$$

і називається *формулою множення ймовірностей незалежних випадкових подій*.

Формула обчислення ймовірності появи хоча б однієї випадкової події з n сумісних подій:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n). \qquad (1.4.20)$$

Теорема 5. Якщо випадкові події *A* та *B* сумісні, то ймовірність їх об'єднання дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їхньої сумісної появи, тобто:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (1.4.21)$$

Якщо події *A* та *B* незалежні, то:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B). \quad (1.4.22)$$

Для залежних випадкових подій маємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P_A(B). \quad (1.4.23)$$

Теорема 6. Якщо випадкова подія A може з’явитись лише сумісно з однією із несумісних між собою подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу і називаються *гіпотезами*, тоді ймовірність події A обчислюється за *формулою повної ймовірності*:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P(A/B_k), \quad (1.4.24)$$

$$P(B_k/A) = P(B_k)\,)\cdot P(A/B_k)/\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P(A/B_k),\ k=1,2,\ldots,n.$$ (*формула Байєса*).

Формула Байєса дозволяє переоцінювати ймовірності гіпотез.

Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах та ймовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова та не залежить від появи або непояви A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають *схемою Бернуллі*.

Для знаходження ймовірності появи події A m разів за n випробувань, що утворюють схему Бернуллі, використовують *формулу Бернуллі*.

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}. \quad (1.4.25)$$

Ймовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі менш m разів знаходять за формулою:

$$P_n(k<m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1). \quad (1.4.26)$$

Ймовірність появи події A не менше m разів знаходять за формулою:

$$P_n(k\geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n). \quad (1.4.27)$$

або за формулою:

$$P_n(k\geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k). \quad (1.4.28)$$

Ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях знаходять за формулою (зауваження 1):

$$P_n(1\leq m\leq n) = 1 - q^n. \quad (1.4.29)$$

У багатьох випадках треба знаходити найбільш імовірне значення m_0 числа m появ події A. Це значення m визначається співвідношеннями (зауваження 2):

$$Np\text{-}q \le m_0 \le np+p \text{ або } (n+1)p-1 \le m_0 \le (n+1)p. \quad (1.4.30)$$

Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A з‘явиться хоча б один раз, знаходять за формулою (зауваження 3):

$$n > \ln(1-P)/\ln(1-p). \quad (1.4.31)$$

Якщо $n \to \infty$ і $p \to 0$ так, що $np \to \lambda$, $0<\lambda<\infty$, то для будь-якого постійного m=0,1,2,…(*теорема Пуассона*):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \lambda^m e^{-\lambda}/m! \quad (1.4.32)$$

Наслідок. Ймовірність появи події A m разів у n випробувань схеми Бернуллі можна знаходити за наближеною формулою Пуассона, де $\lambda = np$ (формулу доцільно застосовувати для великих n та малих p):

$$P_n(m) = \lambda^m e^{-\lambda}/m! \quad (1.4.33)$$

Локальною функцією Лапласа називають функцію вигляду:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad (1.4.34)$$

Основні властивості локальної функції Лапласа:

1. Функція Лапласа $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$;
2. Функція $\varphi(x)$ визначена для усіх $x \in (-\infty, \infty)$;
3. $\varphi(x) \to 0$, коли $x \to \pm\infty$;
4. $\varphi_{max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt. \quad (1.4.35)$$

Основні властивості інтегральної функції Лапласа:

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2. $\Phi(0) = 0$;

3. $\Phi(x) = 0{,}5$ для $x \geq 5$.

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а імовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова, то ймовірність появи події A m разів може бути знайдена за наближеною формулою (*локальна теорема Муавра-Лапласа*):

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_m), \tag{1.4.36}$$

де $x_m = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Формулу доцільно використовувати для $n > 100$ та $npq > 20$.

Якщо у схемі Бернуллі в кожному із n незалежних випробувань подія A може з'явитися з постійною імовірністю p, тоді ймовірність появи події A не менш m_1 та не більш m_2 разів може бути знайдена за формулою (*інтегральна теорема Муавра-Лапласа*):

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.4.37}$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа, $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Якщо у n незалежних випробуваннях ймовірності появи події A різні і дорівнюють $p_1, p_2, \ldots, p_n$, тоді використовується твірна функція:

$$\Phi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k z). \tag{1.4.38}$$

Правило. Шукана ймовірність $P_n(m)$ дорівнює коефіцієнту, що стоїть біля z^m.

Якщо у n незалежних випробуваннях ймовірність p появи події A однакова і подія A з'явилася m разів, то для будь-якого додатного числа α має місце рівність (*теорема Я. Бернуллі*):

$$p(A) = \lim P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \alpha\right) = 0, \tag{1.4.39}$$

де $n \to \infty$, α – нескінченно мала величина,

або:

$$\lim P(|\frac{m}{n} - p|<\varepsilon) = 1, \qquad \varepsilon>0. \tag{1.4.40}$$

Вище наведену формулу можна записати з використанням інтегральної функції Лапласа *Ф(x)* у вигляді:

$$\lim P(|\frac{m}{n} - p|\le\varepsilon) = 2\ \Phi(x)\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

$n\to\infty$

$$P(|\frac{m}{n} - p|\le\varepsilon) \approx 2\ \Phi(x)\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{1.4.41}$$

Питання для самоконтролю:

1. Що є предметом теорії ймовірностей?
2. Що називають подією? Які події називаються достовірними, неможливими, випадковими?
3. Як визначають та позначають суму, добуток випадкових подій, протилежну подію, повну групу подій?
4. Які події називають сумісними, несумісними, рівноможливими?
5. Як визначають класичне та статистичне означення ймовірності?
6. Які ймовірності вірогідної та неможливої подій?
7. Як визначають та позначають частоту випадкової події А?
8. Які основні властивості ймовірності та частоти?
9. Які ймовірності вірогідної та неможливої подій?
10. Що називають сумою подій?
11. Що таке добуток подій?
12. Що є предметом комбінаторики?
13. Як формулюють основні принципи комбінаторики?
14. Як формулюють і якими формулами записують теореми додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій?
15. Які випадкові події називають незалежними?
16. Як визначають та позначають умовну імовірність?
17. Як формулюють і якими формулами записують теореми множення ймовірностей залежних та незалежних подій?

18. За якою формулою можна обчислити ймовірність появи хоча б однієї з n сумісних подій?

19. Що таке повна імовірність події?

20. Яка ймовірність обчислюється за формулою Я. Бернуллі?

21. Що таке найімовірніша кількість подій?

22. Яка ймовірність обчислюється за локальною теоремою Лапласа?

23. Коли застосовують формули Байєса та як їх записують?

24. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?

25. Яку формулу звуть формулою Бернуллі і що вона дозволяє обчислювати?

26. За якими формулами знаходять ймовірність появи події А менше m або не менше за m разів у n випробуваннях схеми Бернуллі?

27. За якою формулою знаходять ймовірність появи події А хоча б один раз у n випробуваннях?

28. Як можна знайти кількість випробувань у схемі Бернуллі, яка дозволяє з імовірністю Р стверджувати, що подія А з'явиться хоча б один раз?

29. У яких випадках доцільно використовувати граничні теореми у схемі Бернуллі?

30. Коли доцільно застосовувати формули Пуассона, локальну або інтегральну формули Муавра-Лапласа?

31. Як визначаються і які мають властивості локальна та інтегральна функції Лапласа?

32. Як знаходять Pn(m) у випадку послідовності випробувань із різними ймовірностями ?

33. Як формулюється теорема Бернуллі і який вона має наслідок?

34. Який існує зв'язок між твердженням теореми Бернуллі та інтегральною функцією Лапласа? Які задачі дозволяє розв'язувати цей зв'язок?

Рекомендована література: 9; 13; 14; 26; 28; 29; 32.

1.5. Випадкові величини та їх ймовірнісні характеристики

Випадковою величиною називають таку величину, що внаслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

Випадкові величини доцільно позначати великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z, …., а їх можливі значення – відповідними малими літерами з індексами. Наприклад, X: $x_1, x_2, ..., x_n$; ...; Z: $z_1, z_2, ..., z_n$.

У практичному застосуванні теорії ймовірностей у математичній обробці геодезичних вимірів доводиться зустрічатися із задачами, у яких результати випробувань описуються не однією, а двома, трьома і більше випадковими величинами, які утворюють систему. Такі величини називають відповідно одновимірними, двовимірними, тривимірними, …, n-вимірними. Прикладом двовимірних випадкових величин є похибки Δx, Δy визначення положення точки на місцевості.

Двовимірну випадкову величину позначають (X, Y), де X та Y при цьому будуть компонентами. Величини X та Y, що розглядають одночасно, утворюють систему двох випадкових величин. Аналогічно можна розглядати систему n випадкових величин.

Сукупність n випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n), що розглядають одночасно, називають *системою випадкових величин.*

Систему n випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n) можна розглядати, як випадкову точку в n-вимірному просторі з координатами (X_1, X_2, ..., X_n) або як випадковий вектор, направлений з початку координат у точку M (X_1, X_2, ..., X_n).

Багатовимірні випадкові величини бувають *дискретними* та *неперервними.*

Дискретною випадковою величиною називають таку величину, що може приймати відокремлені ізольовані одне від одного числові значення з відповідними ймовірностями.

Неперервною випадковою величиною називають величину, що може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу (a, b). Кількість можливих значень такої величини є нескінченою.

Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, що встановлює зв΄язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

У випадку дискретної випадкової величини функціональну залежність можна зобразити *таблично, аналітично* або *графічно*.

Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї величини (x_i, y_j) та їх ймовірностей $p(x_i, y_j)$, i=1,2,…,n; j=1,2,…,m.

Найчастіше закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини задають у вигляді таблиці з двома входами (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Y	X					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	…	$p(x_i,y_1)$	…	$p(x_n,y_1)$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_i,y_2)$	…	$p(x_n,y_2)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1,y_j)$	$p(x_2,y_j)$	…	$p(x_i,y_j)$	…	$p(x_n,y_2)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1,y_m)$	$p(x_2,y_m)$	…	$p(x_i,y_m)$	…	$p(x_n,y_m)$

Події $(X=x_i,, Y=y_j)$, i=1,2,…,n; j=1, 2, …, m утворюють повну групу, тому сума ймовірностей таблиці дорівнює одиниці, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)=1. \tag{1.5.1}$$

Закон розподілу двовимірної випадкової величини дозволяє отримати закони розподілу кожної компоненти.

Дійсно, події (x_i,y_1), (x_i,y_2),…, (x_i,y_m), несумісні, тому імовірність $P(x_i)$ того, що X прийме значення x_i за теоремою додавання ймовірностей буде:

$$P(x_i)= P(x_i,y_1)+ P(x_i,y_2)+\ldots+ P(x_i,y_m), \tag{1.5.2}$$

тобто дорівнює сумі ймовірностей, що розташовані в *i*-му стовпчику таблиці розподілу.

Аналогічно, додаванням ймовірностей *j*-го рядка таблиці, одержимо імовірність:

$$P(y_j)= P(x_1,y_j)+ P(x_2,y_j)+\ldots+ P(x_n,y_j). \qquad (1.5.3)$$

Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) двовимірної випадкової величини (X, Y) називають функцію двох змінних $F(x, y)$, що визначає для кожної пари чисел (X, Y) імовірність виконання нерівностей $X<x; Y<y$, тобто:

$$F(x,y)=P(X<x; Y<y). \qquad (1.5.4)$$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$;

2. F(x,y) не спадна функція за кожним аргументом, тобто:

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \text{ якщо } x_2 > x_1;$$

$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

3. Мають місце граничні співвідношення:

$$F(-\infty,y)=0;\ F(x_1,-\infty)=0;\ F(-\infty,\infty)=0;\ F(\infty,\infty)=1.$$

4. Імовірність влучення випадкової точки до прямокутника $\{x_1 \le X \le x_2; y_1 \le Y \le y_2)\}$ можна знайти за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2;\ y_1 \le Y \le y_2) = \{ F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)\} - \{F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)\}.$$

Геометричний зміст функції розподілу $F(x, y)$ – це імовірність того, що випадкова точка $M\ (X\ ,Y)$ попаде в нескінчений прямокутник із вершиною в точці (X, Y), який розміщений нижче та лівіше від цієї вершини.

У випадку неперервної випадкової величини для її повної характеристики вводять інтегральну $F(x,y)=P(X<x; Y<y)$ або диференціальну функції розподілу.

Диференціальною функцією розподілу (двовимірною густиною ймовірностей) f(x, y) двовимірної випадкової величини (X, Y) називають мішану часткову похідну другого порядку від інтегральної функції розподілу:

$$f(x,y) = d^2F(x,y)/dxdy. \qquad (1.5.5)$$

Властивості густини ймовірностей:

1. $f(x,y) \geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Умовним законом розподілу випадкової величини X, що входить в систему *(X, Y)* називають її закон розподілу, знайдений за умови, що друга величина *Y* прийняла певне стале значення "*y*", або навпаки (табл. 1.2 та 1.3).

Для $Y = y_j$:

Таблиця 1.2

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(x_i/y_j)$	$p(x_1/y_j)$	$p(x_2/y_j)$	…	$p(x_n/y_j)$

Для $X = x_i$:

Таблиця 1.3

y_j	y_1	y_2	…	y_m
$p(y_j/x_i)$	$p(y_1/x_i)$	$p(y_2/x_i)$	…	$p(y_m/x_i)$

$p(x_i/y_j) = p(x_i,y_j)/p(y_j), \qquad \sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) \approx 1;$

$p(y_j/x_i) = p(x_i,y_j)/p(x_i), \qquad \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) \approx 1;$

$f(x,y) = f_1(x) f(y/x);$

$f(x,y) = f_2(y) f(x/y).$

Густина розподілу системи двох випадкових величин *(X, Y)* дорівнює густині розподілу однієї з них, помноженій на умовну густину розподілу іншої величини, обчислену за умови, що перша з них набула задане значення. Це правило називають *теоремою множення законів розподілу.*

Y називається залежною від випадкової величини *X*, якщо закон розподілу величини *Y* залежить від того, якого значення набула величина *X*.

Числові характеристики системи двох випадкових величин. Числові характеристики системи випадкових величин можуть бути записаними через вирази початкових та центральних моментів.

Початковим моментом порядку r, s системи (X, Y) називається математичне сподівання добутку $(X^r Y^s)$.

$$\nu_{r,s} = M[X^r Y^s]. \tag{1.5.6}$$

Центральним моментом порядку r, s системи (X, Y) називається математичне сподівання добутку центрованих величин $(\overset{0}{X})^r (\overset{0}{Y})^s$.

$$\mu_{r,s} = M[(\overset{0}{X})^r (\overset{0}{Y})^s], \tag{1.5.7}$$

де $\overset{0}{X} = X - m_x$; $\overset{0}{Y} = Y - m_y$.

Для дискретних випадкових величин:

$$\nu_{r,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x^r y^s P_{ij}, \tag{1.5.8}$$

$$\mu_{r,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^r (y_j - m_y)^s P_{ij}, \tag{1.5.9}$$

для неперервних випадкових величин:

$$\nu_{r,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x,y)dxdy, \tag{1.5.10}$$

$$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^r (y_j - m_y)^s f(x,y)dxdy, \tag{1.5.11}$$

де P_{ij} – імовірність того, що система (X, Y) прийме значення (x_i, y_j) $(i=1,2, ...,n$; $j=1,2,...,m)$; $f(x,y)$ – функція густини розподілу ймовірностей системи (X, Y).

Перші початкові моменти (математичне сподівання):

$$m_x = \nu_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X],$$
$$m_y = \nu_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y]. \tag{1.5.12}$$

У геометричній інтерпретації вони означають координати середньої точки на площині, біля якої групуються інші можливі точки системи.

Другі центральні моменти (дисперсії величин X, Y):

$$\mu_{2,0} = M[(\overset{0}{X})^2 (\overset{0}{Y})^0] = D[X],$$

$$\mu_{0,2} = M[(\overset{0}{X})^0 \ (\overset{0}{Y})^2]=D[Y]. \qquad (1.5.13)$$

Дисперсії характеризують розсіювання випадкових точок системи в напрямах координатних осей $0x$ і $0y$.

Другий змішаний центральний момент (кореляційний момент або момент зв'язку (коваріація)):

$$\mu_{1,1} = M[\overset{0}{X}\ \overset{0}{Y}]=M[(X-m_x)(Y-m_y)]=cov(X,Y). \qquad (1.5.14)$$

Для дискретної системи *(X, Y):*

$$cov(x,y)=K_{x,y}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y) P_{ij}. \qquad (1.5.15)$$

Для неперервної системи *(X, Y):*

$$cov(x,y)=K_{x,y}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)(y_j - m_y) f(x,y)dxdy. \qquad (1.5.16)$$

Кореляційний момент характеризує розсіювання величин *X, Y*.

Коефіцієнт кореляції:

$$r_{x,y} = K_{x,y}/\sigma_x\sigma_y. \qquad (1.5.17)$$

Коефіцієнт кореляції є кількісна характеристика залежності випадкових величин *X*, *Y*.

Випадкові величини *X* та *Y* звуть не корельованами, якщо їх кореляційний момент або коефіцієнт кореляції дорівнює нулеві.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. $|r_{x,y}| \le 1$;
2. якщо *X* та *Y* незалежні, то $r_{x,y}=0$;
3. якщо між *X* та *Y* є лінійна залежність $Y=aX+b$, де a та b – постійні, то $|r_{x,y}|=1$.

Якщо момент кореляції або коефіцієнт кореляції не дорівнює нулеві, тоді випадкові величини *X* та *Y* – корельовані. Якщо $r_{x,y} > 0$, то це вказує на позитивну кореляцію між величинами *X* та *Y*, а у випадку, коли $r_{x,y} <0$, то існує негативна кореляція між *X* та *Y*. Дві корельовані величини обов'язково залежні. Але дві залежні випадкові величини можуть бути корельованими або не корельованими, тобто їх коефіцієнт кореляції може дорівнювати нулеві, а може і не дорівнювати нулеві.

Із незалежності двох величин випливає їх некорельованість, але з цього ще не випливає незалежність цих величин. У випадку нормального розподілу величин із некорельованості випадкових величин випливає їх незалежність.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте визначення поняття випадкової величини та її видів.
2. Розкрийте закон розподілу випадкової величини (означення).
3. Перелічіть форми закону розподілу для різних випадкових величин.
4. Охарактеризуйте універсальну форму закону розподілу для дискретної та неперервної випадкової величин.
5. Розкрийте властивості густини розподілу, подайте її вираз.
6. Назвіть властивості функції розподілу, подайте її вираз.
7. Дайте визначення групи числових характеристик.
8. Наведіть формули для математичного сподівання.
9. Опишіть формули для визначення дисперсії.
10. Визначте числові характеристики положення.
11. Визначте числові характеристики розсіювання.
12. Дайте визначення поняття моментів та їхнього зв’язку з числовими характеристиками.
13. Що таке кореляційний момент, коефіцієнт кореляції.
14. Розкрийте поняття коефіцієнта регресії.
15. Розкрийте поняття рівняння лінійної регресії.

Рекомендована література: 1; 15; 16; 17; 19.

1.6. Статистичні ряди та їх характеристики

Математична статистика є математичною дисципліною, завданням якої є розробка методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Основні завдання, що розв'язує математична статистика, зокрема визначає та перевіряє:

1) основні способи збору та групування даних;

2) закони розподілу випадкової величини (системи випадкових величин) за статистичними даними;

3) невідомі параметри розподілу;

4) правдоподібність припущень про закони розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення параметра, що підлягає оцінці.

Основне завдання математичної статистики – розробка методів аналізу статистичних даних залежно від мети досліджень.

Збір експериментальних даних називають *статистичними спостереженнями*.

Статистичною сукупністю називають множини однорідних об'єктів.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково взятих об'єктів.

Генеральною називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку.

Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної) називають кількість об'єктів цієї сукупності.

Сукупність значень, що спостерігаються, яких-небудь величин є первинним статистичним матеріалом, що підлягає усвідомленню, обробці, науковому аналізу. Така сукупність називається *простою статистичною сукупністю* або *простим статистичним рядом.* Переважно простий статистичний ряд подають у вигляді таблиці 1.4 з одним входом:

Таблиця 1.4

i	1	2	3	…	n-1	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n

де *i* – номер спостереження; x_i – відповідне йому значення випадкової величини, що спостерігається.

У математичній статистиці замість слова *«дані»* застосовують термін *«варіанти»*. Числову характеристику варіанти називають *ознакою.* Варіація (зміна) ознаки може бути дискретною і неперервною.

Нехай із генеральної сукупності взята вибірка об'єктів (x_1 x_2 ,..., x_n) обсягу n, для визначення ознаки X. Тобто x_1, x_2 ,..., x_n є варіантами ознаки X. Першим кроком обробки є впорядкування варіант. Варіанти, що записані до таблиці у зростаючому/спадаючому порядку, називають *варіаційним рядом*.

Додатне число, що вказує, скільки разів та чи інша варіанта трапляється в таблиці даних, називається *частотою.*

Ряд m_1, m_2,..., m_n називають рядом частот. Сума усіх частот повинна дорівнювати обсягу вибірки $\sum_{i-1}^{k} m_\mathrm{i} = n$. Коли $n \geq 100$, то необхідно будувати статистичний ряд, який можна представити у вигляді таблиці 1.5.

Таблиця 1.5

i	x_1 ;x_2	x_2 ;x_3		…	x_{k-a} ;x_k
$P_i{}'$	$P_1{}'$	$P_2{}'$		…	$P_k{}'$

де i – інтервали (розряди, класи інтервалів, класи), на які поділяється весь діапазон статистичних спостережень деякої випадкової величини X: x_i; x_{i+1} – межі; $P_i{}'$ – відносна частота, що відповідає і-му інтервалу та обчислюється за формулою:

$$P_i{}' = m_i /n, \tag{1.6.1}$$

де m_i – кількість значень випадкової величини x, що попадають у i-ий інтервал; n – кількість усіх значень вибірки X. Практика показує, що оптимальним є кількість інтервалів ≈ 10-20. Для вибору оптимальної довжини інтервалу рекомендується застосовувати формулу Стерджеса:

$$R=(x_{max}-x_{min})/(1+3{,}2\lg n). \qquad (1.6.2)$$

Найпростішими інтервальними статистичними рядами є ряди з однаковими довжинами інтервалів. Якщо частоти неперервного статистичного ряду поставити відповідно до середини інтервалу, то отримаємо дискретний ряд, що відповідає даному неперервному статистичному ряду.

Для наочності статистичний матеріал зображують графічно у вигляді полігона, гістограми, кумуляти, емпіричної функції розподілу. Полігон застосовується для зображення дискретного статистичного ряду. Гістограма зображає інтервальний статистичний ряд. Кумулята (кумулятивна крива) або крива сум зображає статистичний ряд із нагромадженими частотами (відносними частотами).

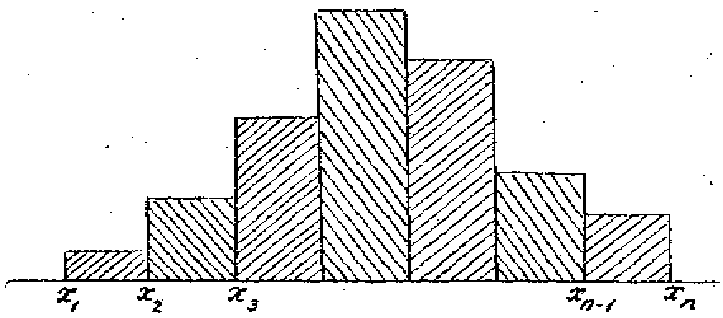


Рис. 1.1. Приклад побудови гістограми

Для побудови гістограми (рис. 1.1) на осі абсцис відкладають інтервали, на кожному із інтервалів, як на їх основі, будується прямокутник, площа якого дорівнює частоті даного інтервалу. Для побудови гістограми частоту кожного інтервалу необхідно поділити на його довжину, потім отримане число приймається за висоту прямокутника. Необхідно інтервали вибирати рівними за довжиною, тоді висоти прямокутників будуть пропорційними відповідним частотам. Повна площа гістограми дорівнює одиниці. Вірогідно, що для більшої кількості спостережень можна вибрати менші інтервали, тоді гістограма буде подібна до кривої, що обмежує площу, рівну одиниці. Дана крива є графіком густини розподілу випадкової величини X.

На підставі даних статистичного ряду можна наближено побудувати статистичну функцію розподілу величини X, якщо точки, для яких будуть обчислені значення функції, будуть межами інтервалів x_1 x_2 $,...,x_n$. Тоді значення статистичної функції розподілу будуть:

$$F'(x_1) = 0;$$

$$F'(x_2)=P_1';$$

$$F'(x_3) = P_1' + P_2';$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F'(x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-2} P_i';$$

$$F'(x_k) = 1. \tag{1.6.3}$$

З'єднуючи отримані точки ламаною лінією (рис. 1.2), отримуємо наближений графік статистичної функції розподілу.

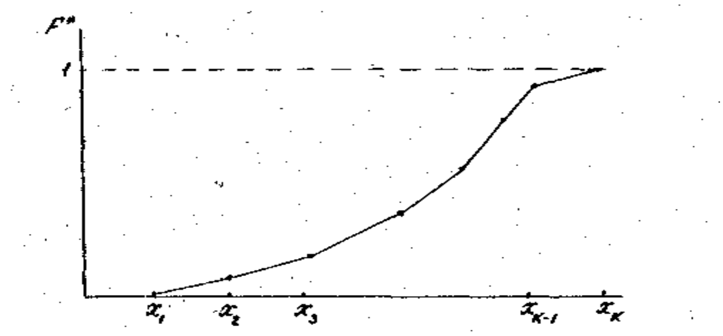


Рис. 1.2. Приклад побудови графіку статистичної функції розподілу

Вирівнювання статистичного ряду. Завдання вирівнювання статистичного ряду є в підборі теоретичної плавної кривої розподілу, що найкраще описує даний емпіричний статистичний розподіл, тобто криву, яка б показувала суттєві риси статистичного матеріалу, а не випадковості, що пов'язані з недостатнім обсягом експериментальних даних. Необхідно, щоб аналітична функція *f(x)*, за допомогою якої вирівнюється статистичний розподіл, повинна мати основні властивості густини розподілу: $f(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Таким чином, задача вирівнювання статистичного ряду полягає у визначенні параметрів даної функції. Частіше для розв'язання такої задачі використовують *метод моментів*, в якому параметри функції $f(x)$ вибирають з таким розрахунком, щоб декілька важливих числових характеристик (моментів) теоретичного розподілу були рівними відповідним статистичним характеристикам емпіричного (статистичного) розподілу. Під час нормального розподілу $f(x)$ залежить від двох параметрів, які вибирають так, щоб математичне сподівання m_x та дисперсія D_x теоретичного розподілу співпадали з відповідними статистичними характеристиками m_x' та D'_x.

Практично завжди є розбіжності між теоретичним та емпіричним розподілами. *Критерієм згоди* називається деяка величина U, що вказує ступінь розбіжності теоретичного та статистичного розподілу. Величина U може бути обчислена різними способами. Наприклад, це може бути сума квадратів відхилень теоретичних ймовірностей P_i від відповідних частот P_i' або максимальне відхилення статистичної функції розподілу $F'(x)$ від теоретичної $F(x)$. Якщо для U отримано деяке значення u, то необхідно обчислити імовірність того, що за рахунок випадкових причин, пов'язаних із недостатнім обсягом дослідного матеріалу, розбіжність U буде не менша, ніж обчислене значення u для цього випадку, тобто обчислюють імовірність події $U \geq u$. Якщо ця імовірність мала, то розбіжність між теоретичним та статистичним розподілами суттєва і теоретичний закон розподілу не буде законом розподілу випадкової величини X, що описано експериментальними даними, тобто гіпотеза про закон розподілу неправдоподібна і може бути відкинута. Якщо ця імовірність велика, то гіпотеза про закон розподілу правильна.

Для перевірки узгодженості теоретичного і статистичного розподілу найчастіше використовують критерії згоди Пірсона та Колмогорова.

Критерій Пірсона. Під час використання критерію Пірсона, як міра розбіжності U використовується величина, що має розподіл χ^2 з r ступенями довільності:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (m_i - nP_i)^2/(nP_i), \qquad (1.6.4)$$

де P_i – імовірності, що обчислені за умови, що випадкова величина X підпорядковується теоретичному законові $F(x)$; m_i – кількість значень випадкової величини у i-ому інтервалі; n – кількість всіх спостережень; $r=k-c$, де r – число ступенів довільності; k – кількість інтервалів статистичного ряду; с – кількість незалежних умов (зв'язків), що накладають на частоти P_i'. Наприклад, $\sum_{i=1}^{k} P'_i = 1$; $m'_x = m_x$; $D'_x = D_x$.

Розподілом χ^2 з r ступенями довільності називається розподілом суми квадратів n незалежних випадкових величин, кожна з яких підпорядковується нормальному законові розподілу з математичним сподіванням, рівним нулеві, та дисперсією, рівною одиниці.

Для розподілу χ^2 складено спеціальні таблиці з двома входами, а саме рівнем значущості α та ступенем довільності r, за якими можна обчислити критичні точки χ^2 – розподілу, тобто імовірність того, що за рахунок випадкових причин міра розбіжності теоретичного та емпіричного (статистичного) розподілів буде не менш фактичних спостережень у даній серії емпіричних значень (додаток М).

Таким чином, послідовність дій для використання критерію Пірсона наступна:

1) знаходять міру розбіжності χ^2 за вище наведеною формулою для U ;

2) визначають ступень довільності $r=k-c$;

3) за r та α з допомогою таблиць (додаток М) знаходять критичні точки χ^2 – розподілу. Якщо $\chi^2_{обч.} < \chi^2\ (\alpha, r)$, то гіпотезу можна вважати правдоподібною;

4) можна знайти імовірності P_i для кожного i-ого інтервалу за допомогою таблиці функції Лапласа (додаток Л).

У даному випадку використовують формулу:

$$P_i = \Phi((x_{i+1} - m_x')/\sigma_x') - \Phi((x_i - m_x')/\sigma_x'). \qquad (1.6.5)$$

Якщо отримана імовірність достатньо велика, то гіпотезу можна визнати правдоподібною. На підставі практичних спостережень гіпотеза відкидається, якщо $P < 0,3$.

Критерій А. Колмогорова. Під час використання критерію Колмогорова, як міра розбіжності між теоретичним та статистичним розподілами розглядається величина:

$$D = \max |F'(x) - F(x)|, \qquad (1.6.6)$$

де $F'(x)$, $F(x)$ – статистична та теоретична функції розподілу.

Імовірність того, що якщо випадкова величина X дійсно розподілена згідно зі законом $F(x)$ за рахунок тільки випадкових величин, то максимальне розходження між $|F'(x) - F(x)|$ буде не менше, ніж фактично спостережене, та визначається за формулою:

$$\rho(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}, \qquad (1.6.7)$$

де $\lambda_{\text{обч.}} = D\sqrt{n}$.

Таким чином, послідовність дій для використання критерію Колмогорова наступна:

1) будують статистичну $F'(x)$ та теоретичну $F(x)$ функції розподілу та визначають величину D;

2) обчислюють величину λ. За таблицями знаходять імовірність $P(\lambda)$ (додаток Л). Якщо імовірність мала ($P(\lambda)<0,3$), то гіпотеза є недостовірною; якщо $P(\lambda)$ достатньо велика, то її можна вважати сумісною з емпіричними даними.

3) можна задати рівень значущості $\alpha(q\%/100)$ і $k=8$), де k – кількість інтервалів, тому що величина D'_x знайдена за даними, згрупованими у статистичний ряд. Використовують таблицю критичних значень для найбільшого відхилення емпіричного розподілу від теоретичного (критерій

Колмогорова) (додаток Н). Знаходять λ_q. Якщо $\lambda_{обч.} < \lambda_q$, то гіпотеза приймається, як достовірна.

Числові характеристики статистичного розподілу. Для розв'язання задачі вирівнювання необхідно обчислити деякі числові характеристики розподілу, що будуть відрізнятися від відповідних характеристик теоретичного розподілу. Методи обчислення таких характеристик будуть іншими.

Головною характеристикою положення – *математичним сподіванням* у статистиці є середнє арифметичне спостереження випадкової величини:

$$m_x'=M'[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1.6.8}$$

де m_x' називають *статистичним середнім* або *вибірковим середнім випадкової величини.*

Головна характеристика розсіювання – *статистична* або *вибіркова дисперсія*, що обчислюють наступним чином:

$$D_x'= D'[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x'\right)^2. \tag{1.6.9}$$

Таким способом можна обчислити статистичні початкові та центральні моменти будь-яких порядків:

$$\nu_k'[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k,$$

$$\mu_k'[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x'\right)^k. \tag{1.6.10}$$

На практиці рекомендується використовувати дані статистичного ряду і наближені формули для обчислення числових характеристик. Тоді допускають, що значення випадкової величини в кожному інтервалі постійне і дорівнює середньому значенню з усіх значень, що попадають у даний інтервал. Тоді статистичні числові характеристики обчислюють за наближеними формулами:

$$m_x'= M'[x] = m_x'=\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \cdot P'_i,$$

$$D_x' = D'[x] = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x')^2 \cdot P'_i,$$

$$\nu_k'[x] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^k \cdot P'_i,$$

$$\mu_k'[x] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x')^k \cdot P'_i, \qquad (1.6.11)$$

де $\tilde{x}_i$ – представник *i*-го інтервалу, в якості якого рекомендується використовувати центр інтервалу; k – кількість інтервалів ($k<n$).

Вище зазначені оцінки називають *точковими* та відображають одним числом.

Такі наближені випадкові значення числових характеристик називають *оцінками параметрів* (Θ), що повинні бути:

1) слушні (обґрунтовані), тобто підпорядковуватись законові великих чисел ($\lim\limits_{n\to\infty} P(|\tilde{\Theta} - \Theta| < \varepsilon) = 1$);

2) незміщені (математичне сподівання оцінки повинно дорівнювати самому параметру, що підлягає оцінці ($M[\tilde{\Theta}] = \Theta$);

3) ефективні (дисперсія має бути мінімальна)($D[\tilde{\Theta}] \to \min$).

Для вибірок малих обсягів необхідно вказати точність і надійність оцінки. Для розв’язання такої задачі в математичній статистиці використовують *довірчі інтервали* та *довірчі імовірності*.

Довірчим інтервалом для деякого параметра Θ буде такий інтервал, відносно якого з достатньо високою імовірністю можна зробити висновок, що він охоплює невідоме значення Θ.

Якщо точковою оцінкою параметра Θ є величина $\tilde{\Theta}$, то можна записати:

$$\rho[\tilde{\Theta}_n^{(1)} < \Theta < \tilde{\Theta}_n^{(2)}] = 1 - \alpha, \qquad (1.6.12)$$

де α – мале число ($\alpha>0$); $\rho = 1 - \alpha$ – довірча ймовірність; $\tilde{\Theta}^{(1)}$, $\tilde{\Theta}^{(2)}$ - довірчі межі.

У випадку розподілу випадкових величин за нормальним законом (у геодезичній практиці випадкові величини спостережень наближені до нормального закону розподілу) оцінка точності параметрів найбільш досліджена.

Способи побудови довірчих інтервалів

I спосіб. Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом з відомим середнім квадратичним відхиленням σ. Тоді з надійністю (γ можна стверджувати, що інтервал ($m_x' - t\sigma/\sqrt{n}$; $m_x' + t\sigma/\sqrt{n}$) покриває невідомий параметр m_x, тобто:

$$p(m_x' - t\sigma/\sqrt{n} \leq m_x \leq m_x') + t\sigma/\sqrt{n} = \gamma, \qquad (1.6.13)$$

причому точністю оцінки m_x' слугує величина:

$$\delta = t\sigma/\sqrt{n}\,. \qquad (1.6.14)$$

Довірча імовірність γ (надійність) вибирається достатньо точно і може бути представлена через функцію Лапласа (додаток Л):

$$\gamma = 2\Phi(t), \qquad (1.6.15)$$

де t – аргумент функції Лапласа.

Таким чином, інтервал I_γ = ($m_x' - t\sigma/\sqrt{n}$; $m_x' + t\sigma/\sqrt{n}$) є довірчим інтервалом для невідомого математичного сподівання m_x випадкової величини X, що розподілена за нормальним законом.

II спосіб. Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Побудова довірчого інтервалу, що покриває невідоме середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ, якщо відома незміщена та переконлива оцінка $\hat{s}$.

У даному способі довірчий інтервал можна побудувати за допомогою розподілу χ^2 зі ступенем довільності $r=k-c$. Тоді з імовірністю:

$$p(n\hat{s}^2/\chi^2_2 < \sigma^2 < n\hat{s}^2/\chi^2_1) = \gamma, \qquad (1.6.16)$$

де інтервал ($n\hat{s}^2/\chi^2_2; n\hat{s}^2/\chi^2_1$) покриває невідоме значення σ^2. Таким чином, довірчим інтервалом для невідомого середнього квадратичного відхилення σ є інтервал I_γ = ($n\hat{s}^2/\chi^2_1; n\hat{s}^2/\chi^2_2$).

Питання для самоконтролю:

1. Що є предметом математичної статистики?

2. Вкажіть основні задачі математичної статистики.

3. Що називається статистичною, генеральною та вибірковою сукупність, об’ємом цих сукупностей?

4. Що називається простою випадковою вибіркою? Як здійснюється проста випадкова вибірка за допомогою випадкових чисел?

5. Що називається незгрупованим і згрупованим розподілом частоти вибірки?

6. Що називається згрупованим розподілом накопиченої частоти вибірки?

7. Як визначають гістограми та полігон частот для згрупованих даних вибірки? Який зміст із точки зору теорії ймовірностей мають гістограма та полігон частот для згрупованих даних вибірки?

8. Як визначають та позначають емпіричну функцію розподілу? Які основні властивості цієї функції?

9. Як ширина інтервалів згрупованих даних вибірки впливає на якість гістограм? Якими є рекомендації до вибору кількості інтервалів?

10. Розкрийте числові характеристики вибірки та формули, за якими їх обчислюють.

11. Що називається вибірковим середнім квадратичним відхиленням (стандартом)?

12. Охарактеризуйте статистичні (варіаційні) ряди та їх характеристики.

13. Охарактеризуйте статистичні оцінки параметрів розподілу.

14. Розкрийте значення розподілу χ^2 (критерій Пірсона).

15. Розкрийте значення критерію Колмогорова.

16. Дайте оцінку параметрів розподілу за малими вибірками.

17. Розкрийте поняття довірчого інтервалу.

18. Розкрийте поняття статистичної гіпотези.

19. Опишіть задачу вирівнювання статистичного ряду.

20. Назвіть основи кореляційного аналізу.

21. Що таке лінійна регресія?

Рекомендована література: 8; 17; 20; 22; 26; 28; 29.

1.7. Загальні поняття про параметричний метод врівноваження

Для визначення величин $X_1, X_2, \dots, X_k$ виміряні величини $L_1, L_2, \dots, L_n$, $n > k$, отримані результати вимірів $l_1, l_2, \dots, l_n$ (з вагою $p_1, p_2, \dots, p_n$).

де $к$ – кількість невідомих (шуканих) величин, що дорівнює кількості необхідних вимірів;

n – кількість виміряних величин (кількість вимірів);

$r = n - k$ – кількість надлишкових вимірів.

Результати вимірів через неминучі похибки вимірів не погоджені, вони не задовольняють умови, що виникли в мережі, тому виникає необхідність перейти до врівноважених результатів вимірів:

$$\bar{l}_i = l_i + v_i \ . \tag{1.7.1}$$

Під час врівноваження вимірів із застосуванням методу найменших квадратів параметричним способом, вибирають параметри T_j. Їх кількість повинна дорівнювати k – кількості необхідних вимірів. Параметри повинні бути алгебраїчно незалежними та всі виміряні величини L_i необхідно виразити, як їхні функції:

$$L_i = \psi_i(T_1, T_2, \dots, T_k)\,. \tag{1.7.2}$$

Рівняння (1.7.2) називають вихідними параметричними рівняннями зв’язку, їх повинні задовольняти врівноважені результати вимірів $\bar{l}_i$ та врівноважені значення параметрів t_j, тобто:

$$\bar{l}_i = \psi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)\,. \tag{1.7.2a}$$

Рівняння (1.7.2а) також називають вихідними параметричними рівняннями зв’язку.

Врівноважені значення параметрів t_j представляють, як суму наближеного значення t_j^0 та поправки зі врівноваження τ_j:

$$t_j = t_j^0 + \tau_j \ . \tag{1.7.3}$$

Рівняння (1.7.2а) приводять до лінійного вигляду та переходять до параметричних рівнянь поправок:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \cdots + a_{ik} + a_{i0}\,. \qquad (1.7.4)$$

У рівнянні (1.7.4) коефіцієнти a_{ij} – часткові похідні функцій ψ_i за кожним аргументом t_j обчислюють за наближеними значеннями параметрів:

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}\right)_0, \; i = 1,2, \ldots, n\,;\, j = 1, 2, \ldots, k\,. \qquad (1.7.5)$$

Вільний член a_{i0} дорівнює різниці значення параметричного рівняння зв'язку, обчисленого за наближеними параметрами, та результата виміру l_i, тобто:

$$a_{i0} = \psi_i(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) - l_i = \psi_i^0 - l_i\,. \qquad (1.7.6)$$

Для укладання параметричних рівнянь поправок для реальних геодезичних побудов:

1) за параметри, зазвичай, вибирають шукані величини X_j;

2) точність визначення наближених значень параметрів повинна бути така, щоб під час переходу від параметричних рівнянь зв'язку (1.7.2а) до параметричних рівнянь поправок (1.7.4) можна було б обмежитись першими, лінійними членами розкладу до ряду Тейлора за ступенями поправок τ_j. Тому наближені значення параметрів t_j^0 обчислюють від вихідних пунктів за найбільш короткими “ходовими лініями”;

3) необхідно враховувати, що за розкладання функції в ряд Тейлора приріст кутових величин виражають у радіанах;

4) під час врівноваження геодезичних мереж для виміряних величин та параметрів, як правило, використовують позначення, які прийняті для відповідних величин у геодезії, наприклад, *x, y* – для координат, β – для кутів тощо. Поправки в цьому випадку часто позначають тим же символом, але з додаванням символу δ, наприклад, $\delta\beta$ – поправки до кута, δs – поправки до сторони, δx, δy – поправки до координат.

У плановій мережі виміряні дирекційні кути та довжини сторін. Задані наближені координати $(x_П^0, y_П^0)$ початкового та $(x_К^0, y_К^0)$ кінцевого пунктів сторони, результати вимірів дирекційного кута $\alpha_{ПК}$ і довжини сторони $s_{ПК}$.

Потрібно укласти параметричні рівняння поправок для дирекційного кута та довжини сторони. За параметри прийняти координати шуканих пунктів мережі.

Прийняті позначення:

1) врівноважені координати початкового П та кінцевого К пунктів дорівнюють:

$$x_П = x_П^0 + \delta x_П \quad , \quad y_П = y_П^0 + \delta y_П ,$$

$$x_К = x_К^0 + \delta x_К \quad , \quad y_К = y_К^0 + \delta y_К ;$$

2) врівноважені результати вимірів дорівнюють:

$$\overline{\alpha}_{ПК} = \alpha_{ПК} + \delta\alpha_{ПК} ,$$

$$\overline{s}_{ПК} = s_{ПК} + \delta s_{ПК} .$$

Складання параметричного рівняння поправок для сторони

Вихідне параметричне рівняння зв’язку (1.7.2а) має вигляд:

$$\overline{s}_{НК} = \sqrt{\left(x_К - x_П\right)^2 + \left(y_К - y_П\right)^2} . \tag{1.7.7}$$

У параметричне рівняння зв’язку входять тільки координати початкового та кінцевого пунктів сторони, тому в ньому не нульовими будуть тільки коефіцієнти для поправок до координат початкового та кінцевого пунктів:

$$\delta s_{ПК} = \left(\frac{\partial s_{ПК}}{\partial x_П}\right)_0 \delta x_П + \left(\frac{\partial s_{ПК}}{\partial y_П}\right)_0 \delta y_П + \left(\frac{\partial s_{ПК}}{\partial x_К}\right)_0 \delta x_К + \left(\frac{\partial s_{ПК}}{\partial y_К}\right)_0 \delta y_К + s_{ПК}^0 - s_{ПК} . \tag{1.7.8}$$

Часткові похідні за параметрами, що входять до рівняння (1.7.8), дорівнюють:

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_П}\right)_0 = -\cos\alpha_{ПК}^0 \quad , \qquad \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_К}\right)_0 = +\cos\alpha_{ПК}^0 ,$$

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial y_Н}\right)_0 = -\sin\alpha_{ПК}^0 \ , \qquad \left(\frac{\partial s_i}{\partial y_К}\right)_0 = +\sin\alpha_{ПК}^0 .$$

Часткові похідні за рештою параметрів дорівнюють нулеві.

Наближене значення сторони дорівнює:

$$s_{ПК}^{0} = \sqrt{\left(x_{К}^{0} - x_{П}^{0}\right)^{2} + \left(y_{К}^{0} - y_{П}^{0}\right)^{2}} \ . \qquad (1.7.9)$$

Тоді, параметричне рівняння поправок для сторони набуде вигляду:

$$\delta s_{ПК} = -\cos\alpha_{ПК}^{0}\delta x_{П} - \sin\alpha_{ПК}^{0}\delta y_{П} + \cos\alpha_{ПК}^{0}\delta x_{К} + \sin\alpha_{ПК}^{0}\delta y_{К} + s_{ПК}^{0} - s_{ПК} \, . \qquad (1.7.10)$$

Якщо поправки у рівнянні (1.7.10) виразити у сантиметрах, то необхідно виразити у сантиметрах вільний член ($s_{НП}^{0} - s_{ПК}$).

Параметричних рівнянь поправок виду (1.7.10) в мережі стільки, скільки виміряно сторін.

Складання параметричного рівняння зв'язку та параметричного рівняння поправок для дирекційного кута

Вихідне параметричне рівняння зв'язку має вигляд:

$$\overline{\alpha}_{ПК} = arctg\frac{y_{К} - y_{П}}{x_{К} - x_{П}} \ . \qquad (1.7.11)$$

У параметричне рівняння зв'язку входять тільки координати початкового та кінцевого пунктів сторони, тому в параметричному рівнянні поправок ненульовими будуть тільки коефіцієнти при поправках до координат початкового та кінцевого пунктів:

$$\delta\alpha_{ПК} = \left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial x_{П}}\right)_{0}\delta x_{П} + \left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial y_{П}}\right)_{0}\delta y_{П} + \left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial x_{К}}\right)_{0}\delta x_{К} + \left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial y_{К}}\right)_{0}\delta y_{К} + \alpha_{ПК}^{0} - \alpha_{ПК} \, . \qquad (1.7.12)$$

Часткові похідні за параметрами, що входять до рівняння (1.7.12), дорівнюють:

$$\left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial x_{П}}\right)_{0} = +\frac{\sin\alpha_{ПК}^{0}}{s_{ПК}^{0}} \ , \qquad \left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial x_{К}}\right)_{0} = -\frac{\sin\alpha_{ПК}^{0}}{s_{ПК}^{0}} \ ,$$

$$\left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial y_{П}}\right)_{0} = -\frac{\cos\alpha_{ПК}^{0}}{s_{ПК}^{0}} \ , \qquad \left(\frac{\partial\alpha_{ПК}}{\partial y_{К}}\right)_{0} = +\frac{\cos\alpha_{ПК}^{0}}{s_{ПК}^{0}} \, .$$

Часткові похідні за всією рештою параметрів дорівнюють нулеві.

Наближене значення дирекційного кута дорівнює:

$$\alpha^0_{ПК} = arctg\frac{y^0_К - y^0_П}{x^0_К - x^0_П}. \qquad (1.7.13)$$

Відповідно, параметричне рівняння поправок для дирекційного кута має вигляд:

$$\delta\alpha_{ПК} = \frac{\sin\alpha^0_{ПК}}{s^0_{ПК}}\delta x_П - \frac{\cos\alpha^0_{ПК}}{s^0_{ПК}}\delta y_П - \frac{\sin\alpha^0_{ПК}}{s^0_{ПК}}\delta x_К + \frac{\cos\alpha^0_{ПК}}{s^0_{ПК}}\delta y_К + \alpha^0_{ПК} - \alpha_{ПК}. \qquad (1.7.14)$$

У рівнянні (1.7.14) кутові поправки та вільний член представлені у радіанах, поправки до координат – у тій же мірі, що і наближені координати, довжини ліній, як правило, в метрах.

Для відображення кутової величини в секундах, рівняння (1.7.14) множимо на ρ''=206265″ для того, щоб виразити поправки до координат у сантиметрах, а члени, що враховують поправки до координат, множимо та ділимо на 100.

Введемо позначення:

$$(S) = 2062{,}65\frac{\sin\alpha}{s}\ , \qquad (C) = 2062{,}65\frac{\cos\alpha}{s}. \qquad (1.7.15)$$

Тоді параметричне рівняння поправок до дирекційного кута буде мати вигляд:

$$\delta\alpha''_{ПК} = (S)_{ПК}\delta x_П - (C)_{ПК}\delta y_П - (S)_{ПК}\delta x_К + (C)_{ПК}\delta y_К + (\alpha^0_{ПК} - \alpha_{ПК})''. \qquad (1.7.16)$$

Вільний член $(\alpha^0_{ПК} - \alpha_{ПК})''$ у (1.7.16) повинен бути відображений у секундах. Поправки до координат будуть виражені в сантиметрах. Параметричних рівнянь поправок вигляду (1.7.16) в мережі стільки, скільки виміряно дирекційних кутів.

Складання параметричних рівнянь поправок для перевищень. У нівелірних мережах врівноважене перевищення дорівнює різниці врівноважених висот кінцевого та початкового реперів $\bar{h}_i = \bar{H}_{кін} - \bar{H}_{поч} s$.

Використавши за параметри висоти шуканих реперів, отримаємо вихідне параметричне рівняння виду (1.7.2а):

$$\bar{h}_i = t_{кін} - t_{поч}. \qquad (1.7.17)$$

Врівноважені значення перевищень та параметрів відповідно до рівнянь (1.7.1) та (1.7.3) дорівнюють:

$$\bar{h}_i = h_i + v_i\,, \qquad t_j = t_j^0 + \tau_j\,. \tag{1.7.18}$$

Тому параметричні рівняння поправок у нівелірних мережах мають вигляд:

$$v_i = \tau_{кін} - \tau_{поч} + (t_{кін}^0 - t_{поч}^0) - h_i\,, \tag{1.7.19}$$

або:

$$v_i = \tau_{кін} - \tau_{поч} + a_{i0}\,, \tag{1.7.20}$$

де вільний член a_{i0} відповідно до рівняння (1.7.6) дорівнює:

$$a_{i0} = h_i^0 - h_i = (t_{кін}^0 - t_{поч}^0) - h_i\,. \tag{1.7.21}$$

Питання для самоконтролю:

1. Розкрийте суть задачі врівноваження декількох виміряних величин.
2. Визначте основи параметричного методу врівноваження.
3. Опишіть складання параметричних рівнянь поправок (постановка задачі, перелік формул та визначень).
4. Опишіть складання параметричного рівняння зв’язку та параметричного рівняння поправок для виміряного дирекційного кута.
5. Опишіть складання параметричного рівняння поправок для виміряної сторони.
6. Опишіть складання параметричного рівняння поправок для перевищень.

Рекомендована література: 11; 19; 20; 23; 24.

1.8. Основи корелатного методу врівноваження

Задача сумісного врівноваження вимірів декількох величин за способом найменших квадратів ($[pvv]$ = min) у математичному сенсі є задачею на умовний екстремум. Необхідно знайти мінімум функції $[pvv]$, якщо змінні цієї функції v, зв'язані умовами $\varphi_j(x_1+v_1; x_2+v_2; \ldots x_n+v_n) = 0$. Така задача може бути розв'язана двома способами.

Перший спосіб полягає у відшукуванні абсолютного екстремуму функції $[pvv]$. Під час цього всі виміряні величини записують у вигляді функцій деяких незалежних невідомих величин (параметрів). Тому цей метод назвали *параметричним* або методом необхідних невідомих.

Другий спосіб полягає у відшукуванні умовного екстремуму функції $[pvv]$ за методом Лагранжа, який передбачає використання неозначних множників (у геодезії вони називаються корелатами). Тому цей метод назвали *корелатним* або методом умов.

Обидва методи еквівалентні та представляють собою різні способи розв'язання задачі врівноваження. Застосування принципу $[pvv] = \min$ та відшукування мінімуму цієї функції приводить до системи лінійних рівнянь, в якій вже існують невизначеності (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих параметрів або корелат). Зазначені невідомі дозволяють отримати поправки до результатів вимірів та врівноважені їх значення.

Ідея корелатного способу полягає в знаходженні поправок до виміряних величин через допоміжні невизначені множники, які називають корелатами. Сутність зрівнювання корелатним способом полягає в тому, що задачу знаходження мінімуму функції рівняння розкладеного в ряд Тейлора вирішують способом Лагранжа з визначенням корелат, у результаті чого отримують корелатні рівняння поправок (вектори поправок). Перетворивши рівняння поправок, отримують нормальні рівняння корелат, через які знаходять вірогідніші значення поправок.

Будемо вважати, що рівноточно виміряні n величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, пов'язаних незалежними математичними умовами відображено:

$$\varphi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0;$$

$$\varphi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0;$$

$$\ldots$$

$$\varphi_r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \tag{1.8.1}$$

де X_i, i = 1, n – істинні значення виміряних величин.

Загальна кількість таких умов дорівнює кількості надлишкових вимірів. Внаслідок неминучих похибок результати рівноточних вимірів $l_1, l_2, \ldots, l_n$ не будуть точно задовольняти умовам (1.8.1). У результаті в правій частині системи рівнянь (1.8.1) справедливо записати деяку величину, що відрізняється від нуля. Такі величини прийнято називати нев'язками, тобто:

$$\varphi_1(l_1, l_2, \ldots, l_n) = W_1;$$
$$\varphi_2(l_1, l_2, \ldots, l_n) = W_2;$$
$$\ldots$$
$$\varphi_r(l_1, l_2, \ldots, l_n) = W_r, \tag{1.8.2}$$

Сутність задачі полягає в тому, щоб знайти такі поправки $V_1, V_2, \ldots, V_n$ до виміряних величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$, які забезпечували б виконання умов (1.8.1), а саме:

$$\varphi_1(l_1 + V_1, l_2 + V_2, \ldots, l_n + V_n) = 0;$$
$$\varphi_2(l_1 + V_1, l_2 + V_2, \ldots, l_n + V_n) = 0;$$
$$\ldots$$
$$\varphi_r(l_1 + V_1, l_2 + V_2, \ldots, l_n + V_n) = 0, \tag{1.8.3}$$

Так, як кількість невідомих в отриманій системі умовних рівнянь більша за кількість рівнянь, $n > r$, то вона не має однозначного розв'язання і є невизначеною.

Для того, щоб знайти поправки V_i, i = 1, n, що найкращим чином зрівнювали б виміряні величини, скористаємося вже відомим методом найменших квадратів $[V^2] = \min$.

Для цього необхідно привести умовні рівняння до лінійного вигляду, розклавши при цьому рівняння (1.8.3) в ряд Тейлора і обмежуючись при цьому першими членами ступеневого ряду, що мають степінь одиницю, отримаємо:

$$\varphi_1(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\delta\varphi_1}{\delta l_1}V_1 + \frac{\delta\varphi_1}{\delta l_2}V_2 + \ldots + \frac{\delta\varphi_1}{\delta l_n}V_n = 0;$$

$$\varphi_2 (l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\delta\varphi_2}{\delta l_1} V_1 + \frac{\delta\varphi_2}{\delta l_2} V_2 + \dots + \frac{\delta\varphi_2}{\delta l_n} V_n = 0;$$

$$\dots$$

$$\varphi_r (l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\delta\varphi_r}{\delta l_1} V_1 + \frac{\delta\varphi_r}{\delta l_2} V_2 + \dots + \frac{\delta\varphi_r}{\delta l_n} V_n = 0, \qquad (1.8.4)$$

Введемо позначення так само, як при постановці задачі зрівнювання поправок параметричним способом, що матиме вигляд:

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta l_1} = a_1, \frac{\delta\varphi_2}{\delta l_2} = b_i, \dots, \frac{\delta\varphi_r}{\delta l_n} = r_i, I = 1, n \qquad (1.8.5)$$

З урахуванням введених позначень (1.8.5), а також нев’язок, що є складовими перших частин системи рівнянь (1.8.2) представимо умовні рівняння в лінійному вигляді:

$$a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_nV_n + W_1 = 0;$$

$$b_1V_1 + b_2V_2 + \dots + b_nV_n + W_2 = 0;$$

$$\dots$$

$$r_1V_1 + r_2V_2 + \dots + r_nV_n + W_r = 0, \qquad (1.8.6)$$

Або в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \end{pmatrix} = \mathrm{B} \times \mathrm{V} + \mathrm{W} = 0, \qquad (1.8.7)$$

Таким чином, сформульована задача зрівнювання виміряних величин, пов’язаних умовами методом найменших квадратів, а також показаний шлях перетворення рівнянь до лінійного вигляду і представлення їх в матричному вигляді.

Питання для самоконтролю:

1. Опишіть принцип способу найменших квадратів.
2. Розкрийте основні методи врівноваження геодезичних мереж.
3. Охарактеризуйте основи параметричного методу врівноваження.
4. Назвіть параметри і рівняння поправок.
5. Розкрийте види параметричних рівнянь поправок у геодезичних мережах.

6. Охарактеризуйте складання параметричного рівняння поправок для перевищень.

7. Приведіть рівняння поправок до лінійного вигляду.

8. Опишіть нормальні рівняння в параметричному методі врівноваження.

9. Які є контрольні співвідношення при обчисленні коефіцієнтів нормальних рівнянь?

10. Розкрийте матричний запис нормальних рівнянь поправок.

11. Як обчислити коефіцієнти нормальних рівнянь?

12. Назвіть методи розв'язання системи нормальних рівнянь.

13. Опишіть обчислення суми [ ] у параметричному методі.

14. Як виконати контроль під час розв'язання нормальних рівнянь?

15. Опишіть схему Гауса-Дулітля.

16. Яким способом відбуваються перетворення нерівноточних вимірів у рівноточні?

17. Розкрийте оцінку точності результатів врівноваження параметричним методом.

18. Визначте основи корелатного методу врівноваження.

19. Як виконати приведення початкових умовних рівнянь до лінійного вигляду?

20. Опишіть умовні та корелатні рівняння поправок.

21. Що таке нормальні рівняння? Опишіть порядок обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь.

22. Розкрийте послідовність матричного запису умовних рівнянь поправок.

23. Назвіть види умовних рівнянь поправок у геодезичних мережах.

24. Яким способом визначати допустимі нев'язки в умовних рівняннях поправок?

25. Як виконувати обчислення суми [ ] у корелатному методі врівноваження?

26. Дайте оцінку точності результатів врівноваження корелатним методом.

27. Яким способом можна визначити обернену вагу та середню квадратичну похибку функції врівноважених величин.

28. Опишіть вагові функції для геодезичних мереж.

Рекомендована література: 6; 18; 19; 20; 23; 31; 33.

РОЗДІЛ 2.
ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

2.1. Основні поняття теорії похибок. Розподіл та властивості випадкових похибок

Середнє арифметичне за абсолютними значеннями випадкових похибок називається середньою похибкою, тобто:

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{2.1.1}$$

де $$[|\Delta|] = |\Delta_1| + |\Delta_2| + \ldots + |\Delta_n|. \tag{2.1.2}$$

Вірогідною похибкою називають таке значення випадкової похибки, більше або менше якого за абсолютною величиною похибки є рівно можливими.

Із визначення вірогідної похибки отримуємо спосіб її розв’язку. Якщо всі похибки розмістити в ряд за спаданням або зростанням значень абсолютної величини, то вірогідна похибка буде розміщена в середині цього ряду. Звідси вірогідну похибку часто називають середньою.

Середньою квадратичною похибкою називається величина, яка обчислюється за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \,. \tag{2.1.3}$$

Символ [ ] – гаусова сума, тобто:

$$[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2,$$

де $$Д_i = l_i - X (i = 1,2,3, \ldots, n), \tag{2.1.4}$$

тут Δ_i – істинні похибки, X – істинне (точне) значення виміряної величини l_i – результати вимірювань однієї тієї ж величини.

Зазвичай середній квадратичній похибці надається перевага над середньою і вірогідною з наступних причин:

- на величину середньої квадратичної похибки більший має вплив великих за абсолютним значенням похибка;

- середня квадратична похибка є стійкою, тобто вона достатньо надійно визначається за невеликої кількості n.

Надійність середньої квадратичної похибки характеризується середньою квадратичною похибкою самої середньої квадратичної похибки, отриманої із експерименту, яка обчислюється за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{2.1.5}$$

Коли $n=8$, тоді:

$$m_m = \frac{1}{4}m.$$

Виходячи з цього, на практиці, для достатньо надійного визначення m, прийнято, що $n \geq 8$.

Для теоретичних розрахунків використовують формулу:

$$\Delta_{гран} \leq 3m. \tag{2.1.6}$$

На практиці, враховуючи обмежену кількість вимірювань, застосовують:

$$\Delta_{гран} \leq 2m. \tag{2.1.7}$$

За нормального розподілу похибок вимірювань існують зв’язки:

$$\Theta = \frac{4}{5}m; \qquad r = \frac{2}{3}m. \tag{2.1.8}$$

Задача 2.1

Під час використання тахеометра отримано 36 значень вертикального кута β_i, записаного в табл. 1.1. Точне значення кута β_0 обчислено на основі одержаних вимірів.

Таблиця 1.1

$\beta_0 = 573{,}''23$

№ п/п	Кути, β_i''	Істинні похибки, $\Delta_i'' = \beta_i - \beta_0$	Δ_i^2	№ п/п	Кути, β_i''	Істинні похибки, $\Delta_i'' = \beta_i - \beta_0$	Δ_i^2
1	573,5	0,27	0,0729	19	573,7	0,47	0,2209
2	573,2	-0,03	0,0009	20	573	-0,23	0,0529
3	573,1	-0,13	0,0169	21	573,1	-0,13	0,0169
4	572,7	-0,53	0,2809	22	572,9	-0,33	0,1089
5	573,6	0,37	0,1369	23	573,3	0,07	0,0049
6	573	-0,23	0,0529	24	573,2	-0,03	0,0009
7	572,8	-0,43	0,1849	25	573	-0,23	0,0529
8	573,4	0,17	0,0289	26	573,3	0,07	0,0049
9	573,2	-0,03	0,0009	27	573,6	0,37	0,1369
10	574,4	1,17	1,3689	28	574	0,77	0,5929
11	572,8	-0,43	0,1849	29	572,7	-0,53	0,2809
12	573,5	0,27	0,0729	30	572,8	-0,43	0,1849
13	572,5	-0,73	0,5329	31	573,4	0,17	0,0289
14	573,2	-0,03	0,0009	32	574,4	1,17	1,3689
15	573,1	-0,13	0,0169	33	572,8	-0,43	0,1849
16	574,1	0,87	0,7569	34	572,8	-0,43	0,1849
17	572,7	-0,53	0,2809	35	572,6	-0,63	0,3969
18	573,5	0,27	0,0729	36	573	-0,23	0,0529
					$\sum$	6,48	
						-6,86	
						13,34	7,9404

За даними табл. 1.1 обчислити:

1) істинні похибки Δ_i

2) середню квадратичну похибку $m = \sqrt{\dfrac{[\Delta^2]}{n}}$;

з оцінкою її надійності $m_m = \dfrac{m}{\sqrt{2n}}$;

3) середню і вірогідну похибки θ і r (див. табл. 2.2.);

4) теоретичне k_0 і дійсне g число похибок в інтервалах через $\pm 0{,}5m$ від $-\Delta = -3{,}0\,m$ до $+\Delta = +3{,}0\,m$; обчислити різницю $g - k_0$;

5) коефіцієнти $k_1 = \frac{m}{\theta}$, $k_2 = \frac{m}{r}$ і порівняти їх із теоретичними (1,25 і 1,48 відповідно);

6) ординати за по таблицями (дод. Б) для $+\Delta$ і - Δ через $\pm 0{,}5m$.

Розв'язок

1) істинні похибки обчислені в табл. 2.1 (колонки 3,7);

2) $m = \sqrt{\frac{7{,}9404}{36}} = \pm 0{,}47$; $m_m = \frac{0{,}47}{\sqrt{2*36}} = \pm 0{,}055$;

3) $\theta = \frac{13{,}34}{36} = \pm 0{,}37$.

Для визначення вірогідної похибки розміщуємо істинні похибки у ряд за зростанням абсолютної величини.

Таблиця 2.2

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Δ_i''	0,03	0,03	0,03	0,03	0,07	0,07	0,13	0,13	0,13	0,17	0,17	0,23
№ п/п	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Δ_i''	0,23	0,23	0,23	0,27	0,27	0,27	0,33	0,37	0,37	0,43	0,43	0,43
№ п/п	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Δ_i''	0,43	0,43	0,47	0,53	0,53	0,53	0,63	0,73	0,77	0,87	1,17	1,17

В середині ряду отримуємо:

№ 18 = +0'',27 № 19 = +0'',33.

Звідси маємо $r = \pm 0'',30$.

4) Визначення теоретичного числа похибок k_0

$n = 36$, $m = \pm 0,''47$

Таблиця 2.3

№ п/п	Інтервал Δ_i у загальному вигляді	Інтервал Δ_i в сек.	Аргумент $t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$p_i = \Phi(t_i)$	$p_i - p_{i-1}$	$k_0 = n \times (p_i - p_{i-1})$
1	0,5m	0,24	0,5	0,383	0,383	14
2	1,0m	0,47	1	0,683	0,3	11
3	1,5m	0,71	1,5	0,866	0,183	7
4	2,0m	0,94	2	0,955	0,089	3
5	2,5m	1,18	2,5	0,988	0,033	1
6	3,0m	1,41	3	0,997	0,009	0
Контроль					0,997	36

$\Phi(t_i)$ взято з таблиці значень інтеграла ймовірностей (дод. А).

Підрахунок дійсного числа похибок g різниці $g - k_0$.

Таблиця 2.4

№ з/п	Інтервали через $\pm 0{,}5m$ від $-\Delta = -3{,}0m$ до $+\Delta = +3{,}0m$	Кількість похибок		
		g	k_0	$g - k_0$
1	Від 0 до $\pm 0{,}24$	15	14	1
2	$\pm 0{,}25$ до $\pm 0{,}47$	12	11	1
3	$\pm 0{,}48$ до $\pm 0{,}71$	4	7	-3
4	$\pm 0{,}72$ до $\pm 0{,}94$	3	3	0
5	$\pm 0{,}95$ до $\pm 1{,}18$	2	1	1
6	$\pm 1{,}19$ до $\pm 1{,}41$	0	0	0
	Більше $\pm 1{,}41$	0	0	0
Контроль		36	36	0

g-визначено безпосередньо за підрахунками даних табл. 2.2.

5) $k_1 = \dfrac{0{,}''47}{0{,}''37} = 1{,}27,$ $\qquad k_2 = \dfrac{0{,}''47}{0{,}''30} = 1{,}56.$

6) Обчислення ординат за таблицею (дод. Б).

Таблиця 2.5

№ п/п	$t_i = \dfrac{\Delta_i}{m}$	$h = \dfrac{1}{m\sqrt{2}}$	y'	$y = y'h$
1	0,5	1,50	0,498	0,75
2	1,0		0,342	0,51
3	1,5		0,183	0,27
4	2,0		0,076	0,11
5	2,5		0,025	0,04
6	3,0		0,006	0,01

Досліджуваний ряд похибок можна рахувати таким, що задовольняє нормальний закон розподілу, так як:

1) жодна похибка ряду не перевищує $3{,}0m$;
2) різниця $g - k_0$ за даної кількості похибок є незначущою;
3) коефіцієнти k_1 і k_2 задовільно збігаються із їх теоретичними значеннями.

Задача 2.2

У яких межах можна з вірогідністю p = 0,954 очікувати похибку Δ, якщо середня похибка $\theta = \pm 8'',00$?

Розв'язок

$m = 1{,}25\theta;$ $m = \pm 8'',00 * 1{,}25 = \pm 10'';$ $\Delta = t * m.$

За $\Phi(t) = p = 0{,}954$ в таблиці (дод. А) знаходимо t = 2.

$-20'' \le \Delta \le +20''$.

Задача 2.3

Визначити середню квадратичну похибку обчислення значення довжини кола s, якщо радіус R = 45,3 мм виміряний із середньою квадратичною похибкою $m_R = 0{,}40$ мм.

Розв'язок

$s = 2\pi R$; $m_s = 2\pi m_R$; $m_s = \pm 6{,}28 * 0{,}40$ мм; $m_s = \pm 2{,}5$ мм.

Задача 2.4

Лінія АВ виміряна по частинах, так як отримано наступні результати:

Таблиця 2.6

№ частин	S_i,м	m_{si} ,см
1	150,13	$\pm 3{,}1$
2	148,14	$\pm 5{,}2$
3	145,96	$\pm 4{,}1$
4	149,01	$\pm 3{,}9$
S_{AB}	593,24	

Обчислити абсолютну і відносну середні квадратичні похибки лінії АВ, отриманої сумуванням чотирьох відрізків.

Розв'язок

$$m_{S_{AB}} = \sqrt{m_{S1}^2 + m_{S2}^2 + m_{S3}^2 + m_{S4}^2};$$

$$m_{S_{AB}} = \pm 8{,}3 \text{ см}; \qquad \frac{m_{S_{AB}}}{S_{AB}} = \frac{\pm 8.3}{593 * 10^2} = \frac{1}{7100}.$$

Задача 2.5

Постійна поправка світлодалекоміра обчислюється за формулою: δ_i $=[c_1+c_2+d_{об}(\mu_с-\mu_е)+d_{п.к.}(\mu_с-\mu_е)]$

де c_1 – постійна складова далекоміра, відстань від вертикальної осі далекоміра до площини розміщення комірок Керра;

c_2 – постійна складова відбивача, відстань від вертикальної осі до площини дзеркала, від якого відбивається світло;

$d_{об}$ – сумарна товщина скла об'єктивів далекоміра і відбивача;

$d_{п.к.}$ – загальна товщина поляроїдів і комірок Керра з нітробензолом;

$\mu_с$, $\mu_е$ – постійні коефіцієнти заломлення скла і повітря відповідно ($\mu_с$ =1,65, $\mu_е$ =1,00).

Дано c_1 = 168 мм; c_2 = 189 мм; $d_{об}$ = 55,7 мм; $d_{п.к}$ = 12,0 мм; $mc_1=\pm 2,5$ мм; $mc_2=\pm 1,5$ мм; $md_{об} = \pm 0,5$ мм; $md_{п.к} = \pm 1,0$ мм.

Визначити m_{δ_i}.

Розв'язок

Покажемо формулу δ_i у вигляді де δ_i = - [k_1 c_1 + k_1 c_2 + k_2 $d_{об}$ + k_2 $d_{п.к.}$], де $k_1=+1$; $k_2=+0,65$.

Тоді отримаємо:

$$m_{\delta_i}=\sqrt{2,5^2+1,5^2+(0,6*0,5)^2+(0,6*1)^2};$$

$$m_{\delta_i}=\pm 3,0\,\text{мм};\ \delta_i=\text{- }402\text{ мм}.$$

Задача 2.6

Коефіцієнт ниткового далекоміра k теодоліта визначається на базисі, довжина якого S = 250,00 м, виміряна із середньою квадратичною похибкою $m_S=\pm 0,052$ м.

Із багаторазових вимірів було отримано середній далекомірний відлік $l=249,0$ см, із середньою квадратичною похибкою $m_l=\pm 0,30$ см.

Визначити $k=\dfrac{s}{l}$ (постійна складова далекоміра $c = 0$) і m_k.

Розв’язок

Маємо функцію $k = f(s,l)$, тобто $k = \frac{s}{l}$. Відповідно до формули отримаємо:

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{dk}{ds}\right)^2 m_s^2 + \left(\frac{dk}{dl}\right)^2 m_l^2}.$$

Але:

$$\left(\frac{dk}{ds}\right) = \frac{1}{l}; \quad \left(\frac{dk}{dl}\right) = -\frac{s}{l^2},$$

тоді:

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{249}\right)^2 + \left(\frac{25000}{249^2}0{,}30\right)^2} = \pm 0{,}12. \qquad k = 100{,}40 \pm 0{,}12.$$

Задача 2.7

Визначити перевищення і середню квадратичну похибку перевищення:

$$h' = s * tgv,$$

де $s = 143{,}5$ м (горизонтальна проекція),

$v = +2^\circ 30'$ (кут нахилу),

Якщо $m_s = \pm 0{,}5$ м, $m_v = \pm 1{,}0\,'$.

Задача 2.8

Знайти вираз для середньої квадратичної похибки функції, якщо відомі середні квадратичні похибки аргументів. Варіанти функцій подано в дод. В.

2.2. Обробка результатів рівноточних вимірів

Задача 2.9

Тахеометром (кількість прийомів n = 8) було проведено кутові виміри. За результатами даних вимірів знайти остаточне (надійне) значення кута, середні квадратичні похибки одного виміру, арифметичної середини та провести необхідні контрольні обчислення. Потрібно виконати математичну обробку багаторазових вимірів кута 38º 17´ + секунди (дод. Г.

Обчислення виконуємо в такому порядку:

1. Виконуємо обрахунки в табл. 2.7.

Записуємо наближене значення l_o, як найменше із вимірів кута L.

Обчислюємо L_o за формулою (1.2.4); $\varepsilon_i = l_i - l_o$, δ_i за формулою (1.2.5); δ^2, $\delta\varepsilon$, ε^2 (колонки 5, 6, 7), знаходимо $[\varepsilon]$, $[\delta]$, $[\delta^2]$, $[\delta\varepsilon]$, $[\varepsilon^2]$.

$[\varepsilon]/n = 2{,}5/8 = 0{,}3125$ $\alpha = 0{,}0025$.

Таблиця 2.7

Обробка результатів вимірювання кута

п/п	L	ε	δ	δ²	δε	ε²
1	37º28´09,7´´	1,0	0,69	0,473	0,688	1,00
2	08,8	0,1	-0,21	0,045	-0,021	0,01
3	08,8	0,1	-0,21	0,045	-0,021	0,01
4	09,2	0,5	0,19	0,035	0,094	0,25
5	08,7	0,0	-0,31	0,098	0,000	0,00
6	09,2	0,5	0,19	0,035	0,094	0,25
7	08,9	0,2	-0,11	0,013	-0,022	0,04
8	08,8	0,1	-0,21	0,045	-0,021	0,01
l_o $[\varepsilon]/n$ L_o	37º28´08,7´´ 00,31 37º28´09,01´´	Σ 2,5	1,07 -1,05 0,02	0,789	0,876 -0,085 0,791	1,57

2. Контрольні співвідношення:

$[\delta] = n\alpha = 8\,(0'',0025) = 0{,}02''$

$[\delta\delta] = 0{,}789''$

$[\delta\varepsilon] = 0{,}791''$

$[\delta^2] = [\varepsilon^2] - [\varepsilon]^2/n = 1{,}57 - 6{,}25/8 = 1{,}57 - 0{,}78 = 0{,}79''$

Контроль задовольняється тільки наближено внаслідок помилки заокруглення α.

3. Середня квадратична похибка одного виміру:

$m = \pm\sqrt{([\delta^2]/(n\text{-}1))} = \pm\sqrt{0{,}789/7} = \pm 0{,}34''$ (формула Бесселя).

4. Контроль за формулою Петерса:

$m = \pm\, 1{,}253\, [|\delta|]/(n\text{-}0{,}5) = \pm\, 1{,}253(\,2{,}12/7{,}5) = 0{,}35''$.

5. Середня квадратична похибка середньої квадратичної похибки:

$m_m = \pm\, m/\sqrt{2(n-1)} = \pm\, 0{,}09''$

6. Середня квадратична похибка середнього арифметичного:

M = ± $m/\sqrt{n}$ = ± 0,12′′

7. Кінцевий результат обробки:

L_o = 37º28′09,01′′± 0,12′′.

Задача 2.10

У полігонометричній сітці кути виміряли 30′′ теодолітом методом повторень. Значення чотирикратних кутів «коло ліво» і «коло право» наведено в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

№ кутів	Р-кратний кут		*d*, ′′	Δ*d*, ′′	Δd^2
	КЛ	КР			
1	719º54′30′′	54′15′′	-15	-13,5	182,25
2	628 23 45	23 30	-15	-13,5	182,25
3	752 07 30	07 15	-15	-13,5	182,25
4	721 16 00	16 15	+15	+16,5	272,25
5	693 38 15	38 15	00	+1,5	2,25
6	290 47 00	46 45	-15	-13,5	182,25
7	446 11 15	11 00	-15	-13,5	182,25
8	703 03 45	04 00	+15	+ 16,5	272,25
9	654 57 00	56 30	-30	-28,5	812,25
10	811 29 00	29 15	+15	+16,5	272,25
11	396 52 45	53 00	+15	+16,5	272,25
12	417 02 30	03 00	+30	+31,5	992,25
13	653 06 30	06 00	-30	-28,5	812,25
14	447 38 45	38 45	00	+1,5	2,25
15	406 51 15	51 30	+15	+16,5	272,25
16	892 21 00	20 45	-15	-13,5	182,25
17	876 54 30	54 00	-30	-28,5	812,25
18	667 58 15	58 00	-15	-13,5	182,25
19	786 21 30	21 45	+15	+16,5	272,25
20	357 02 15	02 30	+15	+16,5	272,25
21	296 38 00	38 15	+15	+16,5	272,25
22	727 33 45	33 15	-30	-28,5	812,25
23	411 00 00	00 30	+30	+31,5	992,25
24	741 05 15	05 08	-07	-5,5	30,25
25	704 02 45	03 00	+15	+16,5	272,25
			+195 -232	214,5 -214,0	
Σ	-	-	-37	+0,5	8994,25

Але $[d]$ не дорівнює нулю. Тому знаходимо величину систематичного впливу, що припадає на один чотириразовий кут:

$$\Sigma=-37/25=-1'',48.$$

Виправляємо різниці і знаходимо середню квадратичну похибку одного чотириразового кута:

$$m_{\text{p}} = \pm \sqrt{([\Delta d^2]/2(n-1))} = \pm 13'',7.$$

Середня квадратична похибка одного виміру одноразового кута дорівнює:

$$m_1 = \pm m_{\text{p}} / p = \pm 3'',42 ,$$

де p – кількість повторень.

Через те, що за остаточне значення кожного кута приймається середнє арифметичне згідно з результатами вимірів для «коло ліво» і «коло право», то середня квадратична похибка одного остаточного значення кута буде дорівнювати:

$$m = \pm m_1 / \sqrt{2} = \pm 2'',4.$$

Цей результат можна було одержати зразу за формулою:

$$m = \pm 1/(2p) \sqrt{([\Delta d^2]/(n-1))} = \pm 2'',4 .$$

Задача 2.11

Виконати математичну обробку подвійних вимірів довжин ліній (дод. Д).

2.3. Обробка результатів нерівноточних вимірів

Задача 2.12

Для визначення висоти вузлової точки А від п'яти реперів були прокладені нівелірні ходи. Знайдені висоти точки за кожним з ходів U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 разом з їх середніми квадратичними похибками показано в таблиці 2.9 (колонки 1,2). Потрібно знайти найімовірніше значення висоти точки А і її середню квадратичну похибку.

Таблиця 2.9

№ ходів	Висоти U, м	m, мм	m^2	$p=\dfrac{10}{m^2}$	ε, мм	pε, мм	$p\varepsilon^2$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	82,558	2,8	7,84	1,28	8	10,20	81,63	3,9	4,97	19,40
2	82,550	3,3	10,89	0,92	0	0,00	0,00	-4,1	-3,76	15,44
3	82,554	2	4,00	2,50	4	10,00	40,00	-0,1	-0,25	0,03
4	82,556	4,1	16,81	0,59	6	3,57	21,42	1,9	1,13	2,15
5	82,552	3,1	9,61	1,04	2	2,08	4,16	-2,1	-2,19	4,59
u_0	82,550		49,15	6,33		25,85	147,21		6,10	
$[p\varepsilon]/[p]$	4,1								-6,20	
U_0	82,5541			$[pm^2]$=50					-0,19	41,60

Контроль:

$$\left[p\delta^2\right]=\left[p\varepsilon^2\right]-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}=147{,}21-\frac{668{,}46}{6{,}33}=41{,}6\,.$$

Середня квадратична похибка одиниці ваги:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{41{,}6}{4}}=3{,}2\,;$$

$$\mu=\pm\sqrt{\lambda}=\pm\sqrt{\frac{[pm^2]}{[n]}}=\pm\sqrt{10}=3{,}2\,.$$

Як бачимо, в цьому прикладі μ, обчислено за двома формулами, що є однаковими. Середня квадратична похибка середнього арифметичного за вагами буде становити:

$$\mu_0=\pm\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{3{,}2}{\sqrt{6{,}33}}=1{,}27\,.$$

Отже остаточна висота точки А дорівнює

$$H_A=82{,}5541\pm1.3\text{мм з вагою } P_0=6{,}33.$$

Задача 2.13

Знайти найімовірніше значення висоти точки А, визначеної через прокладання нівелірних ходів від шести реперів і середню квадратичну похибку її визначення. Варіанти індивідуальних завдань для виконання задачі наведено в дод. Е.

Задача 2.14

Вихідні дані: табл. 2.10 (колонки 1-3, 5, 6), зокрема перевищення h_i в метрах та кількість станцій k_i за ходами нівелювання.

Заповнюємо колонки 8 і 9, проводячи розрахунки за відповідними формулами, вказаними в шапці табл. 2.10.

Таблиця 2.10

№ ходу	Вперед			Назад			Різниці			$\sqrt{p_i}$	$d_i \sqrt{p_i}$
	h'_i, м	k'_i	$p'_i = \lambda / k'_i$	h''_i, м	k''_i	$p''_i = \lambda / k''_i$	$d_i = h'_i - h''_i$ мм	$k_i = k'_i + k''_i$	$p_i = \lambda / k_i$		
1	10,2317	17	1,95	10,2329	15	2,21	-1,2	32	1,04	1,02	-1,22
2	15,0001	11	3,02	15,0035	9	3,69	-3,4	20	1,66	1,29	-4,38
3	17,8280	12	2,77	17,8338	10	3,32	-5,8	22	1,51	1,23	-7,13
4	12,9371	8	4,15	12,9414	6	5,53	-4,3	14	2,37	1,54	-6,62
5	10,9815	27	1,23	10,9948	25	1,33	-13,3	52	0,64	0,80	-10,63
6	7,2203	18	1,84	7,2209	16	2,08	-10,6	34	0,98	0,99	-10,47
7	10,4306	19	1,75	10,4442	17	1,95	-13,6	36	0,92	0,96	-13,06
8	11,0091	24	1,38	11,0280	22	1,51	-18,9	46	0,72	0,85	-16,06
9	14,6201	16	2,08	14,6373	14	2,37	-17,2	30	1,11	1,05	-18,09
10	10,4618	24	1,38	10,4679	22	1,51	-6,1	46	0,72	0,85	-5,18
Σ		176			156		-94,4	332	11,67		-92,84

1. Розраховуємо коефіцієнт $\lambda = [k]/10 = 33,2$

2. Вирахуємо вагу в колонках 4, 7 та 10.

3. Заповнюємо колонки 11 та 12, проводячи розрахунки за відповідними формулами, вказаними в шапці табл. 2.10.

4. Перевіримо наявність систематичної похибки, якщо $|[d\sqrt{p}]| > 0,25[|d\sqrt{p}|]$; $|[d\sqrt{p}]| = 92,84$ мм ; $0.25[|d\sqrt{p}|] = 23,21$ мм

92,84>23,21 – в різницях є систематична похибка.

Вирахуємо систематичний вплив двома методами, а саме видалення середнього систематичного впливу та видалення систематичної похибки за кількістю станцій (табл. 2.11).

Таблиця 2.11

№ ходу	d_i, мм	p_i	Видалення середньої залишкової систематичної похибки				Видалення систематичної похибки за кількістю станцій			
			$p_i\, d_i$	d'_i	$p_i\, d'_i$	$p_i\, d'_i\, d'_i$	wk_i	d'_i	$p_i\, d'_i$	$p_i\, d'_i d'_i$
1	-1,2	1,04	-1,25	6,88	7,14	49,17	-9,10	7,90	8,19	64,73
2	-3,4	1,66	-5,64	4,68	7,78	36,42	-5,69	2,29	3,80	8,68
3	-5,8	1,51	-8,75	2,28	3,45	7,87	-6,26	0,49	0,69	0,31
4	-4,3	2,37	-10,20	3,78	8,97	33,95	-3,98	-0,32	-0,76	0,24
5	-13,3	0,64	-8,49	-5.,2	-3,33	17,37	-14,79	1,49	0,95	1,41
6	-10,6	0,98	-10,35	-2,52	-2,46	6,18	-9,67	-0,93	-0,91	0,85
7	-13,6	0,92	-12,54	-5,52	-5,09	28,06	-10,24	-3,36	-3,10	10,44
8	-18,9	0,72	-13,64	-10,82	-7,81	84,43	-13,08	-5,82	-4,20	24,45
	-17,2	1,11	-19,03	-9,12	-10,09	91,97	-8,53	-8,67	-9,59	83,18
10	-6,1	0,72	-4,40	1,98	1,43	2,84	-13,08	6,98	5,04	35,16
Σ	-94,4	11,67	-94,30		-28,77	358,27	-94,40	0,00	-18,57	229,45
					28,77				18,57	
	-0,28		-8,08							

5. Середній залишковий систематичний вплив:

$[pd]/[p]$ = -94,30/11,67=-8,08 ;

$d'_i = d_i - [pd]/[p]$.

Коефіцієнт залишкового систематичного впливу:

$w=[d]/[k]$=-94.40/322=-0,28 мм/станція ;

$d'_i = d_i - wk_i$.

6. Заповнюємо колонки 4-11, проводячи розрахунки за відповідними формулами, вказаними в шапці табл. 2.11.

9. Вирахуємо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою $\mu = \pm\sqrt{([pd'\,d']/(n-1))}$ та середню квадратичну похибку нівелювання на одній станції $m = \pm\,\mu/\sqrt{\lambda}$:

1. методом видалення середньої залишкової систематичної похибки:

$\mu = \pm\sqrt{358{,}27/9} = \pm\,6{,}31$ мм;

$m = \pm\,6{,}31/\sqrt{33{,}2} = \pm\,1{,}09$ мм.

2. методом видалення систематичної похибки за кількістю станцій:

$\mu = \pm\sqrt{229{,}45/9} = \pm\,5{,}05$ мм;

$m = \pm\,5{,}05/\sqrt{33{,}2} = \pm\,0{,}88$ мм.

Задача 2.15

Виконати математичну обробку результатів нівелювання II класу. Варіанти індивідуальних завдань для виконання задачі наведено в дод. Ж.

2.4. Основні поняття теорії ймовірностей

Задача 2.16

Проводиться два вимірювання кута. Описати простір елементарних наслідків. Записати подію, яка полягає в тому, що: 1) подія C: отримано додатну похибку хоча б один раз; 2) подія D: отримано додатну похибку один раз; 3) подія F: отримано від’ємну похибку.

Розв’язок

Позначимо подія A – отримано додатну похибку під час першого вимірювання; подія B – отримано додатну похибку під час другого вимірювання.

Простір елементарних наслідків складається з подій: AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$.

1) якщо отримано додатну похибку хоча б один раз, то це означає, що вона отримана у першому вимірюванні $A\overline{B}$, або у другому $\overline{A}B$, або в обох AB;

2) рівно одна додатна похибка може бути отримана тільки тоді, коли вона отримана під час першого вимірювання, а у другому – ні, або навпаки $D = A\overline{B} \cup \overline{A}B$;

3) якщо отримано від'ємну похибку, то $F = \overline{A}\ \overline{B}$.

Задача 2.17

В урні 9 однакових за розміром куль: 4 білих, 3 чорних, 2 жовтих. Знайдіть ймовірність появи чорної кульки, якщо беруть одну кульку з урни навмання.

Розв'язок

Нехай подія A – навмання взята чорна кулька. З урни можна взяти будь-яку кульку із дев'яти, тому усіх можливих наслідків 9 (n=9). Для появи чорної кульки сприяти будуть лише 3 кулі, тому m=3.

$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Задача 2.18

При 500 обчисленнях довжин ліній виконавцем допущено 3 грубих похибки. Чому дорівнює відносна частота появи грубих похибок обчислення?

Розв'язок

Позначимо через A таку подію, як поява грубої похибки. Тоді за означенням частоти події A одержимо $W(A) = \frac{3}{500} = 0{,}006$.

Задача 2.19

Скільки чотири значних чисел можна записати, використовуючи чотири різні цифри крім нуля?

Розв'язок

Комбінації, що утворюються з чотирьох різних цифр чотири значного числа, можуть відрізнятися лише порядком цифр, тому такі комбінації будуть переставленням з 4 елементів.

$P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$.

Задача 2.20

Студенти третього курсу згідно з навчальним планом вивчають 10 дисциплін. На один день можна планувати заняття з 4 дисциплін. Скільки є способів, за якими можна скласти розклад занять на один день?

Розв’язок

Усі можливі розклади занять на один день – це комбінації з 10 до 4, що можуть відрізнятися дисциплінами або їх порядком розміщення.

A_{10}^{4}= 10·9·8·7=5040.

Задача 2.21

Під час вимірювання кута отримано із 9 похибок 5 від’ємних. Яка ймовірність перших двох похибок додатної та від‘ємної?

Розв’язок

Нехай подія *A* – отримання перших двох похибок додатної та від‘ємної. Всього 9 похибок, з них комбінацій по 2 буде n=C_9^2. Події *A* будуть сприяти комбінації, утворені з пар, елементами яких будуть похибки різних знаків. Згідно з принципом добутку кількість таких пар буде m=$C_4^1\,C_5^1$.

Використовуючи класичне означення імовірності, одержимо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = C_4^1\,C_5^1 / C_9^2 = \frac{3!5!}{3!4!} : \frac{9!}{2!7!} = \frac{4!5!2!7!}{3!4!9!} = \frac{5}{54}.$$

Задача 2.22

Ймовірність влучення стрілком у першу область мішені 0,55, другу 0,30, третю – 0,15. Знайти ймовірність того, що під час одного пострілу стрілок влучить у першу або другу області мішені.

Розв’язок

Позначимо через A_1 – влучення у першу область мішені, через A_2 – влучення в другу область мішені. Під час одного пострілу події A_1 та A_2 – несумісні. Тому ймовірність того, що за одного пострілу стрілок влучить у першу або другу області мішені буде:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}55 + 0{,}30 = 0{,}85.$$

Задача 2.23

За статистичними показниками держави 68 % чоловіків, що досягли пенсійного віку 60 років, досягають також і 70-річчя. Яка ймовірність того, що 60-літній чоловік не досягне свого 70-річчя?

Розв'язок

Якщо подія A – 60-літній чоловік досягає свого 70-річчя, то протилежна подія $\overline{A}$ – 60-літній чоловік не досягає свого 70-річчя. За умовою задачі $P(A)$ = 0,68, тому $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$.

Задача 2.24

На складі знаходиться 7 нівелірів, 2 з них браковані. Зі складу взято 2 нівеліра. Визначте ймовірність того, що обидва нівеліра справні.

Розв'язок

Нехай подія A – перший справний нівелір, B – другий. $P(A) = \frac{5}{9}$ та $P(B/A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Тоді $P(AB) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$.

Задача 2.25

Ймовірність влучення у мішень першого стрілка 0,6, другого стрілка – 0,7, а третього стрілка – 0,8. Знайти ймовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка.

Розв'язок

A_1 – перший стрілок влучив у мішень;

A_2 – другий стрілок влучив у мішень;

A_3 – третій стрілок влучив у мішень.

За умовою задачі події A_1, A_2, A_3 незалежні, тому протилежні події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2, \overline{A}_3$ також незалежні.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3)$

$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P(A) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}976$.

Задача 2.26

Залежно від наявності товарних залишків на складі підприємство може відправити щодобово від 1 до 100 тахеометрів. Яка ймовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку 1) трьом замовникам; 2) чотирьом замовникам; 3) дванадцяти замовникам; 4) трьом або чотирьом замовникам?

Розв'язок

Позначимо події: A – одержана кількість тахеометрів ділиться на 3 без залишку; B – одержана кількість тахеометрів ділиться на 4 без залишку. Використовуючи класичне означення ймовірності, знаходимо $P(A) = \frac{33}{100}$; $P(B) = \frac{25}{100}$; $P(A \cdot B) = \frac{8}{100}$. Події A та B – сумісні, тому $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{33}{100} + \frac{25}{100} - \frac{8}{100} = \frac{1}{2}$.

Задача 2.27

У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти ймовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика стандартна.

Розв'язок

Позначимо події: A – з першого ящика взято стандартну деталь; B_1 – з другого ящика переклали до першого стандартну деталь; B_2 – з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь. Відповідно до умови задачі, з першого ящика можна взяти деталь лише після того, як здійсниться подія B_1 або подія B_2. Події B_1 та B_2 несумісні, а подія A може з'явитись лише сумісно з однією із них. Тому для знаходження ймовірності події A можна використати формулу повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A/B_k) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2). \qquad (2.4.1)$$

$P(B_1) = \frac{9}{10}$; $P(B_2) = \frac{1}{10}$; $P(A/B_1) = \frac{16}{21}$; $P(A/B_2) = \frac{15}{21}$.

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{16}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{21} = \frac{144+15}{210} = \frac{159}{210} = \frac{53}{70}.$$

Задача 2.28

Виготовлені деталі попадають для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь буде признана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь під час перевірки признана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв’язок

Позначимо події: A – придатна деталь признана стандартною; B_1 – деталь перевіряв перший контролер; B_2 – деталь перевіряв другий контролер.

$P(B_1) = 0{,}6$; $P(B_2) = 0{,}4$; $P(A/B_1) = 0{,}94$; $P(A/B_2) = 0{,}98$.

За формулою Байєса за k=1 одержимо:

$$P(B_1/A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1)/\,(P(B_1)\cdot P(A/B_1 + P(B_2)\cdot P(A/B_2\,))=$$

$$0{,}6\cdot 0{,}94/(0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98) = 0{,}59.$$

До появи події A $P(B_1) = 0{,}6$, а після появи події A ймовірність перевірки деталі першим контролером $P(B_1/A) = 0{,}59$ поменшала.

Задача 2.29

Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що 1) відмовлять два блоки; 2) відмовить хоча б один блок; 3) відмовлять не менше двох блоків.

Розв’язок

Позначимо за подію A відмову блока. Тоді імовірність події A буде $P(A) = p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, тому $q = 1 - p = 1 – 0{,}2 = 0{,}8$.

Згідно з умовою задачі n = 10. Використовуючи формулу Бернуллі та зауваження 1, одержимо:

1) $P_{10}(2) = C_{10}^{2}\,(0{,}2)^{2}\,(0{,}8)^{8} = 0{,}202$;

2) $P_{10}(1<m\le 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^{0}\,(0{,}2)^{0}\,(0{,}8)^{10} = 0{,}8926$;

3) $P_{10}(2 \le m \le 10) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1)) = 1 - (C_{10}^{0}(0{,}2)^{0}(0{,}8)^{10} + +C_{10}^{1}(0{,}2)^{1}(0{,}8)^{9}$ = 0,6244.

Задача 2.30

За годину автомат виготовляє 20 деталей. За скільки годин ймовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не менше 0,952, якщо ймовірність браку будь-якої деталі дорівнює 0,01?

Розв'язок

Застосовуючи формулу $n \ge \ln(1-P)/\ln(1-p)$ знайдемо кількість виготовлених деталей, щоб з імовірністю p=0,952 можна було стверджувати про наявність хоча б однієї бракованої деталі, якщо ймовірність браку за умовою p=0,01:

$$n \ge \ln(1-0{,}952)/\ln(1-0{,}01) = \ln 0{,}048/\ln 0{,}99 \approx 300$$

Отже, за час t=300/20=15 годин автомат з ймовірністю 0,952 виготовить хоча б одну браковану деталь.

Задача 2.31

Під час нового технологічного процесі 80 % усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш імовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Розв'язок

Позначимо шукане число m_0. n=250, p=0,8, q=0,2, тому $np-q \le m_0 \le np+p$; 199,8 ≤ $m_0 \le$200,8. Але m_0 повинно бути цілим числом, тому m_0 = 200.

Задача 2.32

Підручник надруковано тиражем 100000 екземплярів. Ймовірність не правильного брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

Розв'язок

n = 100000 досить велике; p = 0,0001 мала; m = 5.

Застосовуючи формулу Пуассона $P_n(m) = \lambda^{m} e^{-\lambda}/m!$, одержимо:

$$P_{10000}(5) = 10^{5} e^{-10}/5! = 0{,}0375.$$

Задача 2.33

Гральний кубик кидають 800 разів. Яка імовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 267 разів.

Розв'язок

Використовуємо теорему локальну Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \varphi(x_m),\ \text{де}\quad x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (2.4.2)$$

$P(A)=p=2/6$, $q=1-p=1-1/3=2/3$,

$$x_{267} = \frac{267-800\frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{801-800}{40} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40}\ \varphi(0{,}025) = \frac{3}{40}\,0{,}988 = 0{,}03.$$

Значення $\varphi(0{,}025)$ взято з таблиці 2.12.

Таблиця 2.12

x	*φ(x)*	*x*	*φ(x)*
0,02	0,398862		
		0,025	(0,398862+0,398783)/2≈0,3988
0,03	0,398783		

Задача 2.34

Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 та не більше 274 разів?

Розв'язок

Для знаходження ймовірності використаємо *інтегральну теорему Муавра-Лапласа*: $P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_{800}(260 \le m \le 274) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

$$x_2 = \frac{274-\frac{800}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{22}{40} = 0{,}55; \quad x_1 = \frac{260-\frac{800}{3}}{\frac{40}{3}} = -\,0{,}5;$$

$P_{800}(260 \le m \le 274) = \Phi(0{,}55) + \Phi(0{,}5) = 0{,}298840 + 0{,}191482 = 0{,}400322.$

Задача 2.35

Працівник обслуговує три станка, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший станок не потребує уваги працівника, дорівнює 0,9, а для другого та третього станків – 0,8 та 0,85 відповідно. Якою є імовірність того, що протягом години 1) жоден станок не потребуватиме уваги працівника; 2) усі три станки потребують уваги працівника; 3) хоч би один станок потребує уваги працівника.

Розв'язок

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k z) = (0,1+0,9z)(0,2+0,8z)(0,15+0,85z)=0,003+0,056z+0,0329z^2 +0,612z^3.$$

Отже, коефіцієнт при z^k (k=0,1,2,3) дорівнює ймовірності того, що протягом години уваги працівника не потребують k станків. Тому, $P_3(3)$ = 0,612; $P_3(0)$ = 0,003; $P_3(1 \le m \le 3)$ = 1- $P_3(3)$ = 1 - 0,612 = 0,388.

Задача 2.36

Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що частота появи події відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,04.

Розв'язок

N=625; p=0,8; q = 1 – 0,8 = 0,2; ε = 0,04. Треба знайти $P(|\frac{m}{625} - 0,8| \le 0,04)$.

$P(|\frac{m}{625} - 0,8| \le 0,04) \approx 2\,\Phi(x)\,(0,04\sqrt{625/(0.8 \bullet 0,2)}) = 2\,\Phi(2,5)$.

Із таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2,5)$ = 0,4938.

$2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876 \Rightarrow P(|\frac{m}{625} - 0,8| \le 0,04) = 0,9876$.

Таким чином, шукана імовірність наближено дорівнює 0,9876.

2.5. Основні закони розподілу випадкових величин

Задача 2.37

Вихідні дані:

Таблиця 2.13

$Y \backslash X$	44	50	56	62	68	74
17	0,029	0,035	0,048	0,018	0,014	0,009
20	0,058	0,057	0,037	0,025	0,021	0,053
23	0,019	0,045	0,062	0,042	0,021	0,054
26	0,028	0,048	0,038	0,037	0,006	0,035
29	0,012	0,032	0,03	0,046	0,009	0,032

Необхідно:

1. Знайти закони розподілів окремих величин, що входять в систему (X, Y), а саме побудувати ряди цих розподілів та многокутників.

2. Знайти умовні закони розподілів, скласти ряди розподілів величин X за $Y=y_j$, Y за $X=x_i$ (взяти i=4, j= 2).

3. Обчислити імовірність попадання точки $X=x_i$; $Y=y_j$ у прямокутник, обмежений лініями $X=x_i$, $X=x_{i+1}$, $Y=y_j$, $Y=y_{j+1}$ (взяти i=3, j= 2).

4. Обчислити числові характеристики такі, як математичні сподівання, дисперсії, стандарти величин X, Y.

5. Обчислити кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи (X, Y). Побудувати кореляційну діаграму і зробити висновок відносно залежності величин X та Y системи (X, Y).

Варіанти індивідуальних завдань для виконання задачі наведено в додатку З.

1. Визначення законів розподілу окремих величин, що входять в систему (X, Y), побудова рядів цих розподілів та многокутників за формулами:

$$P(x_i)= P(x_i,y_1)+ P(x_i,y_2)+\ldots+ P(x_i,y_m),$$

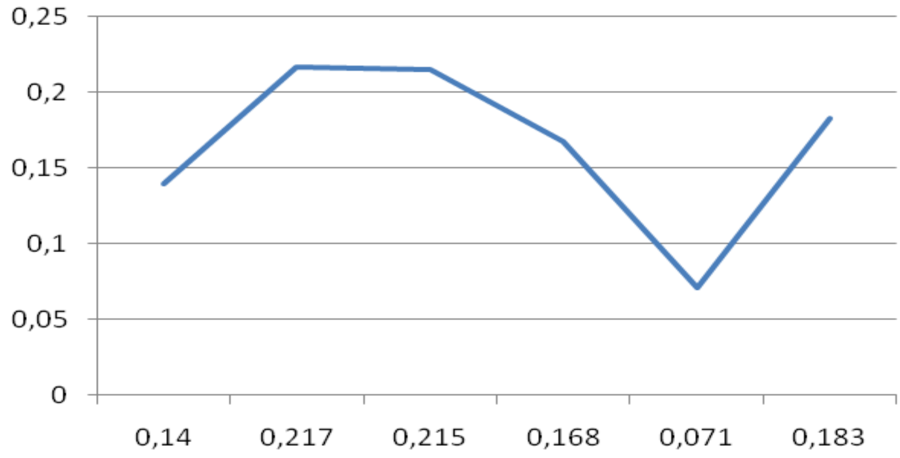
$$P(y_j)= P(x_i,y_1)+ P(x_i,y_2)+\ldots+ P(x_i,y_m), \qquad (2.5.1)$$

з контролем $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)=1$ (i=1,2,…,n; j=1,2,…,m).

Для величини X:

Таблиця 2.14

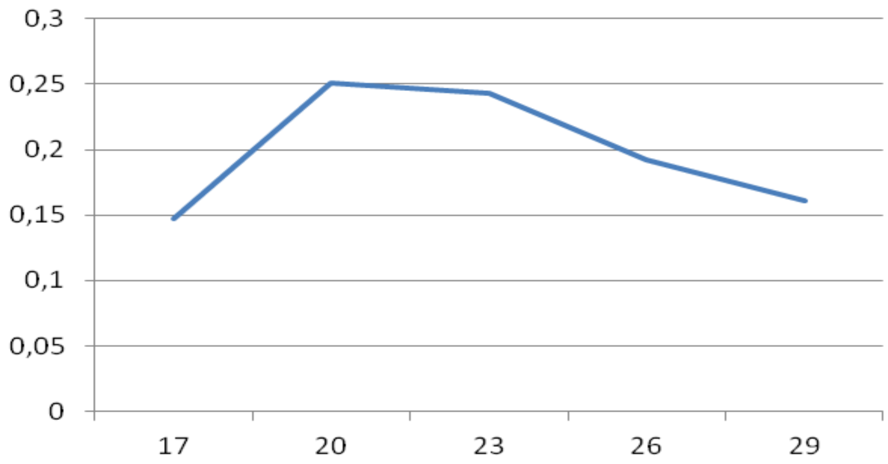
X	44	50	56	62	68	74	Контрольна Σ
P(x_i)	0,146	0,217	0,215	0,168	0,071	0,183	1,000



Для величини *Y*:

Таблиця 2.15

Y	17	20	23	26	29	Контрольна Σ
P(y_i)	0,153	0,251	0,243	0,192	0,161	1,000



2. Визначення умовних законів розподілу, складання рядів розподілу величин X за $Y=y_j$, Y за $X=x_i$ (взяти i=4, j= 2).

Умовні закони розподілу величин X , Y визначаємо за формулами:

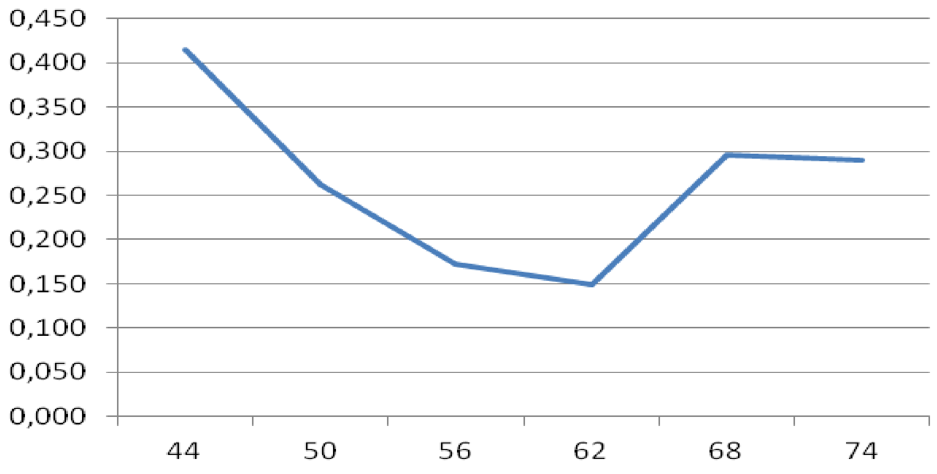
$$p(x_i/y_j) = p(x_i,y_j)/p(y_j),$$

$$p(y_j/x_i) = p(x_i,y_j)/p(x_i). \qquad (2.5.2)$$

Для $Y=y_j$:

Таблиця 2.16

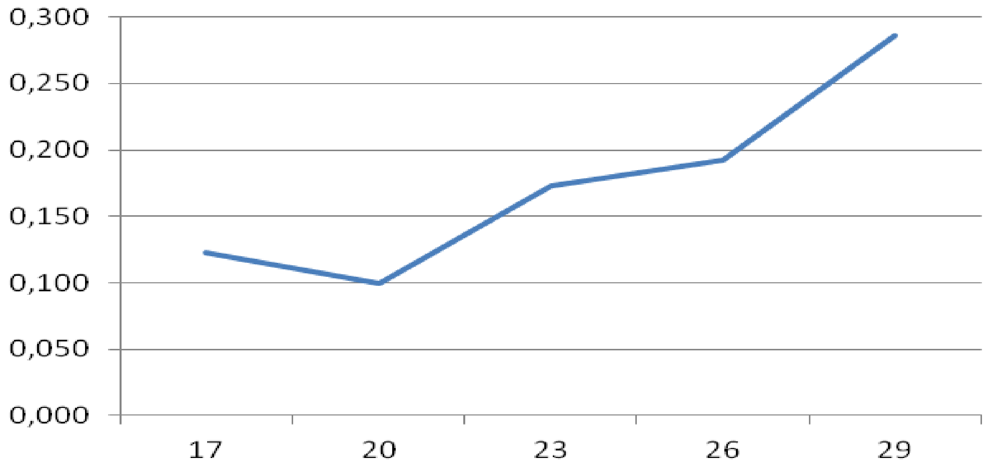
X	44	50	56	62	68	74
$P(x_i/y_j)$	0,397	0,263	0,172	0,149	0,296	0,290



Для $X=x_i$:

Таблиця 2.17

Y	17	20	23	26	29
$p(y_j/x_i)$	0,118	0,100	0,173	0,193	0,286



3. Обчислення імовірності попадання точки $X=x_i$; $Y=y_j$ у прямокутник, обмежений лініями $X=x_i$, $X=x_{i+1}$, $Y=y_j$, $Y=y_{j+1}$ (взяти i=3, j= 2).

Імовірність влучення випадкової точки до прямокутника $\{x_3 \le X \le x_4;$ $y_2 \le Y \le y_3\}$ можна знайти за формулою:

$$P(x_3 < X < x_4;\ y_2 \le Y \le y_3) = \{ F(x_4,y_3) - F(x_3,y_3)\} - \{F(x_4,y_2) - F(x_3,y_2)\}. \quad (2.5.3)$$

$F(x_3,y_3)$ = 0,029+0,035+0,058+0,057 = 0,179.

$F(x_4,y_3)$ = 0,029+0,035+0,058+0,057+0,048+0,037 = 0,264.

$F(x_3,y_2)$ = 0,029+0,035 = 0,064.

$F(x_4,y_2)$ = 0,029+0,035+0,048 = 0,112.

$P(x_3 < X < x_4;\ y_2 \le Y \le y_3)$ = (0,264 - 0,179) – (0,112 – 0,064) = 0,037.

4. Обчислення числових характеристик: математичних сподівань, дисперсій, стандартів величин X, Y.

Математичні сподівання обчислюємо за формулами:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i P_{ij}, \qquad M[Y] = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j P_{ij}. \qquad (2.5.4)$$

m_x = 44·0,146+50·0,217+56·0,215+62·0,168+68·0,071+74·0,183=58,1.

m_y= 17·0,153=20·0,251+23·0,243+26·0,192+29·0,161 = 22,87.

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^2 P_{ij}, \qquad D[Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (y_j - m_y)^2 P_{ij}, \qquad (2.5.5)$$

де центровані величини $\overset{0}{X}$ та $\overset{0}{Y}$ обчислюються за формулами (табл. 2.18):

$$\overset{0}{X} = X - m_x;\ \ \overset{0}{Y} = Y - m_y. \qquad (2.5.6)$$

Таблиця 2.18

	$(\overset{0}{X})^2$	198,81	65,61	4,41	15,21	98,01	252,81	$\sum$ 634,86
$(\overset{0}{Y})^2$	$\overset{0}{Y} \backslash \overset{0}{X}$	-14,10	-8,10	-2,10	3,90	9,90	15,90	$P(y_i)$
34,457	-5,87	0,029	0,035	0,048	0,018	0,014	0,009	0,153
8,237	-2,87	0,058	0,057	0,037	0,025	0,021	0,053	0,251
0,017	0,13	0,019	0,045	0,062	0,042	0,021	0,054	0,243
9,797	3,13	0,028	0,048	0,038	0,037	0,006	0,035	0,192
37,577	6,13	0,012	0,032	0,03	0,046	0,009	0,032	0,161
$\sum$ 90,085	$P(x_i)$	0,146	0,217	0,215	0,168	0,071	0,183	1,000

$D[X]$=198,81·0,146+65,61·0,217+4,41·0,215+15,21·0,168+98,01·0,071+252,81· 0,183 =99,99

$D[Y]$=34,457·0,153+8,237·0,251+0,017·0,243+9,797·0,192+37,577·0,161 = 15,274

Середні квадратичні відхилення обчислюємо за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{\ }([(x_i\text{-}m_x)^2]/6) = \sqrt{634{,}86/6} = 10{,}286,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\ }([(y_j\text{-}m_y)^2]/5) = \sqrt{90{,}085/5} = 4{,}245. \qquad (2.5.7)$$

5. Обчислення кореляційного моменту та коефіцієнта кореляції системи *(X, Y)*.

Кореляційний момент $K_{x,y}$ та коефіцієнт кореляції $r_{x,y}$ обчислюємо за формулами (табл. 2.19):

$$K_{x,y}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)\,(y_j - m_y)\,P_{ij} = \mathrm{M}[\overset{0}{Y}\ \overset{0}{X}],$$

$$r_{x,y} = K_{x,y}/\sigma_x\sigma_y. \qquad (2.5.8)$$

Таблиця 2.19

$\overset{0}{Y} \backslash \overset{0}{X}$	-14,10	-8,10	-2,10	3,90	9,90	15,90
-5,87	0,029	0,035	0,048	0,018	0,014	0,009
-2,87	0,058	0,057	0,037	0,025	0,021	0,053
0,13	0,019	0,045	0,062	0,042	0,021	0,054
3,13	0,028	0,048	0,038	0,037	0,006	0,035
6,13	0,012	0,032	0,03	0,046	0,009	0,032
34,457	2,400	12,664	0,592	-0,412	-0,814	-0,840
8,237	2,347	1,325	0,223	-0,280	-0,597	-2,418
0,017	-0,034	-0,047	-0,017	0,021	0,027	0,112
9,797	-1,236	-1,217	-0,250	0,452	0,186	1,742
37,577	-1,037	-1,589	-0,386	1,100	0,546	3,119
Σ	2,440	0,136	0,162	0,881	-0,652	1,715

$K_{x,y}$= 4,682;

$r_{x,y}$ = 4,682/4,245·10,286 = 0,107.

Випадкові величини *X* та *Y* – корельовані, таким чином, якщо відома величина *X*, тоді є можливість знайти прогнозне значення *Y*, використовуючи рівняння лінійної регресіїї:

$$Y - m_y = \rho_{xy}\,(X - m_x),$$

$$X = \rho_{xy}\,Y + (m_x - \rho_{xy}\ m_y), \qquad (2.5.9)$$

де ρ_{xy} – коефіцієнт регресії, що розраховується за формулою:

$$\rho_{xy} = r_{xy}\,\sigma_x/\sigma_y\,. \qquad (2.5.10)$$

Для побудови кореляційної діаграми використовуємо точки з координатами x_i та y_j (вихідні дані) та пряму регресії, що наведена вище. Отримавши таку діаграму, побачимо наскільки добре точки групуються навколо прямої регресії.

2.6. Основні поняття математичної статистики (вирівнювання статистичного ряду)

Задача 2.38

Вихідні дані: статистичний розподіл похибок вимірювань кутів тріангуляції представлено в табл. 2.20.

Таблиця 2.20

i (інтервал)	-4,-3	-3,-2	-2,-1	-1,0	0,1	1,2	2,3	3,4
m_i кількість	7	34	90	157	126	83	37	7
$P_i\,'$ (відносна частота)	0,013	0,063	0,166	0,290	0,233	0,154	0,068	0,013

Необхідно вирівняти цей розподіл за допомогою нормального закону:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-t}, \qquad (2.6.1)$$

де $t=(x-m_x)^2/2\sigma^2$.

1. Побудувати на одному графіку гістограму та її вирівнювальну криву розподілу похибок.

2. Перевірити узгодження теоретичного та статистичного розподілів за допомогою критерію χ^2 (Пірсона) та критерію А. Колмогорова.

3. Побудувати довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання m'_x за відомого середнього квадратичного відхилення σ; середнього квадратичного відхилення s' із надійністю $\gamma = 0,95$, що покриває невідомі параметри.

Побудова на одному графіку гістограми та її вирівнювальної кривої розподілу похибок. Для обчислення відносних частот $P_i\,'$ скористаємось формулою $P_i{}' = m_i/n$, де m_i – кількість значень випадкової величини X, що попадає в i-ий інтервал; n – кількість всіх спостережень X.

Контрольна формула:

$$\sum_{i=1}^{k} P'_{\mathrm{i}} = 1.$$

За даними табл. 2.20 будуємо гістограму, де на осі абсцис відкладаємо довжини інтервалів – для даного випадку через 1″, на осі ординат – відносні частоти (рис. 2.1).

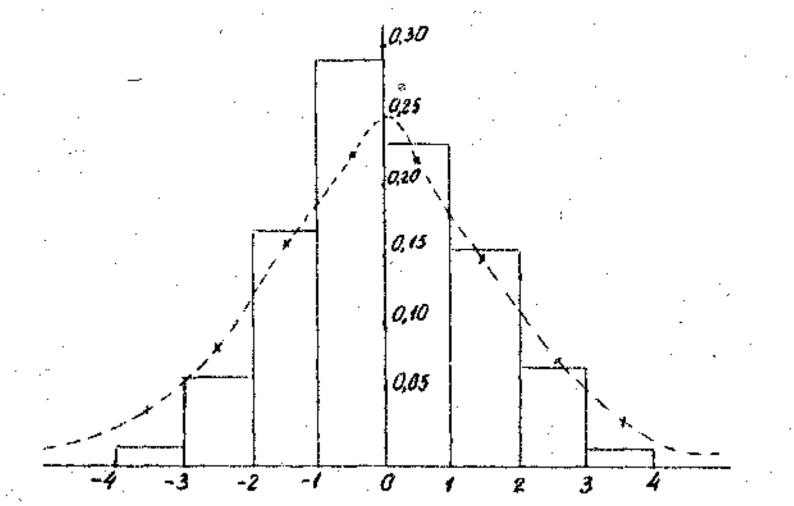


Рис. 2.1. Гістограма розподілу похибок.

Для побудови вирівнювальної кривої (кривої нормальної густини) необхідно попередньо вирахувати параметри нормального закону розподілу m та σ. Для цього використаємо наближені формули для обчислення математичного сподівання m_x' (статистичне середнє або вибіркове середнє випадкової величини) та дисперсії D_x' (статистична або вибіркова дисперсія), в яких $\tilde{x}_i$ – представник i-го інтервалу, в якості якого рекомендується використовувати центр інтервалу; k – кількість інтервалів.

$$m_x' = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{\mathrm{i}} \cdot P'_i = -3{,}5 \cdot 0{,}013 + (-2{,}5) \cdot 0{,}063 + (-1{,}5) \cdot 0{,}166 +$$

$$+(0{,}5) \cdot 0{,}290 + 0{,}5 \cdot 0{,}233 + 1{,}5 \cdot 0{,}154 + 2{,}5 \cdot 0{,}068 + 3{,}5 \cdot 0{,}013 = -\,0{,}034;$$

$$D_x' = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_{\mathrm{i}} - m_x')^2 \cdot P'_i = (-3{,}5 + 0{,}034)^2 \cdot 0{,}013 + (-2{,}5 + 0{,}034)^2 \cdot 0{,}063 +$$

$+(-1,5+0,034)^2\cdot 0,166+(-0,5+0,034)^2\cdot 0,290+(0,5+0,034)^2\cdot 0,233+$

$+(1,5+0,034)^2\cdot 0,154+(2,5+0,034)^2\cdot 0,068+(3,5+0,034)^2\cdot 0,013=1,9394;$

$\sigma_x' = \sqrt{1,9394}=1,39.$

У такому випадку k=8, $\tilde{x}_i$ – центр i-го інтервалу, $t=(x-m_x)^2/2\sigma^2$. Вираховуємо значення $f(x)$ для кожного інтервалу. На практиці доцільно використовувати таблиці густини нормального розподілу (додаток К), але попередньо необхідно розрахувати нормований аргумент:

$$t_i =(\tilde{x}_i - m_x')/ \sigma_x'. \qquad (2.6.2)$$

Результати розрахунків подано у табл. 2.21.

Таблиця 2.21

t_i	-1,86	-1,32	-0,78	-0,25	0,29	0,85	1,36	1,90
f(t)	0,074	0,167	0,286	0,386	0,380	0,278	0,163	0,066
f(x) = f(t)/ σ_x'	0,040	0,090	0,154	0,208	0,204	0,149	0,088	0,035

Контрольна формула $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$, тому що площа під кривою густини ймовірностей повинна дорівнювати одиниці. Якщо нанести отримані значення густини на графік гістограми та з’єднати точки плавною лінією, то отримуємо криву, яка вирівнює цей статистичний розподіл.

Із графіка видно, що теоретична крива розподілу в основному зберігає особливості статистичного розподілу (гістограми). Розбіжності, що спостерігаються, можливо пояснюються випадковими причинами. Але точніше на це питання можна відповісти, використавши критерії згоди.

Перевірка узгодження теоретичного та статистичного розподілів за допомогою критерію χ^2 (Пірсона) та критерію А. Колмогорова. Для перевірки узгодження теоретичного та статистичного розподілів за допомогою критерію χ^2 (Пірсона) з r ступенями довільності для n = 541.

$$\chi^2= \sum_{i=1}^{k} (m_i-nP_i)^2/nP_i. \qquad (2.6.3)$$

Імовірності P_i визначаємо для кожного інтервалу за допомогою таблиці значення функції Лапласа (додаток Л). Так, імовірність попадання в i-ий інтервал $P_i = \Phi((x_{i+1} - m_x')/\sigma_x') - \Phi((x_i - m_x')/\sigma_x')$.

Наприклад, імовірність попадання в інтервал [-4;-3] буде:

$$P(-4<X<-3)=\Phi(\frac{-3+0{,}034}{1{,}39}) - \Phi(\frac{-4+0{,}034}{1{,}39})=0{,}014.$$

Результати розрахунків подано в табл. 2.22.

Таблиця 2.22

i	-4,-3	-3,-2	-2,-1	-1,0	0,1	1,2	2,3	3,4
m_i	7	34	90	157	126	83	37	7
P_i	0,014	0,058	0,166	0,263	0,251	0,168	0,057	0,013
$n\cdot P_i$	8	31	90	142	136	91	31	7

Обчислимо χ^2, використавши дані табл. 2.22.

$\chi^2=(7-8)^2/8+(34-31)^2/31+(90-90)^2/90+(157-142)^2/142+(126-136)^2/136+$

$+(83-91)^2/91+(37-31)^2/31+(7-7)^2/7= 4{,}57$.

Задаючи рівень значущості $\alpha(q\%/100)=0{,}05$, тобто за імовірністю $\gamma = 1-q/100=0{,}95$ та числа ступенів довільності $r= k - c = 8 – 3 = 5$ ($r = 8$, $c = 3$) знайдемо з табл. розподілу χ^2 (додаток М) значення $\chi^2(\alpha,r)= \chi^2$ (0,05; 5)=1,145. У зв'язку з тим, що $\chi^2_{обч}>\chi^2$ (α,r), тобто 4,57>1,145, гіпотеза про те, що розподіл похибок вимірювань кутів тріангуляції підпорядковується нормальному законові, неправдоподібна.

Величина $\gamma = 0{,}95$ є досить високою, тому на практиці задаючи рівень значущості $\alpha(q\%/100) = 0{,}7$, тобто за імовірністю $\gamma = 1 - q/100 = 0{,}3$ та числом ступенів довільності $r= k – c = 8 – 3 = 5$ ($r = 8$, $c = 3$) знайдемо з таблиці розподілу χ^2 (додаток М) значення $\chi^2(\alpha,r) = \chi^2$ (0,7; 5) = 6,060. У зв'язку з тим, що $\chi^2_{обч.}<\chi^2$ (α,r), тобто 4,57<6,060, гіпотеза про те, що розподіл похибок вимірювань кутів тріангуляції підпорядковується нормальному законові, правдоподібна (у 70% вибірок з генеральної сукупності дані не суперечать припущенню, що похибки вимірювань кутів тріангуляції у табл. 2.22 і на графіку (рис. 2.1) пояснюються випадковими причинами).

Для перевірки гіпотези за критерієм А. Колмогорова необхідно визначити значення статистичної та теоретичної функцій розподілу.

Значення статистичної функції розподілу будуть:

$$F'(x_1) = F'(x_1{=}{-4}) = 0;$$

$$F'(x_2{=}{-3}) = P_1' = 0{,}013;$$

$$F'(x_3{=}{-2}) = P_1' + P_2' = 0{,}013+0{,}63=0{,}076;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F'(x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-2} P_i' = 0{,}987;$$

$$F'(x_k) = 1.$$

Значення теоретичної функції розподілу будуть:

F(x) = 0,5 + Φ(x), де Φ(x) – функція Лапласа.

Результати обчислень подано в табл. 2.23.

Таблиця 2.23

i	-4,-3	-3,-2	-2,-1	-1,0	0,1	1,2	2,3	3,4
F′(x)	0,013	0,076	0,242	0,532	0,765	0,919	0,987	1,000
F(x)	0,002	0,080	0,245	0,492	0,760	0,924	0,988	0,998

За значеннями *F'(x)* та *F(x)* на кінцях інтервалів побудуємо графік (рис. 2.2).

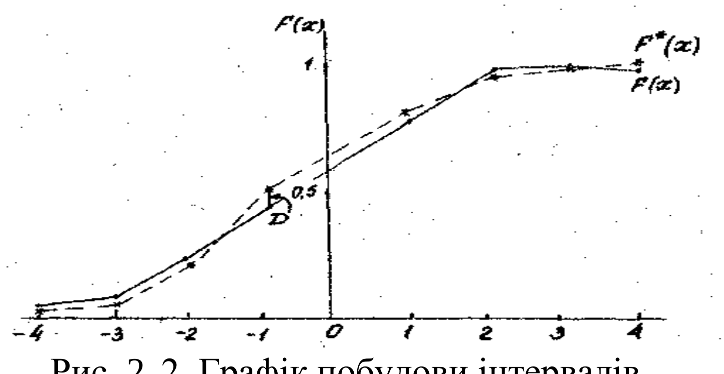


Рис. 2. 2. Графік побудови інтервалів

Модуль D = max | $F'(x)$ - $F(x)$| = 0,040.

Імовірність того, що якщо випадкова величина X дійсно розподілена згідно зі законом $F(x)$ за рахунок тільки випадкових величин, то максимальне розходження між | $F'(x)$ - $F(x)$| буде не менше, ніж фактично спостережене, та визначається за формулою $\rho(\lambda)=1-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$, де $\lambda_{обч.}=D\sqrt{n}$ =0,93. Для значень *P(λ)* складено таблиці.

На практиці роблять таким чином. Задаючи рівень значущості $\alpha(q\%/100)=0{,}2$ і $k=8$), де k – кількість інтервалів, тому що величина D'_x знайдена за даними, згрупованими у статистичний ряд, використовуємо таблицю критичних значень для найбільшого відхилення емпіричного розподілу від теоретичного (критерій Колмогорова) (додаток Н). Знаходимо $\lambda_q=0{,}358$. Оскільки $\lambda_{обч.}=0{,}93>0{,}358$, то гіпотеза про нормальний закон розподілу відхиляється.

Побудова довірчих інтервалів для оцінки математичного сподівання m'_x завідомого середнього квадратичного відхилення σ; середнього квадратичного відхилення $\hat{s}$ з надійністю γ = 0,95, що покриває невідомі параметри. Щоб побудувати довірчі інтервали для невідомого математичного сподівання m_x необхідно використати його оцінку $m_x' = -0{,}034$ для $\sigma = \sigma_x' = 1{,}4$.

На підставі виразу $p(m_x' - t\sigma/\sqrt{n} \le m_x \le m_x' + t\sigma/\sqrt{n}) = \gamma$ довірчий інтервал для m_x:

$$m_x' - t\sigma/\sqrt{n} \le m_x \le m_x' + t\sigma/\sqrt{n}. \qquad (2.6.4)$$

За заданим рівнем надійності $\gamma = 0{,}95$ визначимо $t = 2{,}0$. Необхідно використати таблицю функції Лапласа (додаток Л) та вираз $\gamma = 2\Phi(t)$.

Тоді:

$$-0{,}034 - 0{,}12 \le m_x \le -0{,}034 + 0{,}12,$$

тобто, з надійністю $\gamma=0{,}95$ інтервал -0,154; +0,86 покриває невідоме математичне сподівання m_x.

Будуємо довірчий інтервал для дисперсії D_x та середнього квадратичного відхилення σ_x, застосовуючи величину $D'_x = 1{,}94$, як незміщену та переконливу оцінку дисперсії, тобто $D'_x = \hat{s}^2$.

Тоді, згідно з виразом $p(n\hat{s}^2/\chi^2_2 < \sigma^2 < n\hat{s}^2/\chi^2_1) = \gamma$,

$$n\hat{s}^2/\chi^2_2 \le \sigma^2 \le n\hat{s}^2/\chi^2_1. \qquad (2.6.5)$$

Для визначення величин $\chi^2{}_1$ та $\chi^2{}_2$ скористаємось довірчою імовірністю $\gamma=1$-α=0,95, де α – імовірність того, що деяка величина, яка розподіляється за розподілом χ^2, не вийде за межі інтервалу (рис. 2.3, заштриховані площі).
Тоді для величини $\chi^2{}_1$ ця імовірність буде α/2=0,025, а для $\chi^2{}_2$ – 1- α/2=1-0,025=0,975.

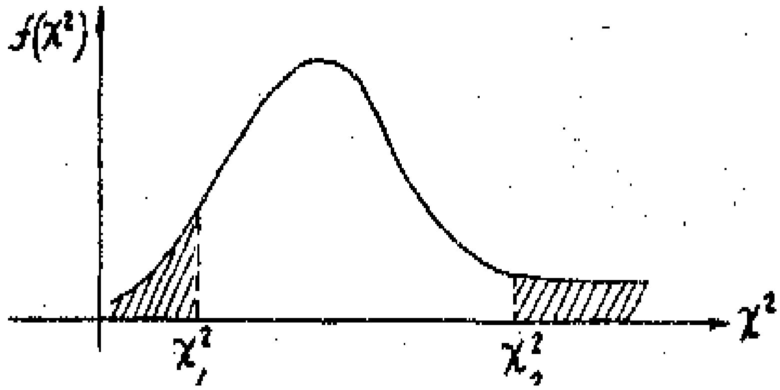


Рис. 2.3. Графік побудови довірчих інтервалів

$\chi^2{}_1$ та $\chi^2{}_2$ знаходимо за допомогою χ^2 (додаток М) для ступеня довільності r =5 та за знайденим значенням імовірностей:

$$\chi^2{}_1 = 12{,}83 \text{ та } \chi^2{}_2 = 0{,}83.$$

Якщо використати у виразі $n\hat{s}^2/\chi^2{}_2 \leq \sigma^2 \leq n\hat{s}^2/\chi^2{}_1$ замість n (об’єму вибірки) k (кількість інтервалів), тому що величина D'_x знайдена за даними, згрупованими у статистичний ряд, для r = 5 отримаємо $k\hat{s}^2/\chi^2{}_2 \leq D_x \leq k\hat{s}^2/\chi^2{}_1$.

$$1{,}2 \leq D_x \leq 18{,}9 \; ; \; 1{,}1 \leq \sigma_x \leq 4{,}3.$$

З надійністю γ = 0,95 можна стверджувати, що інтервал 1,1; 4,3 покриває невідоме середнє квадратичне відхилення σ_x.

2.7. Параметричний метод врівноваження геодезичних мереж (складання параметричних рівнянь поправок)

Задача 2.39

Потрібно скласти параметричні рівняння поправок для виміряного дирекційного кута та довжини сторони. Як параметри прийняти шукані координати пунктів мережі. Поправки в лінії та наближені координати представити в сантиметрах, поправку до дирекційного кута – в секундах.

Таблиця 2.24

Вихідні дані та результати вимірів

Пункт мережі	Наближені координати, м		Результати вимірів	
	x^0	y^0		
Початковий пункт П	9723,135	7211,756	Дирекційний кут $\alpha_{ПК}$	146° 24′ 45″
Кінцевий пункт К	8862,356	7783,342	Довжина сторони $s_{ПК}$, м	1033,295

Обчислення коефіцієнтів та вільних членів рівнянь поправок для виміряного дирекційного кута та ліній знаходимо з розв'язку оберненої геодезичної задачі за шуканими наближеними координатами пунктів.

Таблиця 2.25

Розв'язок оберненої геодезичної задачі

$y^0_П$	7211,756	$x^0_П$	9723,135	$(S) = 2062{,}65\dfrac{\sin\alpha}{s}$	
$y^0_К$	7783,342	$x^0_К$	8862,356		
$y^0_К - y^0_П$	+ 571,586	$x^0_К - x^0_П$	- 860,779	$(C) = 2062{,}65\dfrac{\cos\alpha}{s}$	
$tg\alpha^0_{ПК}$	- 0,664033	$\alpha^0_{ПК}$	146° 24′ 52,2″		
$\sin\alpha^0_{ПК}$	+ 0,553181	$s^0_{ПК} = \Delta y / \sin\alpha$	1033,272		
$\cos\alpha^0_{ПК}$	- 0,833061	$s^0_{ПК} = \Delta x / \cos\alpha$	1033,272		
$\alpha^0_{ПК} - \alpha_{ПК}$	0° 0′ 07,2″	+ 7,2″		$(S)_{ПК}$	+1,1043
$s^0_{ПК} - s_{ПК}$	- 0,0230 м	- 2,30 см		$(C)_{ПК}$	- 1,6630

Параметричне рівняння поправок для виміряного дирекційного кута:

$$\delta\alpha''_{ПК} = (S)_{ПК}\,\delta x_П - (C)_{ПК}\,\delta y_П - (S)_{ПК}\,\delta x_К + (C)_{ПК}\,\delta y_К + (\alpha^0_{ПК} - \alpha_{ПК})'',$$

$$\delta\alpha''_{ПК} = 1{,}1043\delta x_П + 1{,}6630\delta y_П - 1{,}1043\delta x_К - 1{,}6630\delta y_К + 7{,}2''.$$

Параметричне рівняння поправок для виміряної сторони:

$$\delta s_{ПК} = -\cos\alpha^0_{ПК}\delta x_П - \sin\alpha^0_{ПК}\,\delta y_П + \cos\alpha^0_{ПК}\delta x_К + \sin\alpha^0_{ПК}\,\delta y_К + (s^0_{ПК} - s_{ПК}).$$

Вільний член $(s^0_{ПК} - s_{ПК})$ необхідно представити в сантиметрах

$$\delta s_{ПК} = 0{,}8331\delta x_П - 0{,}5532\delta y_П - 0{,}8331\delta x_К + 0{,}5532\delta y_К - 2{,}30.$$

Згідно з прийнятим правилом обчислення коефіцієнтів та вільних членів параметричних рівнянь поправок поправки в координати та довжин сторін, що отримані після врівноваження, будуть представлені в сантиметрах, поправки до дирекційних кутів – в секундах.

Задача 2.40

Скласти параметричні рівняння поправок для нівелірної мережі. Схема мережі зображена на рис. 2.4, а вихідні дані (висоти точок) – у табл. 2.26, результати вимірів – табл. 2.27. Як параметри прийняти висоти шуканих реперів, вільні члени параметричних рівнянь поправок представити в сантиметрах.

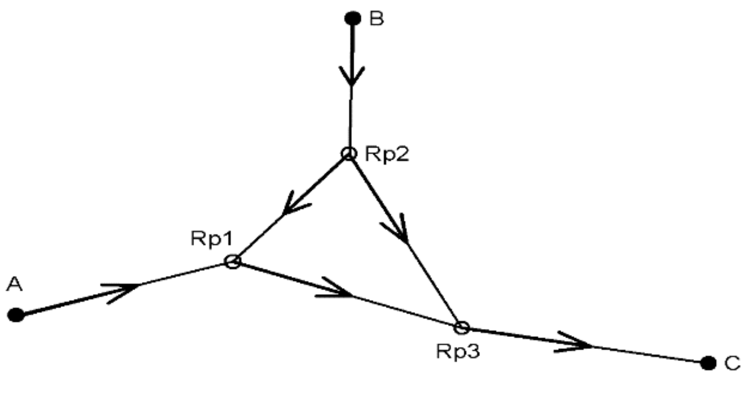


Рис. 2.4. Схема мережі

Таблиця 2.26

Вихідні дані

Шукані репери	Висоти реперів, м
HA	261,850
HB	265,731
HC	257,130

Таблиця 2.27

Результати вимірів

Перевищення	Почат. репер	Кінц. репер	Перевищення, м	Довжина L, км
h_1	A	рп1	-3,507	10,7
h_2	рп1	рп3	-0,781	14,2
h_3	рп3	C	-0,418	16,7
h_4	B	рп2	-4,390	12,4
h_5	рп2	рп1	-3,011	15,8
h_6	рп2	рп3	-3,769	15,1

Наближені висоти шуканих реперів (параметрів):

Таблиця 2.28

Позначення	Формула	Значення, м
$H^0_{рп1}$	$t^0_1 = HA + h_1$	258,343
$H^0_{рп2}$	$t^0_2 = HB + h_4$	261,341
$H^0_{рп3}$	$t^0_3 = HC - h_3$	257,548

Параметричні рівняння зв’язку та параметричні рівняння поправок мають вигляд:

$$
\begin{array}{ll}
\bar{h}_1 = t_1 - HA & v_1 = +\tau_1 + (t^0_1 - HA) - h_1 \\
\bar{h}_2 = t_3 - t_1 & v_2 = -\tau_1 + \tau_3 + (t^0_3 - t^0_1) - h_2 \\
\bar{h}_3 = HC - t_3 & v_3 = -\tau_3 + (HC - t^0_3) - h_3 \\
\bar{h}_4 = t_2 - HB & v_4 = +\tau_2 + (t^0_2 - HB) - h_4 \\
\bar{h}_5 = t_1 - t_2 & v_5 = +\tau_1 - \tau_2 + (t^0_1 - t^0_2) - h_5 \\
\bar{h}_6 = t_3 - t_2 & v_6 = -\tau_2 + \tau_3 + (t^0_1 - t^0_2) - h_6
\end{array}
$$

Вільні члени параметричних рівнянь поправок дорівнюють

$$
\begin{array}{llllll}
a_{10} = & (t^0_1 - HA) - h_1 & = & 0{,}000 \text{ м} & a_{10} = & 0{,}0 \text{ см} \\
a_{20} = & (t^0_3 - t^0_1) - h_2 & = & -0{,}014 \text{ м} & a_{20} = & -1{,}4 \text{ см} \\
a_{30} = & (HC - t^0_3) - h_3 & = & 0{,}000 \text{ м} & a_{30} = & 0{,}0 \text{ см} \\
a_{40} = & (t^0_2 - HB) - h_4 & = & 0{,}000 \text{ м} & a_{40} = & 0{,}0 \text{ см} \\
a_{50} = & (t^0_1 - t^0_2) - h_5 & = & 0{,}013 \text{ м} & a_{50} = & 1{,}3 \text{ см} \\
a_{60} = & (t^0_1 - t^0_2) - h_6 & = & -0{,}024 \text{ м} & a_{60} = & -2{,}4 \text{ см}
\end{array}
$$

2.8. Параметричний та корелатний методи врівноваження геодезичних мереж (вирівнювання нівелірної мережі)

Задача 2.41

Вирівняти нівелірну мережу (схема мережі – рис. 2.5, вихідні дані – табл. 2.29, результати вимірів – табл. 2.30) за способом найменших квадратів параметричним методом. Необхідно обчислити вирівняні висоти H_j визначених (вузлових) реперів та їх обернену вагову матрицю Q_H, середні квадратичні похибки вирівняних висот визначених реперів, вирівняні результати вимірів (перевищення $\bar{h}_i$) та їх обернену вагову матрицю Q_h середню квадратичну похибку одиниці ваги μ та середню квадратичну похибку на один кілометр ходу $m_{1км},$ обернену вагову матрицю Q_F вирівняних перевищень за ходами №№ 1, 2 та 5, як функції вирівняних параметрів, середні квадратичні похибки цих функцій. Як параметри прийняти висоти визначених реперів.

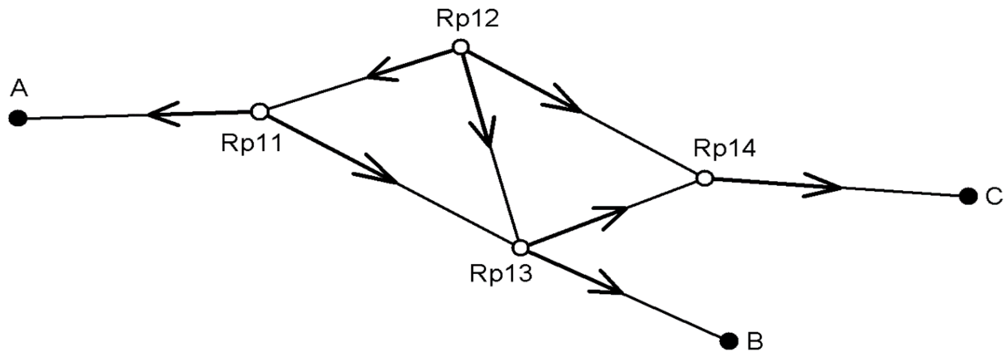


Рис. 2.5. Схема нівелірної мережі.

Викреслюють схему мережі, записують в табл. 2.29 вихідні дані та у стовпці 1- 3 табл. 2.30 результати вимірів.

Таблиця 2.29

Вихідні репери

Позначення вихідного репера	Висота репера, м
A	188,462
B	188,838
C	186,298

Таблиця 2.30

Виміряні величини

№ ходу i	Репери		Виміряне перевищення h_i, м	Довжина ходу L_i, км	Вага $P=15/L_i$	Результати вирівнювання			
	початковий	кінцевий				поправки v_i, см	вирівняні перевищення $h_i + v_i$, м	Контрольна формула	
								$\psi_i(t_1,t_2,\ldots,t_k)$	$\psi_i=$
1	A	Рп11	2,186	10,7	1,40	-0,05	2,1855	t_1-H_A	2,1855
2	Рп11	Рп12	1,566	14,2	1,06	0,75	1,5735	t_2-t_1	1,5735
3	Рп11	Рп13	-0,302	16,7	0,90	-0,97	-0,3117	t_3-t_1	-0,3117
4	Рп12	Рп13	-1,881	12,4	1,21	-0,42	-1,8852	t_3-t_2	-1,8852
5	Рп14	Рп13	0,915	15,8	0,95	0,06	0,9156	t_3-t_4	-0,9156
6	Рп12	Рп14	-2,814	15,1	0,99	1,32	-2,8008	t_4-t_2	-2,8008
7	Рп14	C	-3,137	17,8	0,84	1,48	-3,1222	H_C-t_4	-3,1222
8	B	Рп13	1,489	10,0	1,50	0,88	1,4978	t_3-H_B	1,4978

Обчислюють кількість виміряних величин $n = 8$;

необхідних вимірів $k = 4$;

надлишкових вимірів $r = n - k = 4$.

Вибирають метод вирівнювання. За умовою – параметричний. Вибирають параметри. За умовою параметри – це висоти визначених пунктів, де t_1 – вирівняна висота репера 11, t_2 – репера 12, t_3 – репера 13, t_4 – репера 14, тобто $t_1 = H_{pn11}$, $t_2 = H_{pn12}$, $t_3 = H_{pn13}$, $t_4 = H_{pn14}$.

Обчислюють вагу перевищень та записують їх у стовпець 4 табл. 2.30.

Складання параметричних рівнянь зв'язку:

$$\bar{l}_i = \psi_i(t_1,t_1,...,t_k)\ ,\ i = 1,2,...,n$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= t_1 - H_A \\ \bar{h}_2 &= t_2 - t_1 \\ \bar{h}_3 &= t_3 - t_1 \\ \bar{h}_4 &= t_3 - t_2 \\ \bar{h}_5 &= t_3 - t_4 \\ \bar{h}_6 &= t_4 - t_2 \\ h_7 &= H_C - t_4 \\ \bar{h}_8 &= t_3 - H_B \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Елементи мережі, точність яких необхідно оцінити, представляють як функції параметрів:

$$F_s = F_s(t_1,t_2, ...,t_k);$$

$$F_1 = \bar{h}_1 = t_1 - H_A\,;$$

$$F_2 = \bar{h}_2 = t_2 - t_1;$$

$$F_3 = \bar{h}_3 = t_3 - t_1;$$

$$F_4 = \bar{h}_4 = t_3 - t_2.$$

Складання параметричних рівнянь поправок:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + ... + a_{ik}\tau_k + a_{i0}, \qquad i = 1,2,...,n$$

де v_i – поправки до результатів вимірів, τ_j – поправки до наближених значень параметрів.

У матричній формі $v = A\tau + a_0$.

Обчислюють за найкоротшими ходовими лініями наближені значення параметрів t^0_j та записують їх у стовпець 4 табл. 2.31.

Таблиця 2.31

Визначені репери (параметри)

Параметр	Елемент мережі	Наближене значення		Поправка τ_j, см	Вирівняне значення $t^0_j + \tau_j$, м
		формула	t^0_j, м		
t_1	H_{Pn1}	H_A+h_1	190,648	-0,05	190,6475
t_2	H_{Pn2}	$H_A+h_1+h_2$	192,214	0,70	192,2210
t_3	H_{Pn3}	H_B+h_8	190,327	0,88	190,3358
t_4	H_{Pn4}	H_C-h_7	189,435	-1,48	189,4202

У загальному випадку $a_{ij} = (\partial \psi_i / \partial t_l)_0$, $a_{i0} = \psi_i(t^0_1, t^0_2, ..., t^0_k) - l_i$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2, ..., k$.

У зв'язку з тим, що у нівелірних мережах результати вимірів (перевищення) – це лінійні функції параметрів (висот реперів), то для переходу до параметричних рівнянь поправок достатньо до рівняння зв'язку підставити:

$$\bar{h}_i = h_i + v_i \quad и \quad t_j = t^0_j + \tau_j .$$

Далі отримують параметричні рівняння поправок $v = A\tau + a_0$.

v	$A\tau$	a_0
$v_1 =$	$+\tau_1$	$+t^0_1 - H_A - h_1$
$v_2 =$	$-\tau_1 + \tau_2$	$-t^0_1 + t^0_2 - h_2$
$v_3 =$	$-\tau_1 + \tau_3$	$-t^0_1 + t^0_3 - h_3$
$v_4 =$	$-\tau_2 + \tau_3$	$-t^0_2 + t^0_3 - h_4$
$v_5 =$	$+\tau_3 + \tau_4$	$+t^0_3 - t^0_4 - h_5$
$v_6 =$	$-\tau_2 + \tau_4$	$-t^0_2 + t_4 - h_6$
$v_7 =$	$-\tau_4$	$-t^0_4 + H_C - h_7$
$v_8 =$	$+\tau_3$	$+t^0_3 - H_B - h_8$

Матрицю коефіцієнтів A та вектор вільних членів a_0 записують у табл. 2.32, стовпці 2-5. Вільні члени a_{i0} представляють в сантиметрах.

Обчислюють вектор контрольних сум параметричних рівнянь поправок:

$$a_{is} = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{io}.$$

У матричній формі $a_s = Ae + a_0$, де e – одиничний (підсумковий) вектор порядку $k*1$.

Записують a_{is} у стовпець 6 табл. 2.32.

Таблиця 2.32

Параметричні рівняння поправок $v = A\tau + a_0$

№ ходу	Матриця A				Вектор a_0, см	Вектор a_s, см
	a_1	a_2	a_3	a_4		
1	1	0	0	0	0,0	1,0
2	-1	1	0	0	0,0	0,0
3	-1	0	1	0	-1,9	-1,9
4	0	-1	1	0	-0,6	-0,6
5	0	0	1	-1	-2,3	-2,3
6	0	-1	0	1	3,5	3,5
7	0	0	0	-1	0,0	-1,0
8	0	0	1	0	0,0	1,0

Обчислення коефіцієнтів і вільних членів нормальних рівнянь $N\tau + \lambda = 0$.

Складають матрицю P – діагональну матрицю ваг результаті вимірів, тобто $\{P\}_{ii} = p_i$, $\{P\}_{ij} = 0$, для $i \neq j$.

Обчислюють матрицю коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок $N = A^T PA$ та вектор вільних членів $\lambda = A^T Pa_0$.

Результати записують у відповідні рядки та стовпці табл. 2.33.

Так, як матриця N – діагональна матриця, запишемо тільки верхню трикутну частину матриці N. В останніх рядках табл. 2.33 записують значення $a_0^T Pa_0$ та $a_s^T Pa_0$, які необхідні для обчислення в наступному [pv^2] за контрольними формулами.

Таблиця 2.33

Нормальні рівняння $N\tau + \lambda = 0$

	Матриця N				Вільний член λ
	a_1	a_2	a_3	a_4	
pa_1	3,36	-1,06	-0,90	0,00	1,71
pa_2		3,26	-1,21	-0,99	-2,75
pa_3			4,56	-0,95	-4,62
pa_4				2,79	5,66
$a_0^T Pa_0 = [pa_0 a_0]=$					20,8690
$a_s^T Pa_0 = [pa_s a_0]=$					20,8690

Розв’язують систему нормальних рівнянь методом оберненої матриці N.

$$\tau = - N^{-1}\lambda \,.$$

Знайдені поправки τ_i до наближених значень параметрів записують у стовпець 5 табл. 2.31.

Вирівняні значення параметрів $t_j = t^0_j + \tau_j$ (вирівняні висоти визначених реперів) записують в стовпець 6.

Обернену вагову матрицю вирівняних висот визначених реперів

$Q_t = N^{-1}$ записують в табл. 2.34.

Так, як ця матриця симетрична, записують тільки її верхню трикутну частину.

Таблиця 2.34

Обернена вагова матриця Q_t вирівняних висот визначених реперів (вирівняних параметрів)

Параметр	Елемент мережі	Обернена вагова матриця Q_t=N^{-1}			
		Q_{j1}	Q_{j2}	Q_{j3}	Q_{j4}
t_1	H_{Pn1}	0,43	0,25	0,18	0,15
t_2	H_{Pn2}	0,25	0,58	0,26	0,30
t_3	H_{Pn3}	0,18	0,26	0,37	0,22
t_4	H_{Pn4}	0,15	0,30	0,22	0,54

Знаходять із параметричних рівнянь поправок поправки v_i та потім вирівняні результати вимірів. У матричній формі $v = A\tau + a_0$, $l = l + v$ або

$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + ... + a_{ik}\tau_k + a_{i0}$, $\overline{l_i} = l_i + v_i$ $(\ \overline{h_i} = h_i + v_i\ )$.

Поправки до перевищень записують в стовпці 5 табл. 2.27.

Вирівняні значення перевищень записують в стовпці 6 табл. 2.27.

Перевіряють виконанння рівності $\overline{l_i} = \psi_i(\ t_1,t_1,...,t_k\ )$, тобто чи рівні значення вирівняних результатів вимірів $\overline{h_i} = h_i + v_i$, обчислених у пункті 6, та обчислених за параметричними рівняннями зв’язку $\psi_i(\ t_1,t_2,...,t_k)$. Результат контролю записують в стовпцях 7 та 8 табл. 2.27.

Обчислюють $[pv^2]$ за основною та контрольною формулами:

$$[pv^2] = v^TPv = 6{,}3979;$$

$$[pv^2] = a^T_0PA\tau + a^T_0Pa_0 = 6{,}3979;$$

$$[pv^2] = a^T_sPA\tau + a^T_sPa_s = 6{,}3979.$$

Середня квадратична похибка одиниці ваги $\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = 1{,}26$см.

Середня квадратична похибка на 1 км ходу $m_{1км} = \frac{\mu}{\sqrt{c}} = 3{,}27$ мм.

Середні квадратичні похибки вирівняних висот визначених реперів:

Таблиця 2.35

№ ходу i	Обернена вагова матриця вирівняних перевищень Q_h							
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}	Q_{i5}	Q_{i6}	Q_{i7}	Q_{i8}
1	0,4263	-0,1739	-0,2435	-0,0696	0,0304	-0,1001	-0,1523	0,1827
2		0,4985	0,2557	-0,2428	-0,0618	-0,1809	-0,1436	0,0818
3			0,4325	0,1768	0,1202	0,0566	-0,0687	0,1890
4				0,4196	0,1821	0,2375	0,0749	0,1072
5					0,4695	-0,2875	0,3188	0,1507
6						0,5250	-0,2440	-0,0435
7							0,5399	-0,2210
8								0,3717

$$m_{рп11} = \mu\sqrt{\{Q_t\}_{11}} = 0{,}83см;$$

$$m_{рп12} = \mu\sqrt{\{Q_t\}_{22}} = 0{,}96 \text{ см};$$

$$m_{рп13} = \mu\sqrt{\{Q_t\}_{33}} = 0{,}77см;$$

$$m_{рп14} = \mu\sqrt{\{Q_t\}_{44}} = 0{,}93 \text{ см}.$$

Обчислюють обернену вагову матрицю вирівняних перевищень – матрицю $Q_h = AQ_tA^T$ та записують її в табл. 2.35.

Відповідно до завдання:

$$F_1 = \bar{h}_1 = t_1 - H_A\ ;$$

$$F_2 = \bar{h}_2 = t_2 - t_1\ ;$$

$$F_3 = \bar{h}_3 = t_3 - t\ ;$$

$$F_4 = \bar{h}_4 = t_3 - t_2\ ..$$

Далі складають матрицю F - $f_{ij} = (\partial F_i/\partial t_l)_0$.

Обернена вагова матриця вирівняних параметрів $Q_t = N^{-1}$ обчислена.

Обчислюють обернену вагову матрицю функцій $Q_F = FQ_t\ F^T$.

Результати обчислень записують в табл. 2.36.

Таблиця 2.36

Задані функції вирівняних параметрів

№ функції i	Формула	Матриця F				Обернена вагова матриця функцій $Q_F=FQ_tF^T$			
		t_1	t_2	t_3	t_4	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}
1	t_4-t_1	-1	0	0	1	0,6616	0,2740	0,0436	-0,0052
2	H_C-t_1	-1	0	0	0	0,2740	0,4263	-0,2524	0,0696
3	t_2	0	1	0	0	0,0436	-0,2524	0,5770	-0,3124
4	t_3-t_2	0	-1	1	0	-0,0052	0,0696	-0,3124	0,4196

Обчислюють середні квадратичні похибки функцій:

$$m_{F1} = \mu \sqrt{\{Q_F\}_{11}} = 1{,}03 \text{ см};$$

$$m_{F2} = \mu \sqrt{\{Q_F\}_{22}} = 0{,}83 \text{ см};$$

$$m_{F3} = \mu \sqrt{\{Q_F\}_{33}} = 0{,}96 \text{ см};$$

$$m_{F4} = \mu \sqrt{\{Q_F\}_{44}} = 0{,}82 \text{ см}.$$

Задача 2.42

Вирівняти нівелірну мережу (схема мережі – рис. 2.6, вихідні дані – табл. 2.37, результати вимірів – табл. 2.38) за способом найменших квадратів корелатним методом. Необхідно обчислити вирівняні висоти, вирівняні результати вимірів (перевищення $\bar{h}_i$) та їх обернену вагову матрицю $Q_{\bar{h}_i}$, середню квадратичну похибку одиниці ваги μ та середню квадратичну похибку на один кілометр ходу $m_{1км.}$ Визначити точність вирівняних значень наступних елементів мережі: u_1 – перевищення між Рп11 та Рп14; u_2 – перевищення між Рп11 та РпС; u_3 – вирівняна висота Рп12; u_4 – вирівняне перевищення за ходом 4. Оцінити точність вирівняних значень висот вузлових реперів.

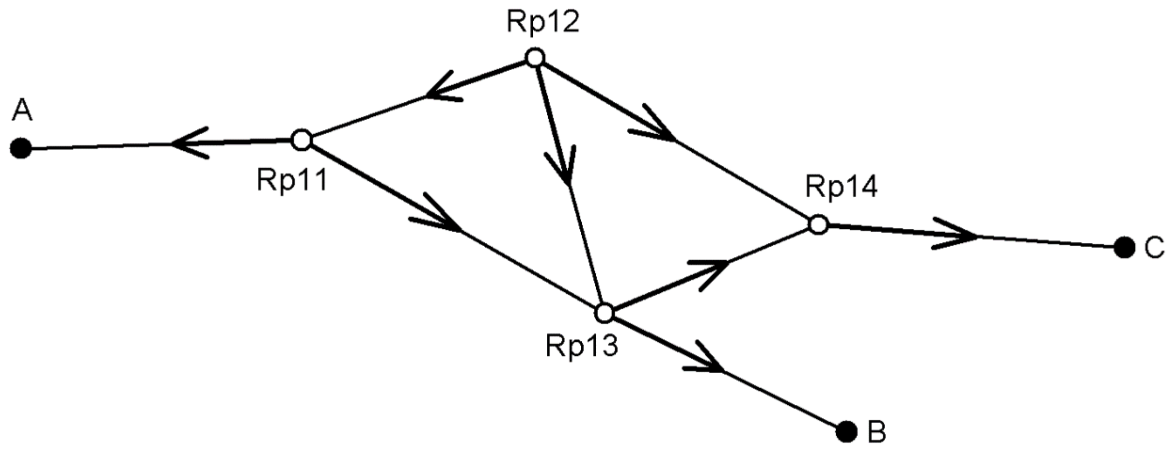


Рис. 2.6. Схема нівелірної мережі

Викреслюють схему мережі, записують в табл. 2.37 вихідні дані та у табл. 2.38 результати вимірів.

Таблиця 2.37

Вихідні репери

Позначення вихідного репера	Висота репера, м
A	188,462
B	188,838
C	186,298

Таблиця 2.38

Результати вимірів

№ ходу i	Репери		Виміряне перевищення h_i, м	Довжина ходу L_i, км
	початковий	кінцевий		
1	A	Рп11	2,186	10,7
2	Рп11	Рп12	1,566	14,2
3	Рп11	Рп13	-0,302	16,7
4	Рп12	Рп13	-1,881	12,4
5	Рп14	Рп13	0,915	15,8
6	Рп12	Рп14	-2,814	15,1
7	Рп14	C	-3,137	17,8
8	B	Рп13	1,489	10,0

Обчислюють кількість виміряних величин $n = 8$;

необхідних вимірів $k = 4$;

надлишкових вимірів $r = n - k = 4$.

Вибирають метод вирівнювання. За умовою – корелатний.

Таблиця 2.39

Виміряні величини

№ ходу i	Виміряне перевищення h_i, м	Довжина хода L_i км	Вага p_i=15/L_i	Обернена вага $q_i=1/p_i$	Поправка $v=Q_l B^T k$ v_i, см	Вирівняні превышення $h_i + v_i$, м
1	2,186	10,7	1,40	0,71	-0,05	2,1855
2	1,566	14,2	1,06	0,95	0,75	1,5735
3	-0,302	16,7	0,90	1,11	-0,97	-0,3117
4	-1,881	12,4	1,21	0,83	-0,42	-1,8852
5	0,915	15,8	0,95	1,05	0,06	0,9156
6	-2,814	15,1	0,99	1,01	1,32	-2,8008
7	-3,137	17,8	0,84	1,19	1,48	-3,1222
8	1,489	10,0	1,50	0,67	0,88	1,4978

На схемі вказують вибрані полігони:

$$\varphi_1 = \overline{h_2} - \overline{h_3} + \overline{h_4} = 0;$$
$$\varphi_2 = -\overline{h_4} + \overline{h_5} + \overline{h_6} = 0;$$
$$\varphi_3 = \overline{h_1} + \overline{h_2} + \overline{h_6} + \overline{h_7} - (H_C - H_A) = 0;$$
$$\varphi_4 = -\overline{h_5} + \overline{h_7} + \overline{h_8} - (H_C - H_B).$$

Обчислюють нев’язки умовних рівнянь зв’язку:

$$w_j = \varphi_j(l_1, l_2, ..., l_n)$$

Перевіряють відсутність грубих похибок у результати вимірів, знайдені значення нев’язок записуємо в останній стовпець табл. 2.40.

Елементи мережі, точність яких необхідно визначити, представимо як функції вирівняних результатів вимірів:

$$u_1 = \overline{h_2} + \overline{h_6};$$
$$u_2 = \overline{h_2} + \overline{h_6} + \overline{h_7};$$
$$u_3 = H_A + \overline{h_1} + \overline{h_2};$$
$$u_4 = \overline{h_4}.$$

Складання умовних рівнянь поправок:

$$b_{j1}v_1 + b_{j2}v_2 + \cdots + b_{jn}v_n + w_j = 0 \qquad j = 1,2 \ldots r\,.$$

Таблиця 2.40

Умовні рівняння поправок $Bv+w = 0$

Умовні рівняння зв'язку		Матриця B								Вільний член
№	формула	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	w_i, см
φ_1	h_2-h_3+h_4	0	1	-1	1	0	0	0	0	-1,30
φ_2	-h_4+h_5+h_6	0	0	0	-1	1	1	0	0	-1,80
φ_3	h_1+h_2+h_6+$h7$-(H_c-H_A)	1	1	0	0	0	1	1	0	-3,50
φ_4	-h_5+h_7+h_8-(H_C-H_B)	0	0	0	0	-1	0	1	1	-2,30

Складання нормальних рівнянь корелат Nk + w = 0.

Таблиця 2.41

Складання нормальних рівнянь корелат $Nk+w$=0

	Матриця N=BQ_lB^T				Вільний член w_i, см	Контрольна сума s=Ne+w	Корелати k_j
	k_1b_1]	k_2b_2]	k_3b_3]	k_4b_4]			
[qb_1	2,89	-0,83	0,95	0,00	-1,30	1,71	0,87
[qb_2		2,89	1,01	-1,05	-1,80	0,21	1,38
[qb_3			3,85	1,19	-3,50	3,49	-0,07
[qb_4				2,91	-2,30	0,74	1,32

[w]= – 8,9.

Для розв'язання системи нормальних рівнянь використовують метод оберненої матриці N.

$$Q_t = N^{-1}.$$

Таблиця 2.42

Матриця Q_t=N^{-1}

Елемент мережі	Обернена вагова матриця Q_t=N^{-1}			
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}
H_{Pn1}	0,5493	0,3571	-0,3067	0,2546
H_{Pn2}		0,7607	-0,4248	0,4491
H_{Pn3}			0,5642	-0,3842
H_{Pn4}				0,6636

Обчислення поправок v_i до результатів вимірів (перевищенням) за корелатними рівняннями поправок:

$$v = Q_l B^T k.$$

Далі обчислюють [pv^2] за формулами:

$$[pv^2] = v^T P v = 6{,}3979;$$
$$[pv^2] = -w^T k = 6{,}3979;$$
$$[pv^2] = -(S^T k + [w]) = 6{,}3979.$$

СКП (середня квадратична похибка) одиниці ваги: $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = 1{,}26$ см.

СКП на 1 км хода: $m_{1км} = \frac{\mu}{\sqrt{c}} = \frac{1{,}26}{\sqrt{15}} = 3{,}3$ мм.

Обчислюють обернену вагову матрицю поправок.

Таблиця 2.43

Обернена вагова матриця поправок Qv

№ ходу i	Обернена вагова матриця $Q_v = Q_l B^T N^{-1} B Q_l$							
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}	Q_{i5}	Q_{i6}	Q_{i7}	Q_{i8}
1	0,2871	0,1739	0,2435	0,0696	-0,0304	0,1001	0,1523	-0,1827
2		0,4482	-0,2557	0,2428	0,0618	0,1809	0,1436	-0,0818
3			0,6808	-0,1768	-0,1202	-0,0566	0,0687	-0,1890
4				0,4071	-0,1821	-0,2375	-0,0749	-0,1072
5					0,5838	0,2875	-0,3188	-0,1507
6						0,4817	0,2440	0,0435
7							0,6468	0,2210
8								0,2950

Обчислюють обернену вагову матрицю вирівняних результатів вимірів $Q_{\bar{l}}$.

Таблиця 2.44

Обернена вагова матриця вирівняних результатів вимірів $Q_{\bar{l}}$

№ ходу i	Обернена вагова матриця $Q_{\bar{l}} = Q_l - Q_v$							
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}	Q_{i5}	Q_{i6}	Q_{i7}	Q_{i8}
1	0,4263	-0,1739	-0,2435	-0,0696	0,0304	-0,1001	-0,1523	0,1827
2		0,4985	0,2557	-0,2428	-0,0618	-0,1809	-0,1436	0,0818
3			0,4325	0,1768	0,1202	0,0566	-0,0687	0,1890
4				0,4196	0,1821	0,2375	0,0749	0,1072
5					0,4695	-0,2875	0,3188	0,1507
6						0,5250	-0,2440	-0,0435
7							0,5399	-0,2210
8								0,3717

Обчислюють значення заданих функцій за врівноваженими перевищеннями та записують їх значення в стовпці 4-11 табл. 2.45.

Таблиця 2.45

Функція вирівняних результатів вимірів (вирівняних перевищень)

Номер функції i	Формула $f_j(l_1,l_2,\ldots,l_n)$	Значення, м	Матриця F							
			l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
u_1	$\overline{h_2}+\overline{h_6}$	-1,2273	0	1	0	0	0	1	0	0
u_2	$\overline{h_2}+\overline{h_6}+\overline{h_7}$	-4,3495	0	1	0	0	0	1	1	0
u_3	$H_A+\overline{h_1}+\overline{h_2}$	192,2210	1	1	0	0	0	0	0	0
u_4	$\overline{h_4}$	-1,8852	0	0	0	1	0	0	0	0

Обчислюють обернену вагову матрицю функцій $Q_{\overline{F}} = FQ_hF^T$.

Таблиця 2.46

Обернена вагова матриця $Q_{\overline{F}}$

Параметр	Матриця			
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}
1	0,6616	0,2740	0,0436	-0,0052
2		0,4263	-0,2524	0,0696
3			0,5770	-0,3124
4				0,4196

Обчислюють СКП вирівняних перевищень $m_{\overline{h_i}} = \mu\sqrt{\{Q_{\overline{h}}\}_{ii}}$:

$m_{\overline{h1}}$= 0,83 см;
$m_{\overline{h2}}$ = 0,89 см;
$m_{\overline{h3}}$= 0,83 см;
$m_{\overline{h4}}$ = 0,82 см;
$m_{\overline{h5}}$= 0,87 см;
$m_{\overline{h6}}$= 0,92 см;
$m_{\overline{h7}}$ = 0,68 см;
$m_{\overline{h8}}$= 0,77 см.

Обчислюють СКП функцій після вирівнювання $m_{ui} = m_{fi} = \mu\sqrt{\{Q_F\}_{ii}}$:

m_{u1} = 1,03 см;
m_{u2}= 0,83 см;
m_{u3}= 0,96 см;
m_{u4}= 0,82 см.

Далі обчислюють значення заданих функцій за вирівняними перевищеннями та записують їхні значення в стовпці 5-12 табл. 2.47.

Таблиця 2.47

Функція вирівняних результатів вимірів (вирівняних перевищень)

Номер функції j	Еле-мент мережі	Формула $f_j(l_1,l_2,\ldots,l_n)$	Вирівня-не значення, м	Матриця F							
				l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
u_1	H_{Pn11}	$H_A+\overline{h_1}$	190,6475	1	0	0	0	0	0	0	0
u_2	H_{Pn12}	$H_A+\overline{h_1}+\overline{h_2}$	192,2210	1	1	0	0	0	0	0	0
u_3	H_{Pn13}	$H_B+\overline{h_8}$	190,3358	0	0	0	0	0	0	0	1
u_4	H_{Pn14}	$H_C-\overline{h_7}$	189,4202	0	0	0	0	0	0	-1	0

Обчислюють обернену вагову матрицю функцій $Q_{\overline{H}} = F_l Q_h F^T$.

Таблиця 2.48

Обернена вагова матриця $Q_{\overline{H}}$

Параметр	Матриця			
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}
1	0,4263	0,2524	0,1827	0,1523
2	0,2524	0,5770	0,2645	0,2959
3	0,1827	0,2645	0,3717	0,2210
4	0,1523	0,2959	0,2210	0,5399

Обчислюють СКП вирівняних висот реперів $m_{\overline{H}_j} = \mu\sqrt{\{Q_{\overline{H}}\}_{jj}}$:

$m_{\overline{H}_1}$ = 0,83 см;
$m_{\overline{H}_2}$ = 0,96 см;
$m_{\overline{H}_3}$ = 0,77 см;
$m_{\overline{H}_4}$ = 0,93 см.

РОЗДІЛ 3.
ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ, ЩО ВИНОСЯТЬСЯ НА ІСПИТ

1. Розкрийте елементи комбінаторики (переставлення).
2. Охарактеризуйте технологічну схему обробки проекту в програмному комплексі «MGSeti».
3. Опишіть елементи комбінаторики (розміщення).
4. Визначте основні характеристики програмного комплексу «MGSeti».
5. Наведіть формулу Байєса.
6. Розкрийте суть задачі методу матриці при врівноваженні параметричним та корелатним методами.
7. Виконайте оцінку параметрів Ө.
8. Опишіть порядок роботи при мережі за способом найменших квадратів параметричним методом.
9. Охарактеризуйте розподіл χ^2.
10. Визначте порядок роботи при врівноваженні мережі способом найменших квадратів корелатним методом.
11. Розкрийте порядок побудови статистичної функції рівнянь поправок (постановка задачі, перелік формул, визначень).
12. Опишіть процес побудови гістограми.
13. Як виконати обчислення коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь (параметричний метод)?
14. Розкрийте значення критерію згоди.
15. Як проводять оцінку точності польових вимірів за матеріалами вирівнювання (корелатний метод)?
16. Опишіть спосіб обчислення кореляційного моменту та коефіцієнта кореляції системи (X, Y).
17. Визначте суть задачі врівноваження геодезичних мереж.
18. Охарактеризуйте основні властивості ймовірності.
19. Як обчислити вагову матрицю вирівняних результатів вимірів Q?
20. Опишіть основні поняття теорії імовірності (експеримент, види подій, різновиди випадкових подій).

21. Як провести оцінку точності результатів врівноваження (параметричний метод)?

22. Опишіть теореми про математичне сподівання.

23. Як виконати оцінку точності польових вимірів за матеріалами вирівнювання (параметричний метод)?

24. Назвіть основні поняття теорії імовірності (сума, різниця, добуток випадкових подій).

25. Яким способом складають нормальні рівняння (параметричний метод врівноваження)?

26. Опишіть класичне, геометричне, статистичне означення імовірності.

27. Яким способом складають параметричні рівняння в матричній формі (параметричний метод)?

28. Охарактеризуйте елементи комбінаторики (сполучення).

29. Опишіть приведення рівнянь поправок до лінійного вигляду (параметричний метод).

30. Назвіть основні теореми імовірності.

31. Розкрийте параметри та рівняння поправок (параметричний метод).

32. Наведіть схему, формулу та теорему Бернулі.

33. Опишіть види геометричних умов, що виникають в геодезичних мережах.

34. Визначте числові характеристики випадкових величин (математичне сподівання, мода, медіана).

35. Як виконати оцінку точності функцій врівноважених величин (корелатний метод)?

36. Розкрийте рівномірний закон розподілу випадкової величини.

37. Як виконати оцінку точності результатів врівноваження вимірів (корелатний метод)?

38. Охарактеризуйте нормальний закон розподілу випадкових величин.

39. Опишіть метод розв’язання системи нормальних рівнянь (корелатний метод).

40. Розкрийте теореми про дисперсію.

41. Яким способом можна визначити вектор поправок (корелатний метод)?

42. Розкрийте закон розподілу випадкових величин, інтегральну функцію розподілу F(x), диференціальну функціу розподілу F′(x)=f(x), умовний закон розподілу.

43. Наведіть приклад приведення початкових умовних рівнянь до лінійного вигляду (корелатний метод).

44. Назвіть числові характеристики випадкових величин (дисперсія, стандарт, асиметрія, ексцес).

45. Визначте суть задачі врівноваження геодезичних вимірів. Опишіть основні шляхи та методи розв'язування задачі врівноваження.

46. Розкрийте значення системи випадкових величин, закон розподілу двомірної випадкової величини, інтегральну та диференціальну функції розподілу.

47. Опишіть основні класичні методи врівноваження геодезичних систем.

48. Охарактеризуйте систему випадкових величин, умовний закон розподілу.

49. Як виконати оцінку точності результатів врівноваження (параметричний метод)?

50. Опишіть числові характеристики статистичного розподілу.

51. Як виконати складання параметричних рівнянь поправок перевищень?

52. Назвіть основні поняття математичної статистики.

53. Опишіть складання параметричних рівнянь поправок сторін.

54. Визначте порядок врівноваження статистичного ряду.

55. Як виконати складання параметричних рівнянь поправок дирекційного кута?

56. Розкрийте значення критерію А. Колмогорова.

57. Охарактеризуйте загальні принципи складання параметричних рівнянь поправок.

58. Назвіть способи побудови довірчих інтегралів.

59. Опишіть параметри та рівняння поправок (параметричний метод).

РОЗДІЛ 4.
ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ, ЩО ВИНОСЯТЬСЯ НА ТЕСТИ

1. Завдання теорії похибок та способу найменших квадратів полягає у тому, щоб:

- вивчати закономірності, яким підлягають систематичні похибки вимірів;
- знайти способи визначення найменш надійних значень вимірів;
- вивчити закономірності, яким підлягають випадкові похибки вимірів, знайти способи визначення найбільш надійних значень вимірів і дати оцінку точності, знайти закон, згідно з яким проходить нагромадження похибок, як при вимірах, так і при обробці та їх врівноваженні;
- знайти закон згідно з яким не проходить нагромадження похибок, як при вимірах, так і при обробці і їхньому врівноваженні.

2. Хто вперше застосував принцип найменших квадратів математичної обробки в геодезичній практиці у 1806 році?

- А. Лежандр;
- П. Лаплас;
- Л. Ейлер.

3. Кого називають справжнім творцем способу найменших квадратів?

- Піацці;
- Майєр;
- К.Ф. Гаусс;
- Чебишев.

4. Закон великих чисел пов'язаний з прізвищем?

- Ганзена;
- Бесселя;
- Чебишева;
- Гельмерта.

5. Зародки теорії ймовірностей знаходимо в дослідженнях:

- Гензена;
- Попова;

- Паскаля, Ферма, Гюйгенса;
- Урмаєва.

6. Хто автор праці «Аналітична теорія ймоірностей»?

- Бессель;
- Пірсон;
- Кросовський;
- Лаплас.

7. Новий період у розвитку теорії ймовірностей середини XIX століття пов'язаний з іменами:

- Гаусса;
- Чебишева, Маркова, Ляпунова;
- Лежандра.

8. Фундаментальні праці з теорії ймовірностей належать:

- Чеботарьову;
- Попову;
- Урмаєву;
- Колгоморову, Берштейну;
- Красовському.

9. Виміри повинні задовільнятися такими умовами: 1. Величина одиниці міри повинна бути добре відома. 2. Величина обєкта під час його вимірювання повинна бути практично незмінною.

- тільки в другій умові;
- тільки в першій умові;
- першій та другій умовам;
- жодній з вище наведених умов.

10. Вимір називається прямим, якщо:

- невідома величина визначається шляхом обчислень, як функція інших безпосередньо виміряних величин;
- вимірювана величина безпосередньо порівнюється із своєю одиницею міри.

11. Вимір називається непрямим, якщо:

o вимірювана величина безпосередньо порівнюється із своєю одиницею міри;

o невідома величина визначається шляхом обчислень, як функція інших безпосередньо виміряних величин.

12. Виміри однієї або декількох однорідних величин називаються однорідними, якщо:

o вони проведені при неоднакових умовах;

o вони проведені при однакових умовах.

13. Виміри однієї або декількох однорідних величин називаються неоднорідними, якщо:

o вони проведені при однакових умовах;

o вони проведені при неоднакових умовах.

14. Які виміри називають необхідними?

o ті виміри, які необхідно було провести, щоб одержати хоча б одну систему значень шуканих величин;

o виміри проведені понад необхідну кількість.

15. Які виміри називають додатковими?

o ті виміри, які необхідно було провести, щоб одержати хоча б одну систему значень шуканих величин;

o виміри проведені понад необхідну кількість.

16. Які виміри називають умовними?

o про які відомо, що їхні результати повинні задовільняти певні теоретичні умови;

o ті виміри, які необхідно провести, щоб одержати хоча б одну систему значень шуканих величин.

17. Назвіть основні складові вимірювального процесу:

o об'єкт виміру, суб'єкт виміру, інструмент, за допомогою якого проводиться вимір, умови зовнішнього середовища, в яких проводиться вимір;

o інструмент, за допомогою якого проводиться вимір;

o об'єкт виміру;

o умови зовнішнього середовища, в яких проводиться вимір.

18. Похибки за своїм походженням поділяють на:

o інструментальні, персональні, змішані;

o особисті;

o похибки зовнішнього середовища.

19. На які категорії можуть бути поділені інструментальні похибки?

o похибки, обумовлені недосконалістю встановлення окремих частин інструмента, не цілком точною юстировкою та встановленням інструмента в робоче положення для спостережень та зміною властивостей інструмента з бігом часу;

o похибки, обумовлені недосконалістю зміною властивостей інструмента з бігом часу;

o похибки, обумовлені недосконалістю виготовлення окремих частин інструмента;

o похибки, обумовлені не цілком точною юстировкою інструмента.

20. Особисті похибки – це похибки, що обумовлені: 1) обмеженою чутливістю органів чуття; 2) недостатньою кваліфікацією спостерігача; 3) недостатньою досвідченістю спостерігача; 4) психіко-фізіологічними особливостями спостерігача; 5) станом спостерігача?

o усі визначення;

o тільки перше;

o четверте та п’яте.

21. Які фактори та умови зовнішнього середовища обумовлюють похибки зовнішнього середовища?

o температура, атмосферний тиск, вологість, непрозорість повітря, вітер, рельєф місцевості, нестійкість ґрунту;

o рельєф місцевості;

o нестійкість ґрунту, атмосферний тиск.

22. За характером впливу на результати вимірів та за своїми властивостями похибки поділяють на:

o систематичні, грубі та випадкові;

o грубі;

o систематичні.

23. Систематичні похибки поділяють на:

- постійні та змінні;
- змінні та грубі;
- постійні.

24. Змінними систематичними похибками називають похибки, що:

- змінюють свою величину і знак за певним законом, аналітична форма якого залежить від характеру впливу на результат виміру тієї причини, що обумовлює появу даної похибки;
- тільки знак;
- тільки величину.

25. Грубими похибками називають ті, що:

- мають недопустиму величину при даних умовах вимірів;
- менше потрійної середньої квадратичної похибки;
- менше подвійної середньої квадратичної похибки.

26. Середнє арифметичне з результатів рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини прямує до істинного значення цієї величини при необмеженому зростанні кількості вимірів – це:

- принцип арифметичної середини;
- загальне середнє арифметичне.

27. Число, яке визначає якість результату виміру, міру його надійності – це:

- вага;
- коефіцієнт пропорційності.

28. При визначенні ваг повинно бути задоволено умови:

- виміри, за якими визначають середні квадратичні похибки, а потім ваги повинні бути вільними від систематичних похибок, а середні квадратичні похибки, по яких обчислюють ваги, повинні бути визначені надійно з достатньої кількості вимірів;
- виміри, по яких обчислюють ваги повинні мати випадкові та систематичні похибки.

29. За якою формулою розраховують арифметичне середнє, якщо у результаті повторних рівноточних вимірів величин X отримано ряд результатів $x_1, x_1, \ldots, x_n$?

- $\overline{X} = \frac{[x]}{n}$;
- $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ,\ldots, + x_n}{n}$;
- $\overline{X} = \frac{x}{n}$.

30. Чи зручно для обчислень взяти умовне значення близьке до виміряних результатів x_0 та обчислити різниці $\varepsilon_i = x_i - x_0$?

- так;
- ні.

31. За якою формулою обчислюють величину систематичної похибки λ при відомому істинному значенні X?

- $\lambda = \frac{[x]}{n}$;
- $\lambda = \frac{x_1 + x_2 + ,\ldots, + x_n}{n}$;
- $\lambda = \overline{X} - X$.

32. За якою формулою обчислюють абсолютні похибки вимірів при заданому істинному значенні X?

- $\lambda = \frac{[x]}{n}$;
- $\Delta_i = x_i - X, (i = 1, n)$;
- $\lambda = \overline{X} - X$.

33. За якою формулою обчислюють ймовірні похибки, коли невідоме істинне значення вимірюваної величини X?

- $\Delta_i = x_i - X$;
- $V_i = x_i - X, (i = 1, n)$;
- $\lambda = \frac{[x]}{n}$.

34. Який контроль у межах точності обчислень, коли ймовірні похибки V_i?

- $[V_i] = 0, (i = 1, n)$;
- $[V_i] \neq 0$;

○ $V_i = x_i - X$.

35. За якою формулою вираховується середня квадратична похибка окремого виміру за формулою Гаусса?

○ m = $\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$;

○ m = $\sqrt{\frac{[V^2]}{(n-1)}}$;

○ M = $m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

36. За якою формулою вираховується середня квадратична похибка окремого виміру за формулою Бесселя?

○ m = $\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$;

○ m = $\sqrt{\frac{[V^2]}{(n-1)}}$;

○ M = $m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

37. За якою формулою вираховується середня квадратична похибка середнього арифметичного?

○ m = $\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$;

○ m = $\sqrt{\frac{[V^2]}{(n-1)}}$;

○ M = $m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

38. Чи обчислюють середню квадратичну похибку середньої квадратичної похибки арифметичного середнього за формулою $m_M = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$?

○ так;

○ ні.

39. Чи правильним є визначення, що дисперсійний аналіз – це статистичний метод аналізу спостережень, результати яких залежать від різних, одночасно діючих і найбільш важливих факторів?

○ так;

○ ні;

○ визначення неповне.

40. Якщо досліджується вплив одного фактора, тоді розглядається однофакторний комплекс (виконується однофакторний дисперсійний аналіз)?

o однофакторний комплекс розглядається, якщо досліджується вплив одного фактора;

o однофакторний комплекс розглядається, якщо досліджується вплив багатьох факторів.

41. Чи маємо справу з дво- або багатофакторним комплексом і відповідним дисперсійним аналізом, якщо вивчаються два і більше факторів відповідно?

o так;

o ні;

o можливо.

42. Чи можемо ми наблизитись до істинних значень вимірювань?

o ми можемо наблизитись до істинних значень, коли вдосконалюються методи вимірювань;

o ні, ми можемо наблизитись до істинних значень;

o ні, ми можемо наблизитись до істинних значень, коли вдосконалюються методи вимірювань.

43. Для чого застосовують розміри і характеристики похибок вимірювань?

o розміри і характеристики похибок застосовують для визначення надійності значення вимірювань фізичних величин, при отриманні вимірів найбільш близьких до істинних;

o розміри і характеристики похибок застосовують для визначення надійності точних значень;

o розміри і характеристики похибок не застосовують для визначення надійності значення вимірювань фізичних величин, при отриманні вимірів найбільш близьких до істинних.

44. Чи правильна формула загального середнього для m спостерігачів та n вимірювань $\overline{X} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_j$?

o так;

o ні.

45. Запишемо суму квадратних відхилень вимірів $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X})^2$ для m спостерігачів та n вимірювань. Що означає величина $\overline{X}$ у формулі?

- значення загального середнього вимірів;
- довільне значення вимірів;
- довільне значення.

46. Принцип найменших квадратів запишеться?

- $V^TPV = min$;
- $V^TPV = max$;
- $VPV^T = min$.

47. Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь параметричного методу знаходиться?

- $N = (A^T PA)^{-1}$;
- $N = A^T PA$;
- $N = A^T$.

48. Параметричні рівняння мають вигляд?

- $A\tau + L = V$;
- $A\tau + L = 0$;
- $A^TL + \tau= V$.

49. Нормальні рівняння корелат запишуться?

- $(A^TA) K+ W = 0$;
- $(AA^T) K+ W = 0$;
- $(A^TA) K+ W = V$.

50. Вектор поправок до результатів вимірів корелатного методу обчислюється?

$V = P^{-1}A^TK$;

$V = PA^TK$;

$V = P^{-1}K^TA$.

ВИСНОВКИ

Матеріал навчального посібника стосується однієї з найбільш наукоємних дисциплін «Математична обробка геодезичних вимірів», що використовують при підготовці студентів за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій».

Теоретична частина посібника доповнена практичним матеріалом для виконання лаборатоних занять. У зв'язку з цим навчальний матеріал подано так, щоб він був основою для прикладної технології навчання. Тому перший розділ містить відомості стосовно опрацювання лекційного матеріалу з основи теорії похибок вимірів, обчислення рівноточних і нерівноточних вимірів, вивчення основних понять теорії ймовірностей, ймовірнісних характеристик випадкових величин та статистичних рядів, а також загальні поняття про параметричний метод врівноваження та метод найменших квадратів. Така структура навчального посібника дає можливість студенту краще орієнтуватися у матеріалі та структурувати свої знання, скоротити час для підготовки до лабораторних занять.

Другий розділ навчального посібника «Математична обробка геодезичних вимірів» містить вісім лабораторних робіт, у яких викладено методику, способи розподілу та властивостей випадкових похибок, обробки результатів рівноточних та нерівноточних вимірів, визначено основні поняття теорії ймовірностей та закони розподілу випадкових величин, поняття математичної статистики, зокрема вирівнювання статистичного ряду, застосування параметричного та корелатного методу врівноваження геодезичних мереж.

Третій та четвертий розділи містять перелік питань, що виносяться на іспит та тести. Розроблений навчальний посібник забезпечується інформаційною підтримкою, тобто посиланнями на рекомендовану літературу, а також довідковими даними.

Інноваційний характер викладу навчального матеріалу у формі посібника передбачає опрацювання теоретичних засад та проведення експериментальних досліджень з метою переходу від традиційного викладання навчального матеріалу у вигляді методичних вказівок до сучаснішої форми викладання навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» у вигляді опису самої технології навчання. Такий технологічний підхід до подання навчального матеріалу, на наш погляд, забезпечить широке застосування інформаційних технологій у забезпеченні якості освіти для студентів землевпорядної галузі у закладах вищої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айвазян С. А., Ешоков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основи моделирования и первинная обработка данных: справочное издание. Москва: Финансы и статистика, 1983. 471 с.

2. Белугин Д. А. Теория обработки результатов геодезических и астрономических измерений. Москва: Недра, 1984. 112 с.

3. Большаков В. Д., Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. Москва: Недра, 1977. 366 с.

4. Большаков В. Д., Маркузе Ю. И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Москва: Недра, 1984. 352 с.

5. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. Москва: Наука, 1983. 416 с.

6. Бугай П. Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів. Львів: Львівський університет, 1960. 366 с.

7. Бурмистров Г. А. Основы способа наименьших квадратов. Москва: Госгеотехиздат, 1963.392 с.

8. Варден Б. Л. Математическая статистика / за ред. Н. В. Смирнова. Москва, 1960. 434 с.

9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1964. 576 с.

10. Видуев Н. Г., Григоренко А. Г. Математическая обработка геодезических измерений. Київ: Вища школа, 1978. 376 с.

11. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: навч. посіб. Київ: КНУБА, 2005. 236 с.

12. Геодезичний енциклопедичний словник / за ред. В. Літинського. Львів: Євросвіт, 2001. 668 с.

13. Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Москва, 1966. 340 с.

14. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Москва: Наука, 1969. 400 с.

15. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторыэ ришения. Москва: Наука, 1985. 390с.

16. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Москва, 1972. 456 с.

17. Длин А. М. Математическая статистика в технике. Москва: Советская наука, 1958. 466 с.

18. Ефимов Н. В. Квадратические формы и матрицы. Москва: Физматгиз, 1963. 159 с.

19. Зазуляк П. М., Гаврик В. І., Євсеєва Е. М., Йосипчук М. Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Львів: Растр, 2007. 408 с.

20. Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. Москва: Геодезиздат, 1947. 359 с.

21. Кемниц Ю. В. Теория ошибок наблюдений. Москва: Недра, 1967. 175 с.

22. Крамер Г. Математические методы статистики. Москва: Мир, 1975. 684 с.

23. Мазмишвили Л. И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов. Москва: Недра, 1978. 311 с.

24. Мазмишвили Л. И., Беляев Б. И. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, 1959. 372 с.

25. Маркузе Ю. И. Алгоритми для уравнивания геодезических сетей на ЗИМ. Москва: Недра, 1989.248 с.

26. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математической статистики. Москва: Наука, 1979. 496 с.

27. Романовский В. И. Применение математической статистики в опытном деле. Москва: Гостехиздат, 1947. 247 с.

28. Смирнов Н. В., Белугин Д. А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. Москва: Недра, 1969. 384 с.

29. Смирнов Н. В., Дунин-Барковекий И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Москва: Наука, 1965. 511 с.

30. Справочник геодезиста / под ред. В. Д. Большакова, Г. П. Левчука. Москва: Недра, 1966. 984 с.

31. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Москва: Геодезиздат, 1958. 606 с.

32. Чистяков В. П. Курс теории вероятности. Москва: Наука, 1978. 224 с.

33. Шилов П. И. Способ наименьших квадратов. Москва: Геодезиздат, 1941. 407 с.

34. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. Москва: Наука, 1969. 365 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця значень інтеграла ймовірностей

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

t	Ф(*t*)	*t*	Ф(*t*)	*t*	Ф(*t*)
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07966	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,91087	2,95	0.99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,928I4	3,10	0,99806
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57679	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,99990
1,00	0,68269	2,25	-4,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,40	0,99999
1,20	0,76986	2,45	0,98571	4,50	0,999994

Додаток Б

Допоміжна таблиця для обчислення ординат кривої нормального розподілу

за формулою $y = y'h$

Згідно з таблицею обчислюють $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$ за аргументом *t*.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5631	5,5629	0,5624	0,5619
0,10	5614	5607	5602	5595	5588	5579	5571	5561	5551	5541
0,20	5530	5518	5507	5494	5481	5469	5455	5440	5425	5409
0,30	5394	5377	5360	5343	5325	5306	5288	5268	5250	5228
0,40	5209	5187	5166	5143	5121	5098	5076	5052	5028	5003
0,50	4979	4954	4929	4903	4876	4849	4822	4796	4769	4740
0,60	4712	4684	4656	4626	4598	4568	4538	4507	4477	4446
0,70	4417	4385	4354	4322	4291	4258	4227	4195	4162	4129
0,80	4097	4064	4030	3998	3964	3932	3898	3864	3831	3797
0,90	3763	3729	3695	3661	3627	3594	3558	3524	3490	3456
1,00	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,10	308	304	302	298	295	292	288	284	282	278
1,20	275	272	268	265	262	258	256	252	248	246
1,30	242	240	236	233	230	227	224	221	218	214
1,40	212	209	206	203	200	197	194	192	189	186
1,50	183	180	178	175	172	170	167	165	162	159
1,60	156	154	152	149	147	145	142	140	138	135
1,70	133	131	129	126	124	122	120	118	116	114
1,80	112	110	108	106	104	102	100	098	096	094
1,90	093	091	090	088	086	084	083	081	080	078
2,00	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,10	062	061	060	058	057	056	055	053	052	051
2,20	050	049	048	047	046	045	044	043	042	041
2,30	040	039	038	038	037	036	036	034	033	032
2,40	032	031	030	030	029	028	027	027	026	025
2,50	025	024	024	023	022	022	021	021	020	020
2,60	019	019	018	018	017	017	016	016	016	015
2,70	015	014	014	014	013	013	012	012	012	011
2,80	011	011	011	010	010	010	009	009	009	009
2,90	008	008	008	008	008	007	007	007	007	007
3,00	006									

Додаток В

Варіанти завдань до задачі 2.8

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$U=\frac{x}{y}+td(yz)$	22	$U=\ln tg\frac{x}{y}+x^2\sqrt{y}$
2	$U=x\sin^2 y+y^2\sqrt{z}$	23	$U=x^x+y^{2x}$
3	$U=\frac{x^3}{\sqrt{y}}+\ln(xz)$	24	$U=arctg(x+y\sqrt{1+z^2})$
4	$U=2x-0{,}5y-0{,}8z$	25	$U=y^2\cos z+\sqrt{xz}$
5	$U=\frac{\sqrt{x}}{y^2}-b^{3(x+z)}$	26	$U=\ln\cos\frac{x}{y}+z^2$
6	$U=tg(2xy)+\frac{\sqrt[3]{z}}{y}$	27	$U=3x^2-\frac{1}{3}y-2\sqrt{z}$
7	$U=10x^2+8y-0{,}5z+b$	28	$U=3x^2-\frac{1}{3}y-2\sqrt{z}$
8	$U=(1+y)\sqrt{2-x^2}\sqrt{3+y^2}$	29	$U=x^2+2\sqrt[3]{y}$
9	$U=\sin^n x*tgny$	30	$U=\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{x}}$
10	$U=0{,}2x+0{,}1y^2+0{,}5z^3$	31	$U=tgxz+\arcsin\frac{y}{x}$
11	$U=\sqrt{\frac{1+y^2}{1-2x}}\lg z$	32	$U=\frac{1}{x}(\ln^2 y++3\ln x-6)$
12	$U=\sqrt{xy}+\sqrt[3]{z}+2y$	33	$U=\ln tg\frac{x}{y}+\frac{1}{x^2}\sin y$
13	$U=e^x(1+tg\frac{y^3}{x})$	34	$U=\frac{1}{3^x}(\ln x\sin y+\cos y)$
14	$U=\ln(1+y)-0{,}2\ln(zx)$	35	$U=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{y^2+1}$
15	$U=0{,}2\sqrt{x}+0{,}3y^2$	36	$U=(1+x^2)\cos y+\frac{2}{y}\sin x$
16	$U=2\sqrt[3]{tgx}+\sqrt{\cos y}+tgz$	37	$U=e^x+y\sqrt{x}$
17	$U=2x+\sqrt{3y}$	38	$U=tg\frac{x}{2}-ctg\frac{y}{2}\sin x$
18	$U=\ln(xyz)$	39	$U=3x+\frac{2}{7}y^2$
19	$U=y\frac{2x-1}{3x+2}\cos x$	40	$U=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 y)$
20	$U=y^x+\sqrt{x}$	41	$U=y\ln^2 x+x\ln tgy$
21	$U=0{,}5x+0{,}4y-0{,}1z$	42	$U=\arcsin(zx\sqrt{1+y^2})$

Продовження додатка В

Варіант	Функція	Варіант	Функція
43	$U = \arcsin(z + x\sqrt{1+y^2})$	64	$U = \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}y + \frac{2}{5}z$
44	$U = \arcsin\frac{x}{y} - \lg\frac{z}{1}$	65	$U = x^2\sqrt{y} - \sin\frac{x}{z}$
45	$U = \sin xy^2 + \sqrt{xy}\frac{1}{z}$	66	$U = \sin^n x \cos ny$
46	$U = y^2\cos z + \sqrt{xz}$	67	$U = 0{,}5\sqrt{x} + 0{,}2y^2$
47	$U = \ln\sin xy + \frac{z^2}{y}$	68	$U = \sqrt[3]{x} + tg(4xz)$
48	$U = 2x - \frac{1}{3}y^2 - 2z$	69	$U = \sqrt[3]{\frac{1+y^3}{1+2x^2}\ln z}$
49	$U = 0{,}2x + 0{,}3y^2 - 0{,}8z$	70	$U = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt{z^3}$
50	$U = \ln(\frac{x}{y}) + tgxy$	71	$U = (1+x)\sqrt{2+x^2}$
51	$U = \frac{1+x^2}{1-x^2} + y\sqrt{x}$	72	$U = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1+y^2)$
52	$U = tg(xz) + \arccos\frac{y}{x}$	73	$U = 2x + \sqrt{5}y^2$
53	$U = \frac{1}{y}(\ln^2 x + 3\ln y - 4\ln z)$	74	$U = x^x + y^{2x}$
54	$U = 0{,}1x + 0{,}3y + \sqrt{y}$	75	$U = x^y + \sqrt[3]{y}$
55	$U = \ln tg(xy) + \frac{1}{y^2}\cos x$	76	$U = 4\sqrt[3]{ctg^2 x} + \sqrt[3]{tgy} + \sin z$
56	$U = \frac{1}{x^3}(\ln\sin y + tgz)\ 86$	77	$U = \sqrt{xy} + \lg z^3$
57	$U = \frac{2}{5}x - 0{,}1\sqrt{y}$	78	$U = \sqrt{xy} + \frac{1}{x^2 + 2y^2}$
58	$U = (1+y^2)\sin y + \frac{2}{y}$	79	$U = (-1 - x^2 - y^2 + z^2)2xy$
59	$U = tg\frac{x}{y} - ctg\frac{y}{2}\cos x$	80	$U = \arcsin(xy)$
60	$U = \sin(tg^2 x) + \ln\sin^2 y$	81	$U = \arccos(zx) + \frac{y^2}{x}$
61	$U = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$	82	$U = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x+y+z)^2}$
62	$U = \frac{x}{y} + tg(y^2 z)$	83	$U = tg(xz) + \frac{1}{y^2}\cos x$
63	$U = x^3\sqrt{y} + x\sin z$	84	$U = \ln\sin(xy) + \frac{1}{y^2}tgx$

Кінець додатка В

Варіант	Функція	Варіант	Функція
85	$U=\frac{x^2}{y}+\cos(y^2 z)$	93	$U=\frac{1}{x^2}(\ln\cos y+\sin z)$ 86
86	$U=\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}+\lg xz$	94	$U=\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{y}}{0{,}1}$
87	$U=x^2\sqrt{y}+x\sin^3 z$	95	$U=(1+y^2)+\sin y\cos y+\frac{2}{y}$
88	$U=3y^2+\frac{2}{y}\sin y$	96	$U=\frac{tgx}{y}-\frac{ctgy}{2}$
89	$U=\ln(xz)+\arccos\frac{1}{x}$	97	$U=\frac{tg^2x}{\sin x}+\ln\sin^2 y$
90	$U=0{,}1x+0{,}3y+\sqrt{y}$	98	$U=x\sqrt{y}+\frac{\sin z}{z}$
91	$U=\frac{x}{0.5}+\frac{y}{0{,}3}+\sqrt{z}$	99	$U=\frac{3}{x}-\frac{y}{6}+\frac{2}{5}z$
92	$U=\ln tg(xy)+y^2\cos\frac{x}{z}$	100	$U=\frac{\ln z}{x^3}+\lg\frac{z}{x}$

Додаток Г

Індивідуальні завдання до задачі 2.9

№ варіанту	Результати вимірювання кута 38º17´ + секунди								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	26,36	31,26	21,36	27,96	31,06	23,06	26,36	23,76	27,06
2	25,66	32,26	20,26	27,86	29,86	23,16	26,56	24,16	28,06
3	25,06	32,36	19,86	27,76	30,36	23,56	26,16	23,86	28,66
4	26,56	31,96	19,86	28,36	29,96	23,96	25,86	25,26	28,26
5	25,66	32,46	20,46	29,56	31,56	23,86	26,46	23,96	28,36
6	25,26	31,36	20,16	28,06	31,56	24,26	26,96	24,06	27,26
7	25,66	32,66	20,46	27,76	29,76	22,76	26,56	25,26	28,56
8	24,76	31,16	20,66	28,36	29,66	23,76	26,86	24,76	27,96
9	24,96	32,46	20,36	29,16	30,16	23,06	26,76	23,96	26,86
10	25,46	32,06	21,16	28,06	30,66	23,36	26,26	23,76	28,06
11	25,76	31,76	21,66	29,56	30,96	23,26	27,06	25,16	27,26
12	25,16	32,36	19,76	29,06	31,46	22,86	26,96	24,66	26,76
13	24,66	31,46	19,86	28,06	30,46	22,76	26,76	24,06	26,86
14	25,26	31,66	21,06	27,76	30,06	23,06	25,86	23,96	27,76
15	24,86	32,06	20,16	27,86	30,96	23,46	26,96	24,16	26,76
16	25,16	32,26	20,26	29,36	30,66	23,56	25,96	25,56	28,36
17	25,86	32,56	21,36	29,26	29,76	23,46	25,96	23,66	27,86
18	25,46	32,46	21,26	29,06	29,96	23,16	25,66	24,86	27,36
19	25,36	31,16	20,46	29,36	31,06	24,26	27,36	23,96	26,86
20	24,76	30,96	20,06	27,76	31,26	23,06	26,66	24,76	27,16
21	25,06	31,66	19,86	28,46	31,36	23,66	26,36	24,76	27,76
22	26,16	32,06	20,16	27,86	29,76	23,96	25,76	24,86	26,96
23	26,26	32,16	21,16	27,76	30,66	23,36	27,06	25,56	26,86
24	25,86	31,56	20,76	28,26	31,36	23,96	26,76	24,16	26,86
25	24,76	32,46	19,86	28,36	29,96	23,06	26,66	24,86	27,96
26	26,06	31,06	20,36	27,96	30,46	24,56	26,36	24,86	27,06
27	26,26	31,96	20,26	27,96	29,66	24,46	26,26	23,76	27,66
28	26,16	31,16	21,36	29,16	30,36	23,66	27,66	24,36	28,26
29	26,56	31,26	20,06	28,76	30,06	22,66	26,26	24,76	27,36
30	26,46	31,06	21,36	28,86	30,76	23,46	26,66	24,46	28,53

Продовження додатка Г

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
31	30,46	35,36	25,46	32,06	35,16	27,16	30,46	27,86	31,16
32	29,77	36,37	24,37	31,97	33,97	27,27	30,67	28,27	32,17
33	29,18	36,48	23,98	31,88	34,48	27,68	30,28	27,98	32,78
34	30,69	36,09	23,99	32,49	34,09	28,09	29,99	29,39	32,39
35	29,8	36,6	24,6	33,7	35,7	28	30,6	28,1	32,5
36	29,41	35,51	24,31	32,21	35,71	28,41	31,11	28,21	31,41
37	29,82	36,82	24,62	31,92	33,92	26,92	30,72	29,42	32,72
38	28,93	35,33	24,83	32,53	33,83	27,93	31,03	28,93	32,13
39	29,14	36,64	24,54	33,34	34,34	27,24	30,94	28,14	31,04
40	29,65	36,25	25,35	32,25	34,85	27,55	30,45	27,95	32,25
41	29,96	35,96	25,86	33,76	35,16	27,46	31,26	29,36	31,46
42	29,37	36,57	23,97	33,27	35,67	27,07	31,17	28,87	30,97
43	28,88	35,68	24,08	32,28	34,68	26,98	30,98	28,28	31,08
44	29,49	35,89	25,29	31,99	34,29	27,29	30,09	28,19	31,99
45	29,1	36,3	24,4	32,1	35,2	27,7	31,2	28,4	31
46	29,41	36,51	24,51	33,61	34,91	27,81	30,21	29,81	32,61
47	30,12	36,82	25,62	33,52	34,02	27,72	30,22	27,92	32,12
48	29,73	36,73	25,53	33,33	34,23	27,43	29,93	29,13	31,63
49	29,64	35,44	24,74	33,64	35,34	28,54	31,64	28,24	31,14
50	29,05	35,25	24,35	32,05	35,55	27,35	30,95	29,05	31,45
51	29,36	35,96	24,16	32,76	35,66	27,96	30,66	29,06	32,06
52	30,47	36,37	24,47	32,17	34,07	28,27	30,07	29,17	31,27
53	30,58	36,48	25,48	32,08	34,98	27,68	31,38	29,88	31,18
54	30,19	35,89	25,09	32,59	35,69	28,29	31,09	28,49	31,19
55	29,1	36,8	24,2	32,7	34,3	27,4	31	29,2	32,3
56	30,41	35,41	24,71	32,31	34,81	28,91	30,71	29,21	31,41
57	30,62	36,32	24,62	32,32	34,02	28,82	30,62	28,12	32,02
58	30,53	35,53	25,73	33,53	34,73	28,03	32,03	28,73	32,63
59	30,94	35,64	24,44	33,14	34,44	27,04	30,64	29,14	31,74
60	30,85	35,45	25,75	33,25	35,15	27,85	31,05	28,85	32,92

Продовження додатка Г

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
61	35,22	40,12	30,22	36,82	39,92	31,92	35,22	32,62	35,92
62	34,54	41,14	29,14	36,74	38,74	32,04	35,44	33,04	36,94
63	33,96	41,26	28,76	36,66	39,26	32,46	35,06	32,76	37,56
64	35,48	40,88	28,78	37,28	38,88	32,88	34,78	34,18	37,18
65	34,6	41,4	29,4	38,5	40,5	32,8	35,4	32,9	37,3
66	34,22	40,32	29,12	37,02	40,52	33,22	35,92	33,02	36,22
67	34,64	41,64	29,44	36,74	38,74	31,74	35,54	34,24	37,54
68	33,76	40,16	29,66	37,36	38,66	32,76	35,86	33,76	36,96
69	33,98	41,48	29,38	38,18	39,18	32,08	35,78	32,98	35,88
70	34,5	41,1	30,2	37,1	39,7	32,4	35,3	32,8	37,1
71	34,82	40,82	30,72	38,62	40,02	32,32	36,12	34,22	36,32
72	34,24	41,44	28,84	38,14	40,54	31,94	36,04	33,74	35,84
73	33,76	40,56	28,96	37,16	39,56	31,86	35,86	33,16	35,96
74	34,38	40,78	30,18	36,88	39,18	32,18	34,98	33,08	36,88
75	34	41,2	29,3	37	40,1	32,6	36,1	33,3	35,9
76	34,32	41,42	29,42	38,52	39,82	32,72	35,12	34,72	37,52
77	35,04	41,74	30,54	38,44	38,94	32,64	35,14	32,84	37,04
78	34,66	41,66	30,46	38,26	39,16	32,36	34,86	34,06	36,56
79	34,58	40,38	29,68	38,58	40,28	33,48	36,58	33,18	36,08
80	34	40,2	29,3	37	40,5	32,3	35,9	34	36,4
81	34,32	40,92	29,12	37,72	40,62	32,92	35,62	34,02	37,02
82	35,44	41,34	29,44	37,14	39,04	33,24	35,04	34,14	36,24
83	35,56	41,46	30,46	37,06	39,96	32,66	36,36	34,86	36,16
84	35,18	40,88	30,08	37,58	40,68	33,28	36,08	33,48	36,18
85	34,1	41,8	29,2	37,7	39,3	32,4	36	34,2	37,3
86	35,42	40,42	29,72	37,32	39,82	33,92	35,72	34,22	36,42
87	35,64	41,34	29,64	37,34	39,04	33,84	35,64	33,14	37,04
88	35,56	40,56	30,76	38,56	39,76	33,06	37,06	33,76	37,66
89	35,98	40,68	29,48	38,18	39,48	32,08	35,68	34,18	36,78
90	35,9	40,5	30,8	38,3	40,2	32,9	36,1	33,9	37,97

Кінець додатка Г

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
91	38,98	43,88	33,98	40,58	43,68	35,68	38,98	36,38	39,68
92	38,31	44,91	32,91	40,51	42,51	35,81	39,21	36,81	40,71
93	37,74	45,04	32,54	40,44	43,04	36,24	38,84	36,54	41,34
94	39,27	44,67	32,57	41,07	42,67	36,67	38,57	37,97	40,97
95	38,4	45,2	33,2	42,3	44,3	36,6	39,2	36,7	41,1
96	38,03	44,13	32,93	40,83	44,33	37,03	39,73	36,83	40,03
97	38,46	45,46	33,26	40,56	42,56	35,56	39,36	38,06	41,36
98	37,59	43,99	33,49	41,19	42,49	36,59	39,69	37,59	40,79
99	37,82	45,32	33,22	42,02	43,02	35,92	39,62	36,82	39,72
100	38,35	44,95	34,05	40,95	43,55	36,25	39,15	36,65	40,95
101	38,68	44,68	34,58	42,48	43,88	36,18	39,98	38,08	40,18
102	38,11	45,31	32,71	42,01	44,41	35,81	39,91	37,61	39,71
103	37,64	44,44	32,84	41,04	43,44	35,74	39,74	37,04	39,84
104	38,27	44,67	34,07	40,77	43,07	36,07	38,87	36,97	40,77
105	37,9	45,1	33,2	40,9	44	36,5	40	37,2	39,8
106	38,23	45,33	33,33	42,43	43,73	36,63	39,03	38,63	41,43
107	38,96	45,66	34,46	42,36	42,86	36,56	39,06	36,76	40,96
108	38,59	45,59	34,39	42,19	43,09	36,29	38,79	37,99	40,49
109	38,52	44,32	33,62	42,52	44,22	37,42	40,52	37,12	40,02
110	37,95	44,15	33,25	40,95	44,45	36,25	39,85	37,95	40,35
111	38,28	44,88	33,08	41,68	44,58	36,88	39,58	37,98	40,98
112	39,41	45,31	33,41	41,11	43,01	37,21	39,01	38,11	40,21
113	39,54	45,44	34,44	41,04	43,94	36,64	40,34	38,84	40,14
114	39,17	44,87	34,07	41,57	44,67	37,27	40,07	37,47	40,17
115	38,1	45,8	33,2	41,7	43,3	36,4	40	38,2	41,3
116	39,43	44,43	33,73	41,33	43,83	37,93	39,73	38,23	40,43
117	39,66	45,36	33,66	41,36	43,06	37,86	39,66	37,16	41,06
118	39,59	44,59	34,79	42,59	43,79	37,09	41,09	37,79	41,69
119	40,02	44,72	33,52	42,22	43,52	36,12	39,72	38,22	40,82
120	39,95	44,55	34,85	42,35	44,25	36,95	40,15	37,95	42,02

Додаток Д

Індивідуальні завдання до задачі 2.11

№ п/п	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	276,632	415,927	324,431	285,602	494,942	359,605	198,894	408,731	485,755	189,862
2	276,671	415,966	124,440	185,734	495,018	359,706	198,910	408,771	485,877	189,986
3	276,815	416,111	324,468	285,783	495,117	359,799	199,000	408,849	485,885	189,995
4	276,823	416,194	324,578	285,881	495,201	359,870	199,080	408,976	485,954	190,066
5	276,962	416,278	324,594	285,932	495,344	359,960	199,136	409,103	486,044	190,071
6	276,990	416,361	324,671	286,058	495,468	360,099	199,232	409,228	486,161	190,143
7	277,055	416,475	324,671	286,115	495,569	360,160	199,314	409,322	486,236	190,240
8	277,094	416,523	324,727	286,240	495,711	360,223	199,448	409,467	486,266	190,351
9	277,111	416,537	324,740	286,343	495,771	360,317	199,578	409,534	486,280	190,403
10	277,115	416,675	324,791	286,395	495,899	360,359	199,641	409,565	486,383	190,479
11	277,127	416,712	324,855	286,395	496,034	360,450	199,678	409,663	486,402	190,604
12	277,140	416,857	324,972	286,500	496,140	360,490	199,677	409,777	486,486	190,646
13	277,182	416,960	324,972	286,612	496,240	360,585	199,791	409,870	486,526	190,669
14	277,279	416,964	324,984	286,707	496,297	360,652	199,879	409,957	486,598	190,795
15	277,404	417,026	325,100	286,748	496,351	360,686	199,982	410,099	486,733	190,918
16	277,440	417,040	325,226	286,794	496,430	360,761	200,073	410,237	486,880	191,040
17	277,520	417,061	325,254	286,835	496,534	360,843	200,083	410,312	486,933	191,153
18	277,660	417,103	325,263	286,969	496,565	360,878	200,220	410,366	486,961	191,244
19	277,682	417,197	325,290	287,080	496,700	360,974	200,249	410,481	487,083	191,272
20	277,715	417,245	325,421	287,096	496,834	361,075	200,300	410,538	487,151	191,284
21	277,746	417,357	325,471	287,161	496,909	361,086	200,416	410,624	487,224	191,323
22	277,756	417,368	325,565	287,236	496,992	361,193	200,462	410,718	487,331	191,369
23	277,772	417,467	325,651	287,296	497,049	361,195	200,462	410,856	487,340	191,388
24	277,779	417,474	325,770	287,317	497,143	361,230	200,527	410,869	487,390	191,534
25	277,839	417,559	325,831	287,366	497,190	361,230	200,591	410,929	487,497	191,534
26	277,978	417,592	325,931	287,376	497,190	361,366	200,689	411,070	487,583	191,621
27	277,998	417,620	326,041	287,415	497,296	361,494	200,729	411,175	487,717	191,664
28	278,028	417,668	326,159	287,444	497,394	361,597	200,729	411,241	487,740	191,747
29	278,075	417,719	326,300	287,587	497,404	361,602	200,846	411,378	487,808	191,891
30	278,217	417,752	326,427	287,636	497,418	361,655	200,855	411,414	487,941	191,950

Продовження додатка Д

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
31	278,633	417,928	326,432	287,603	496,943	361,606	200,895	410,732	487,756	191,863
32	278,695	417,990	126,464	187,758	497,042	361,730	200,934	410,795	487,901	192,010
33	278,817	418,113	326,470	287,785	497,119	361,801	201,002	410,851	487,887	191,997
34	278,848	418,219	326,603	287,906	497,226	361,895	201,105	411,001	487,979	192,091
35	278,965	418,281	326,597	287,935	497,347	361,963	201,139	411,106	488,047	192,074
36	279,015	418,386	326,696	288,083	497,493	362,124	201,257	411,253	488,186	192,168
37	279,059	418,479	326,675	288,119	497,573	362,164	201,318	411,326	488,240	192,244
38	279,121	418,550	326,754	288,267	497,738	362,250	201,475	411,494	488,293	192,378
39	279,116	418,542	326,745	288,348	497,776	362,322	201,583	411,539	488,285	192,408
40	279,143	418,703	326,819	288,423	497,927	362,387	201,669	411,593	488,411	192,507
41	279,133	418,718	326,861	288,401	498,040	362,456	201,684	411,669	488,408	192,610
42	279,169	418,886	327,001	288,529	498,169	362,519	201,706	411,806	488,515	192,675
43	279,189	418,967	326,979	288,619	498,247	362,592	201,798	411,877	488,533	192,676
44	279,309	418,994	327,014	288,737	498,327	362,682	201,909	411,987	488,628	192,825
45	279,412	419,034	327,108	288,756	498,359	362,694	201,990	412,107	488,741	192,926
46	279,471	419,071	327,257	288,825	498,461	362,792	202,104	412,268	488,911	193,071
47	279,529	419,070	327,263	288,844	498,543	362,852	202,092	412,321	488,942	193,162
48	279,692	419,135	327,295	289,001	498,597	362,910	202,252	412,398	488,993	193,276
49	279,692	419,207	327,300	289,090	498,710	362,984	202,259	412,491	489,093	193,282
50	279,748	419,278	327,454	289,129	498,867	363,108	202,333	412,571	489,184	193,317
51	279,757	419,368	327,482	289,172	498,920	363,097	202,427	412,635	489,235	193,334
52	279,790	419,402	327,599	289,270	499,026	363,227	202,496	412,752	489,365	193,403
53	279,784	419,479	327,663	289,308	499,061	363,207	202,474	412,868	489,352	193,400
54	279,814	419,509	327,805	289,352	499,178	363,265	202,562	412,904	489,425	193,569
55	279,852	419,572	327,844	289,379	499,203	363,243	202,604	412,942	489,510	193,547
56	280,014	419,628	327,967	289,412	499,226	363,402	202,725	413,106	489,619	193,657
57	280,012	419,634	328,055	289,429	499,310	363,508	202,743	413,189	489,731	193,678
58	280,065	419,705	328,196	289,481	499,431	363,634	202,766	413,278	489,777	193,784
59	280,090	419,734	328,315	289,602	499,419	363,617	202,861	413,393	489,823	193,906
60	280,255	419,790	328,465	289,674	499,456	363,693	202,893	413,452	489,979	193,988

Продовження додатка Д

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
61	280,294	419,589	328,093	289,264	498,604	363,267	202,556	412,393	489,417	193,524
62	280,379	419,674	128,148	189,442	498,726	363,414	202,618	412,479	489,585	193,694
63	280,479	419,775	328,132	289,447	498,781	363,463	202,664	412,513	489,549	193,659
64	280,533	419,904	328,288	289,591	498,911	363,580	202,790	412,686	489,664	193,776
65	280,628	419,944	328,260	289,598	499,010	363,626	202,802	412,769	489,710	193,737
66	280,700	420,071	328,381	289,768	499,178	363,809	202,942	412,938	489,871	193,853
67	280,723	420,143	328,339	289,783	499,237	363,828	202,982	412,990	489,904	193,908
68	280,808	420,237	328,441	289,954	499,425	363,937	203,162	413,181	489,980	194,065
69	280,781	420,207	328,410	290,013	499,441	363,987	203,248	413,204	489,950	194,073
70	280,831	420,391	328,507	290,111	499,615	364,075	203,357	413,281	490,099	194,195
71	280,799	420,384	328,527	290,067	499,706	364,122	203,350	413,335	490,074	194,276
72	280,858	420,575	328,690	290,218	499,858	364,208	203,395	413,495	490,204	194,364
73	280,856	420,634	328,646	290,286	499,914	364,259	203,465	413,544	490,200	194,343
74	280,999	420,684	328,704	290,427	500,017	364,372	203,599	413,677	490,318	194,515
75	281,080	420,702	328,776	290,424	500,027	364,362	203,658	413,775	490,409	194,594
76	281,162	420,762	328,948	290,516	500,152	364,483	203,795	413,959	490,602	194,762
77	281,198	420,739	328,932	290,513	500,212	364,521	203,761	413,990	490,611	194,831
78	281,384	420,827	328,987	290,693	500,289	364,602	203,944	414,090	490,685	194,968
79	281,362	420,877	328,970	290,760	500,380	364,654	203,929	414,161	490,763	194,952
80	281,441	420,971	329,147	290,822	500,560	364,801	204,026	414,264	490,877	195,010
81	281,428	421,039	329,153	290,843	500,591	364,768	204,098	414,306	490,906	195,005
82	281,484	421,096	329,293	290,964	500,720	364,921	204,190	414,446	491,059	195,097
83	281,456	421,151	329,335	290,980	500,733	364,879	204,146	414,540	491,024	195,072
84	281,509	421,204	329,500	291,047	500,873	364,960	204,257	414,599	491,120	195,264
85	281,525	421,245	329,517	291,052	500,876	364,916	204,277	414,615	491,183	195,220
86	281,710	421,324	329,663	291,108	500,922	365,098	204,421	414,802	491,315	195,353
87	281,686	421,308	329,729	291,103	500,984	365,182	204,417	414,863	491,405	195,352
88	281,762	421,402	329,893	291,178	501,128	365,331	204,463	414,975	491,474	195,481
89	281,765	421,409	329,990	291,277	501,094	365,292	204,536	415,068	491,498	195,581
90	281,953	421,488	330,163	291,372	501,154	365,391	204,591	415,150	491,677	195,686

Кінець додатка Д

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
91	281,955	421,250	329,754	290,925	500,265	364,928	204,217	414,054	491,078	195,185
92	282,063	421,358	129,832	191,126	500,410	365,098	204,302	414,163	491,269	195,378
93	282,141	421,437	329,794	291,109	500,443	365,125	204,326	414,175	491,211	195,321
94	282,218	421,589	329,973	291,276	500,596	365,265	204,475	414,371	491,349	195,461
95	282,291	421,607	329,923	291,261	500,673	365,289	204,465	414,432	491,373	195,400
96	282,385	421,756	330,066	291,453	500,863	365,494	204,627	414,623	491,556	195,538
97	282,387	421,807	330,003	291,447	500,901	365,492	204,646	414,654	491,568	195,572
98	282,495	421,924	330,128	291,641	501,112	365,624	204,849	414,868	491,667	195,752
99	282,446	421,872	330,075	291,678	501,106	365,652	204,913	414,869	491,615	195,738
100	282,519	422,079	330,195	291,799	501,303	365,763	205,045	414,969	491,787	195,883
101	282,465	422,050	330,193	291,733	501,372	365,788	205,016	415,001	491,740	195,942
102	282,547	422,264	330,379	291,907	501,547	365,897	205,084	415,184	491,893	196,053
103	282,523	422,301	330,313	291,953	501,581	365,926	205,132	415,211	491,867	196,010
104	282,689	422,374	330,394	292,117	501,707	366,062	205,289	415,367	492,008	196,205
105	282,748	422,370	330,444	292,092	501,695	366,030	205,326	415,443	492,077	196,262
106	282,853	422,453	330,639	292,207	501,843	366,174	205,486	415,650	492,293	196,453
107	282,867	422,408	330,601	292,182	501,881	366,190	205,430	415,659	492,280	196,500
108	283,076	422,519	330,679	292,385	501,981	366,294	205,636	415,782	492,377	196,660
109	283,032	422,547	330,640	292,430	502,050	366,324	205,599	415,831	492,433	196,622
110	283,134	422,664	330,840	292,515	502,253	366,494	205,719	415,957	492,570	196,703
111	283,099	422,710	330,824	292,514	502,262	366,439	205,769	415,977	492,577	196,676
112	283,178	422,790	330,987	292,658	502,414	366,615	205,884	416,140	492,753	196,791
113	283,128	422,823	331,007	292,652	502,405	366,551	205,818	416,212	492,696	196,744
114	283,204	422,899	331,195	292,742	502,568	366,655	205,952	416,294	492,815	196,959
115	283,198	422,918	331,190	292,725	502,549	366,589	205,950	416,288	492,856	196,893
116	283,406	423,020	331,359	292,804	502,618	366,794	206,117	416,498	493,011	197,049
117	283,360	422,982	331,403	292,777	502,658	366,856	206,091	416,537	493,079	197,026
118	283,459	423,099	331,590	292,875	502,825	367,028	206,160	416,672	493,171	197,178
119	283,440	423,084	331,665	292,952	502,769	366,967	206,211	416,743	493,173	197,256
120	283,651	423,186	331,861	293,070	502,852	367,089	206,289	416,848	493,375	197,384

Додаток Е

Варіанти завдань до задачі 2.13

№ варіанта	Висоти пункту, м, та їх середні квадратичні помилки, мм											
	H_1	m_1	H_2	m_2	H_3	m_3	H_4	m_4	H_5	m_5	H_6	m_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	238,263	4,3	238,186	6,8	237,972	8,8	238,06	4,3	237,852	-0,2	238,171	4,4
2	238,002	7	237,997	8,2	237,981	4,9	237,985	5,6	238,008	4,9	237,997	8
3	237,996	7,3	237,998	8,8	237,98	4,7	237,99	6	238,009	4,8	238,006	8,2
4	237,985	7,3	238,009	9	237,974	4,3	237,991	5,8	238,015	4,6	238,001	8,3
5	237,979	7,2	238,01	9,2	237,968	4,8	238,004	5,5	238,024	4,2	237,99	8,6
6	237,983	7,5	238,003	9,7	237,954	5,3	237,995	5,5	238,027	4,5	238,008	8,7
7	237,973	7,2	238,019	9,6	237,961	4,9	237,994	2,6	238,024	4,2	238,025	8,9
8	237,975	6,9	238,016	9,5	237,948	5,2	238,002	2,5	238,016	4,6	238,041	8,8
9	237,978	6,6	238,011	10,1	237,943	5,6	238,004	2,2	238,034	4,6	238,05	8,7
10	237,97	6,2	238,001	10,5	237,929	5,8	238,02	2,7	238,033	4,7	238,048	8,6
11	237,986	6	237,996	10,8	237,92	6,3	238,01	2,8	238,046	5	238,056	8,9
12	237,974	6,6	237,994	11,1	237,922	6,9	238,022	2,7	238,037	5,4	238,058	8,8
13	237,99	6,4	237,984	11,4	237,908	7,3	238,011	2,5	238,034	5,4	238,071	8,9
14	237,991	6,4	237,972	11,8	237,902	7,5	238,008	2,8	238,02	5,7	238,07	8,6
15	237,981	5,9	237,971	12,2	237,911	4,9	238,002	2,7	238,016	5,5	238,087	8,4
16	237,976	5,6	237,977	12,5	237,903	5	238,011	3,2	238,022	5,2	238,09	8,4
17	237,984	5,6	237,979	12,6	237,92	4,7	238,005	3,4	238,037	5,4	238,091	8,6
18	237,986	5,4	237,979	12,8	237,937	4,5	238,012	4	238,028	5,9	238,103	8,4
19	238,004	5,6	237,992	13	237,954	5,1	238,02	4,4	238,017	6,2	238,114	8,2
20	238,007	5,1	237,999	13,1	237,956	5,5	238,011	4,9	238,009	6,2	238,11	8,2
21	238,01	5,3	238,011	12,8	237,945	5,2	238,008	4,9	238	6,6	238,116	5,7
22	238,02	5,3	238,029	12,6	237,949	5	238,006	5,1	238,012	6,5	238,132	5,8
23	238,038	5,2	238,025	9,3	237,938	5,2	237,994	5	238,012	6,2	238,138	5,6
24	238,039	4,9	238,021	9,4	237,93	5,4	238,003	5	238,013	6,5	238,135	5,7
25	238,043	5,1	238,011	9,8	237,931	5	238,02	4,8	238,016	6,9	238,129	6,2
26	238,044	4,6	238,016	10	237,945	5,4	238,008	5,1	238,001	7,3	238,115	6,7
27	238,051	4,3	238,023	9,6	237,951	5,7	238,019	5,5	238,013	7,8	238,113	6,4
28	238,047	3,9	238,039	10,1	237,958	5,8	238,026	6,1	238,025	8	238,128	6,2
29	238,064	3,8	238,032	9,8	237,952	6,2	238,017	5,8	238,024	5,4	238,12	6,3
30	238,062	3,9	238,046	10,3	237,957	6,5	238,034	6	238,026	5,3	238,107	6,8

Продовження додатка Е

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
31	238,325	5,3	238,248	8,6	238,034	7,6	238,122	3,1	237,914	1,6	238,233	6,2
32	238,066	8,1	238,061	10	238,045	3,7	238,049	4,4	238,072	6,7	238,061	9,8
33	238,062	8,4	238,064	10,6	238,046	3,5	238,056	4,8	238,075	6,6	238,072	7
34	238,053	8,5	238,077	10,8	238,042	3,1	238,059	4,6	238,083	6,4	238,069	7,1
35	238,049	8,4	238,08	8	238,038	3,6	238,074	4,3	238,094	6	238,06	7,4
36	238,055	8,8	238,075	8,5	238,026	4,1	238,067	4,3	238,099	6,3	238,08	7,5
37	238,047	8,5	238,093	8,4	238,035	3,7	238,068	4,4	238,098	6	238,099	7,7
38	238,051	8,3	238,092	8,3	238,024	4	238,078	4,3	238,092	6,4	238,117	7,6
39	238,056	8	238,089	8,9	238,021	4,4	238,082	4	238,112	6,4	238,128	7,5
40	238,05	7,7	238,081	9,3	238,009	4,6	238,1	4,5	238,113	6,5	238,128	7,4
41	238,068	7,6	238,078	9,6	238,002	5,1	238,092	4,6	238,128	3,8	238,138	7,7
42	238,058	8,2	238,078	9,9	238,006	5,7	238,106	4,5	238,121	4,2	238,142	7,6
43	238,076	5,1	238,07	10,2	237,994	6,1	238,097	4,3	238,12	4,2	238,157	7,7
44	238,079	5,1	238,06	10,6	237,99	6,3	238,096	4,6	238,108	4,5	238,158	7,4
45	238,071	4,7	238,061	11	238,001	6,7	238,092	4,5	238,106	4,3	238,177	7,2
46	238,068	4,4	238,069	11,3	237,995	6,8	238,103	5	238,114	4	238,182	7,2
47	238,078	4,4	238,073	11,4	238,014	6,5	238,099	5,2	238,131	4,2	238,185	7,4
48	238,082	4,3	238,075	11,6	238,033	6,3	238,108	5,8	238,124	4,7	238,199	7,2
49	238,102	4,5	238,09	11,8	238,052	6,9	238,118	3,2	238,115	5	238,212	7
50	238,107	4,1	238,099	11,9	238,056	7,3	238,111	3,7	238,109	5	238,21	7
51	238,112	4,3	238,113	11,6	238,047	7	238,11	3,7	238,102	5,4	238,218	7,5
52	238,124	4,4	238,133	11,4	238,053	6,8	238,11	3,9	238,116	5,3	238,236	7,6
53	238,144	4,3	238,131	11,1	238,044	7	238,1	3,8	238,118	5	238,244	7,4
54	238,147	4,1	238,129	11,2	238,038	7,2	238,111	3,8	238,121	5,3	238,243	7,5
55	238,153	4,3	238,121	11,6	238,041	6,8	238,13	3,6	238,126	5,7	238,239	8
56	238,156	3,9	238,128	11,8	238,057	7,2	238,12	3,9	238,113	6,1	238,227	8,5
57	238,165	3,6	238,137	11,4	238,065	4,5	238,133	4,3	238,127	6,6	238,227	8,2
58	238,163	3,3	238,155	11,9	238,074	4,6	238,142	4,9	238,141	6,8	238,244	8
59	238,182	3,2	238,15	11,6	238,07	5	238,135	4,6	238,142	7,2	238,238	8,1
60	238,182	3,4	238,166	12,1	238,077	5,3	238,154	4,8	238,146	7,1	238,227	8,6
61	238,387	5,1	238,31	8,4	238,096	7,4	238,184	2,9	237,976	1,4	238,295	6
62	238,13	7,9	238,125	9,8	238,109	3,5	238,113	4,2	238,136	6,5	238,125	9,6
63	238,128	8,2	238,13	10,4	238,112	3,3	238,122	4,6	238,141	6,4	238,138	9,8

Продовження додатка Е

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
64	238,121	8,3	238,145	10,6	238,11	2,9	238,127	4,4	238,151	6,2	238,137	9,9
65	238,119	8,2	238,15	10,8	238,108	3,4	238,144	4,1	238,164	5,8	238,13	7,2
66	238,127	8,6	238,147	11,3	238,098	3,9	238,139	4,1	238,171	6,1	238,152	7,3
67	238,121	8,3	238,167	8,2	238,109	3,5	238,142	4,2	238,172	5,8	238,173	7,5
68	238,127	8,1	238,168	8,1	238,100	3,8	238,154	4,1	238,168	6,2	238,193	7,4
69	238,134	7,8	238,167	8,7	238,099	4,2	238,16	3,8	238,19	6,2	238,206	7,3
70	238,13	7,5	238,161	9,1	238,089	4,4	238,18	4,3	238,193	6,3	238,208	7,2
71	238,15	7,4	238,16	9,4	238,084	4,9	238,174	4,4	238,21	6,6	238,22	7,5
72	238,142	8	238,162	9,7	238,09	5,5	238,19	4,3	238,205	7	238,226	7,4
73	238,162	7,9	238,156	10	238,08	5,9	238,183	4,1	238,206	4	238,243	7,5
74	238,167	7,9	238,148	10,4	238,078	6,1	238,184	4,4	238,196	4,3	238,246	7,2
75	238,161	4,5	238,151	10,8	238,091	6,5	238,182	4,3	238,196	4,1	238,267	7
76	238,16	4,2	238,161	11,1	238,087	6,6	238,195	4,8	238,206	3,8	238,274	7
77	238,172	4,2	238,167	11,2	238,108	6,3	238,193	5	238,225	4	238,279	7,2
78	238,178	4,1	238,171	11,4	238,129	6,1	238,204	5,6	238,22	4,5	238,295	7
79	238,2	4,3	238,188	11,6	238,15	6,7	238,216	6	238,213	4,8	238,31	6,8
80	238,207	3,9	238,199	11,7	238,156	7,1	238,211	6,5	238,209	4,8	238,31	6,8
81	238,214	4,1	238,215	11,4	238,149	6,8	238,212	3,5	238,204	5,2	238,32	7,3
82	238,228	4,2	238,237	11,2	238,157	6,6	238,214	3,7	238,22	5,1	238,34	7,4
83	238,25	4,1	238,237	10,9	238,15	6,8	238,206	3,6	238,224	4,8	238,35	7,2
84	238,255	3,9	238,237	11	238,146	7	238,219	3,6	238,229	5,1	238,351	7,3
85	238,263	4,1	238,231	11,4	238,151	6,6	238,24	3,4	238,236	5,5	238,349	7,8
86	238,268	3,7	238,24	11,6	238,169	7	238,232	3,7	238,225	5,9	238,339	8,3
87	238,279	3,4	238,251	11,2	238,179	7,3	238,247	4,1	238,241	6,4	238,341	8
88	238,279	3,1	238,271	11,7	238,19	7,4	238,258	4,7	238,257	6,6	238,36	7,8
89	238,3	3	238,268	11,4	238,188	4,8	238,253	4,4	238,26	7	238,356	7,9
90	238,302	3,2	238,286	11,9	238,197	5,1	238,274	4,6	238,266	6,9	238,347	8,4
91	238,449	5,9	238,372	6,2	238,158	8,2	238,246	3,7	238,038	2,2	238,357	3,8
92	238,194	8,7	238,189	7,6	238,173	4,3	238,177	5	238,2	7,3	238,189	7,4
93	238,194	9	238,196	8,2	238,178	4,1	238,188	5,4	238,207	7,2	238,204	7,6
94	238,189	9,1	238,213	8,4	238,178	3,7	238,195	5,2	238,219	7	238,205	7,7
95	238,189	9	238,22	8,6	238,178	4,2	238,214	4,9	238,234	3,6	238,2	8
96	238,199	9,4	238,219	9,1	238,17	4,7	238,211	4,9	238,243	3,9	238,224	8,1

Кінець додатка Е

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
97	238,195	6,1	238,241	9	238,183	4,3	238,216	5	238,246	3,6	238,247	8,3
98	238,203	5,9	238,244	8,9	238,176	4,6	238,23	4,9	238,244	4	238,269	8,2
99	238,212	5,6	238,245	9,5	238,177	5	238,238	4,6	238,268	4	238,284	8,1
100	238,21	5,3	238,241	9,9	238,169	5,2	238,26	5,1	238,273	4,1	238,288	8
101	238,232	5,2	238,242	10,2	238,166	5,7	238,256	5,2	238,292	4,4	238,302	8,3
102	238,226	5,8	238,246	10,5	238,174	6,3	238,274	5,1	238,289	4,8	238,31	8,2
103	238,248	5,7	238,242	10,8	238,166	6,7	238,269	1,9	238,292	4,8	238,329	8,3
104	238,255	5,7	238,236	11,2	238,166	6,9	238,272	2,2	238,284	5,1	238,334	8
105	238,251	5,3	238,241	11,6	238,181	7,3	238,272	2,1	238,286	4,9	238,357	7,8
106	238,252	5	238,253	11,9	238,179	7,4	238,287	2,6	238,298	4,6	238,366	7,8
107	238,266	5	238,261	12	238,202	7,1	238,287	2,8	238,319	4,8	238,373	8
108	238,274	4,9	238,267	12,2	238,225	6,9	238,3	3,4	238,316	5,3	238,391	7,8
109	238,298	5,1	238,286	12,4	238,248	7,5	238,314	3,8	238,311	5,6	238,408	7,6
110	238,307	4,7	238,299	12,5	238,256	7,9	238,311	4,3	238,309	5,6	238,41	7,6
111	238,316	4,9	238,317	12,2	238,251	4,6	238,314	4,3	238,306	6	238,422	8,1
112	238,332	5	238,341	12	238,261	4,4	238,318	4,5	238,324	5,9	238,444	8,2
113	238,356	4,9	238,343	11,7	238,256	4,6	238,312	4,4	238,33	5,6	238,456	8
114	238,363	4,7	238,345	11,8	238,254	4,8	238,327	4,4	238,337	5,9	238,459	8,1
115	238,373	4,9	238,341	12,2	238,261	4,4	238,35	4,2	238,346	6,3	238,459	8,6
116	238,38	4,5	238,352	12,4	238,281	4,8	238,344	4,5	238,337	6,7	238,451	9,1
117	238,393	4,2	238,365	12	238,293	5,1	238,361	4,9	238,355	7,2	238,455	5,8
118	238,395	3,9	238,387	12,5	238,306	5,2	238,374	5,5	238,373	7,4	238,476	5,6
119	238,418	3,8	238,386	9,2	238,306	5,6	238,371	5,2	238,378	7,8	238,474	5,7
120	238,422	4	238,406	9,7	238,317	5,9	238,394	5,4	238,386	7,7	238,467	6,2

Додаток Ж

Варіанти завдань до задачі 2.15

№ варіанту	H_1	H_1	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
	$к_1$	$к_2$	$к_3$	$к_4$	$к_5$	$к_6$	$к_7$	$к_8$	$к_9$	$к_{10}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	11,6709	10,3358	19,1436	16,5888	16,9665	11,0819	13,5935	11,1285	10,8917	8,5295
	26	27	14	19	14	21	10	27	19	20
2	11,6717	10,3415	19,1524	16,5928	16,9662	11,0811	13,6036	11,124	10,887	8,5388
	25	26	15	20	15	22	9	27	20	21
3	11,6835	10,352	19,164	16,5913	16,9611	11,0867	13,6023	11,1273	10,8864	8,5399
	26	26	16	19	15	22	10	25	18	21
4	11,6811	10,3473	19,1722	16,5933	16,9673	11,0978	13,6039	11,1275	10,8974	8,5472
	26	26	14	20	15	21	10	26	20	21
5	11,6891	10,3568	19,1814	16,6017	16,9711	11,1026	13,5985	11,1314	10,9094	8,5416
	26	27	15	20	15	21	10	26	18	22
6	11,6997	10,363	19,1785	16,6073	16,9823	11,115	13,6008	11,1285	10,9144	8,5449
	27	27	16	19	14	21	10	26	20	21
7	11,7088	10,3596	19,1724	16,6038	16,9877	11,1206	13,5992	11,1401	10,9215	8,5456
	26	27	15	21	15	20	10	26	18	21
8	11,7086	10,3665	19,1821	16,6135	16,9995	11,1318	13,5952	11,1425	10,9321	8,5519
	26	27	15	20	14	22	11	25	19	20
9	11,7091	10,3737	19,1784	16,6226	17,0092	11,1439	13,6046	11,1454	10,9335	8,5499
	26	27	15	19	14	20	9	26	18	22
10	11,7041	10,3849	19,1862	16,63	17,0182	11,1433	13,6073	11,1575	10,9301	8,5612
	25	28	14	20	14	21	11	26	20	20
11	11,6977	10,3883	19,1976	16,6267	17,0137	11,1477	13,611	11,1673	10,9352	8,5734
	26	27	15	19	14	22	9	26	19	21
12	11,7006	10,3839	19,2066	16,64	17,0267	11,1568	13,6115	11,1723	10,9356	8,5728
	26	27	16	20	15	20	10	25	18	21
13	11,7113	10,3817	19,2178	16,6534	17,0341	11,1542	13,6142	11,1746	10,9419	8,5715
	27	27	14	20	15	20	9	26	19	21
14	11,7212	10,3924	19,2278	16,6631	17,034	11,1583	13,62	11,1878	10,9384	8,5692
	25	26	15	20	14	22	9	26	19	21
15	11,7322	10,3995	19,2388	16,6624	17,034	11,1585	13,618	11,1858	10,9327	8,5809
	27	26	15	19	16	21	10	26	19	21
16	11,7446	10,3937	19,2395	16,6591	17,034	11,1611	13,6287	11,196	10,936	8,5776
	27	28	15	21	14	22	10	25	19	22
17	11,7507	10,3883	19,244	16,6541	17,0448	11,1553	13,6329	11,2059	10,9337	8,5768
	26	26	14	20	14	21	9	25	19	21
18	11,7455	10,3873	19,2467	16,6651	17,0546	11,1686	13,6305	11,2141	10,9295	8,5789
	25	27	15	20	15	21	9	25	18	20
19	11,7395	10,3993	19,2411	16,6692	17,0513	11,1735	13,6363	11,216	10,9368	8,5889
	26	27	16	20	15	21	10	26	19	21
20	11,7376	10,3966	19,2426	16,6663	17,0504	11,1833	13,6396	11,2293	10,9347	8,5863
	26	28	15	20	15	20	11	26	19	21
21	11,7317	10,3938	19,245	16,6775	17,0638	11,1819	13,6441	11,2251	10,9463	8,596
	26	27	14	21	15	21	11	26	19	20
22	11,7314	10,3913	19,2418	16,6905	17,0761	11,1886	13,6559	11,233	10,9528	8,6085
	25	28	16	19	14	20	10	27	19	22
23	11,7275	10,3908	19,2459	16,6924	17,0893	11,1859	13,6687	11,2306	10,9572	8,6102
	26	28	14	20	14	22	10	26	19	22
24	11,7358	10,3865	19,2502	16,6899	17,0951	7,954	13,6811	11,2408	10,9527	11,8464
	26	26	16	21	16	21	11	26	20	21
25	11,7303	10,3849	19,2617	16,692	17,1058	11,202	13,6786	11,243	10,9635	8,605
	25	27	15	19	16	22	9	26	18	21
26	11,7372	10,3868	19,2681	16,6885	17,1086	11,2133	13,6809	11,249	10,9664	8,6123
	27	27	15	20	15	21	10	26	19	21
27	11,7427	10,3944	19,2619	16,6858	17,109	11,2181	13,6772	11,2619	10,9794	8,6245
	25	28	16	19	14	21	10	25	20	22
28	11,742	10,3932	19,2732	16,6828	17,1146	11,2148	13,6854	11,2657	10,9918	8,6195
	26	27	16	20	16	21	11	25	19	20
29	11,7377	10,3882	19,2785	16,6819	17,1214	11,2113	13,68	11,2747	10,9949	8,6175
	26	27	16	20	14	22	10	26	18	22

Продовження додатка Ж

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
30	11,7373	10,3939	19,2779	16,693	17,1348	11,2114	13,6769	11,2707	11,0022	8,6191
31	12,3229	10,3378	19,1456	16,5908	16,9685	11,0839	13,5955	11,1305	10,8937	8,5315
	27	27	14	19	14	21	10	27	19	20
32	12,3257	10,3455	19,1564	16,5968	16,9702	11,0851	13,6076	11,128	10,891	8,5428
	26	26	15	20	15	22	9	27	20	21
33	12,3395	10,358	19,17	16,5973	16,9671	11,0927	13,6083	11,1333	10,8924	8,5459
	27	26	16	19	15	22	10	25	18	21
34	12,3391	10,3553	19,1802	16,6013	16,9753	11,1058	13,6119	11,1355	10,9054	8,5552
	27	26	14	20	15	21	10	26	20	21
35	12,3491	10,3668	19,1914	16,6117	16,9811	11,1126	13,6085	11,1414	10,9194	8,5516
	27	27	15	20	15	21	10	26	18	22
36	12,3617	10,375	19,1905	16,6193	16,9943	11,127	13,6128	11,1405	10,9264	8,5569
	28	27	16	19	14	21	10	26	20	21
37	12,3728	10,3736	19,1864	16,6178	17,0017	11,1346	13,6132	11,1541	10,9355	8,5596
	27	27	15	21	15	20	10	26	18	21
38	12,3746	10,3825	19,1981	16,6295	17,0155	11,1478	13,6112	11,1585	10,9481	8,5679
	27	27	15	20	14	22	11	25	19	20
39	12,3771	10,3917	19,1964	16,6406	17,0272	11,1619	13,6226	11,1634	10,9515	8,5679
	27	27	15	19	14	20	9	26	18	22
40	12,3741	10,4049	19,2062	16,65	17,0382	11,1633	13,6273	11,1775	10,9501	8,5812
	26	28	14	20	14	21	11	26	20	20
41	12,3697	10,4103	19,2196	16,6487	17,0357	11,1697	13,633	11,1893	10,9572	8,5954
	27	27	15	19	14	22	9	26	19	21
42	12,3746	10,4079	19,2306	16,664	17,0507	11,1808	13,6355	11,1963	10,9596	8,5968
	27	27	16	20	15	20	10	25	18	21
43	12,3873	10,4077	19,2438	16,6794	17,0601	11,1802	13,6402	11,2006	10,9679	8,5975
	28	27	14	20	15	20	9	26	19	21
44	12,3992	10,4204	19,2558	16,6911	17,062	11,1863	13,648	11,2158	10,9664	8,5972
	26	26	15	20	14	22	9	26	19	21
45	12,4122	10,4295	19,2688	16,6924	17,064	11,1885	13,648	11,2158	10,9627	8,6109
	28	26	15	19	16	21	10	26	19	21
46	12,4266	10,4257	19,2715	16,6911	17,066	11,1931	13,6607	11,228	10,968	8,6096
	28	28	15	21	14	22	10	25	19	22
47	12,4347	10,4223	19,278	16,6881	17,0788	11,1893	13,6669	11,2399	10,9677	8,6108
	27	26	14	20	14	21	9	25	19	21
48	12,4315	10,4233	19,2827	16,7011	17,0906	11,2046	13,6665	11,2501	10,9655	8,6149
	26	27	15	20	15	21	9	25	18	20
49	12,4275	10,4373	19,2791	16,7072	17,0893	11,2115	13,6743	11,254	10,9748	8,6269
	27	27	16	20	15	21	10	26	19	21
50	12,4276	10,4366	19,2826	16,7063	17,0904	11,2233	13,6796	11,2693	10,9747	8,6263
	27	28	15	20	15	20	11	26	19	21
51	12,4237	10,4358	19,287	16,7195	17,1058	11,2239	13,6861	11,2671	10,9883	8,638
	27	27	14	21	15	21	11	26	19	20
52	12,4254	10,4353	19,2858	16,7345	17,1201	11,2326	13,6999	11,277	10,9968	8,6525
	26	28	16	19	14	20	10	27	19	22
53	12,4235	10,4368	19,2919	16,7384	17,1353	11,2319	13,7147	11,2766	11,0032	8,6562
	27	28	14	20	14	22	10	26	19	22
54	12,4338	10,4345	19,2982	16,7379	17,1431	8,002	13,7291	11,2888	11,0007	11,8944
	27	26	16	21	16	21	11	26	20	21
55	12,4303	10,4349	19,3117	16,742	17,1558	11,252	13,7286	11,293	11,0135	8,655
	26	27	15	19	16	22	9	26	18	21
56	12,4392	10,4388	19,3201	16,7405	17,1606	11,2653	13,7329	11,301	11,0184	8,6643
	28	27	15	20	15	21	10	26	19	21
57	12,4467	10,4484	19,3159	16,7398	17,163	11,2721	13,7312	11,3159	11,0334	8,6785
	26	28	16	19	14	21	10	25	20	22
58	12,448	10,4492	19,3292	16,7388	17,1706	11,2708	13,7414	11,3217	11,0478	8,6755
	27	27	16	20	16	21	11	25	19	20
59	12,4457	10,4462	19,3365	16,7399	17,1794	11,2693	13,738	11,3327	11,0529	8,6755
	27	27	16	20	14	22	10	26	18	22
60	12,4473	10,4539	19,3379	16,753	17,1948	11,2714	13,7369	11,3307	11,0622	8,6791
	28	26	14	19	15	20	9	26	19	21
61	12,9749	10,9898	19,7976	17,2428	17,6205	11,7359	14,2475	11,7825	11,5457	9,1835
	28	28	15	20	15	22	11	28	20	21

Продовження додатка Ж

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
62	12,9797	10,9995	19,8104	17,2508	17,6242	11,7391	14,2616	11,782	11,545	9,1968
	27	27	16	21	16	23	10	28	21	22
63	12,9955	11,014	19,826	17,2533	17,6231	11,7487	14,2643	11,7893	11,5484	9,2019
	28	27	17	20	16	23	11	26	19	22
64	12,9971	11,0133	19,8382	17,2593	17,6333	11,7638	14,2699	11,7935	11,5634	9,2132
	28	27	15	21	16	22	11	27	21	22
65	13,0091	11,0268	19,8514	17,2717	17,6411	11,7726	14,2685	11,8014	11,5794	9,2116
	28	28	16	21	16	22	11	27	19	23
66	13,0237	11,037	19,8525	17,2813	17,6563	11,789	14,2748	11,8025	11,5884	9,2189
	29	28	17	20	15	22	11	27	21	22
67	13,0368	11,0376	19,8504	17,2818	17,6657	11,7986	14,2772	11,8181	11,5995	9,2236
	28	28	16	22	16	21	11	27	19	22
68	13,0406	11,0485	19,8641	17,2955	17,6815	11,8138	14,2772	11,8245	11,6141	9,2339
	28	28	16	21	15	23	12	26	20	21
69	13,0451	11,0597	19,8644	17,3086	17,6952	11,8299	14,2906	11,8314	11,6195	9,2359
	28	28	16	20	15	21	10	27	19	23
70	13,0441	11,0749	19,8762	17,32	17,7082	11,8333	14,2973	11,8475	11,6201	9,2512
	27	29	15	21	15	22	12	27	21	21
71	13,0417	11,0823	19,8916	17,3207	17,7077	11,8417	14,305	11,8613	11,6292	9,2674
	28	28	16	20	15	23	10	27	20	22
72	13,0486	11,0819	19,9046	17,338	17,7247	11,8548	14,3095	11,8703	11,6336	9,2708
	28	28	17	21	16	21	11	26	19	22
73	13,0633	11,0837	19,9198	17,3554	17,7361	11,8562	14,3162	11,8766	11,6439	9,2735
	29	28	15	21	16	21	10	27	20	22
74	13,0772	11,0984	19,9338	17,3691	17,74	11,8643	14,326	11,8938	11,6444	9,2752
	27	27	16	21	15	23	10	27	20	22
75	13,0922	11,1095	19,9488	17,3724	17,744	11,8685	14,328	11,8958	11,6427	9,2909
	29	27	16	20	17	22	11	27	20	22
76	13,1086	11,1077	19,9535	17,3731	17,748	11,8751	14,3427	11,91	11,65	9,2916
	29	29	16	22	15	23	11	26	20	23
77	13,1187	11,1063	19,962	17,3721	17,7628	11,8733	14,3509	11,9239	11,6517	9,2948
	28	27	15	21	15	22	10	26	20	22
78	13,1175	11,1093	19,9687	17,3871	17,7766	11,8906	14,3525	11,9361	11,6515	9,3009
	27	28	16	21	16	22	10	26	19	21
79	13,1155	11,1253	19,9671	17,3952	17,7773	11,8995	14,3623	11,942	11,6628	9,3149
	28	28	17	21	16	22	11	27	20	22
80	13,1176	11,1266	19,9726	17,3963	17,7804	11,9133	14,3696	11,9593	11,6647	9,3163
	28	29	16	21	16	21	12	27	20	22
81	13,1157	11,1278	19,979	17,4115	17,7978	11,9159	14,3781	11,9591	11,6803	9,33
	28	28	15	22	16	22	12	27	20	21
82	13,1194	11,1293	19,9798	17,4285	17,8141	11,9266	14,3939	11,971	11,6908	9,3465
	27	29	17	20	15	21	11	28	20	23
83	13,1195	11,1328	19,9879	17,4344	17,8313	11,9279	14,4107	11,9726	11,6992	9,3522
	28	29	15	21	15	23	11	27	20	23
84	13,1318	11,1325	19,9962	17,4359	17,8411	8,7	14,4271	11,9868	11,6987	12,5924
	28	27	17	22	17	22	12	27	21	22
85	13,1303	11,1349	20,0117	17,442	17,8558	11,952	14,4286	11,993	11,7135	9,355
	27	28	16	20	17	23	10	27	19	22
86	13,1412	11,1408	20,0221	17,4425	17,8626	11,9673	14,4349	12,003	11,7204	9,3663
	29	28	16	21	16	22	11	27	20	22
87	13,1507	11,1524	20,0199	17,4438	17,867	11,9761	14,4352	12,0199	11,7374	9,3825
	27	29	17	20	15	22	11	26	21	23
88	13,154	11,1552	20,0352	17,4448	17,8766	11,9768	14,4474	12,0277	11,7538	9,3815
	28	28	17	21	17	22	12	26	20	21
89	13,1537	11,1542	20,0445	17,4479	17,8874	11,9773	14,446	12,0407	11,7609	9,3835
	28	28	17	21	15	23	11	27	19	23
90	13,1573	11,1639	20,0479	17,463	17,9048	11,9814	14,4469	12,0407	11,7722	9,3891
	29	27	15	20	16	21	10	27	20	22
91	13,0993	11,1059	19,9899	17,405	17,8468	11,9234	14,3889	11,9827	11,7142	9,3311
	29	27	15	20	16	21	10	27	20	22
92	13,6289	11,6438	20,4516	17,8968	18,2745	12,3899	14,9015	12,4365	12,1997	9,8375
	29	29	16	21	16	23	12	29	21	22
93	13,6357	11,6555	20,4664	17,9068	18,2802	12,3951	14,9176	12,438	12,201	9,8528
	28	28	17	22	17	24	11	29	22	23

Кінець додатка Ж

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
94	13,6535	11,672	20,484	17,9113	18,2811	12,4067	14,9223	12,4473	12,2064	9,8599
	29	28	18	21	17	24	12	27	20	23
95	13,6571	11,6733	20,4982	17,9193	18,2933	12,4238	14,9299	12,4535	12,2234	9,8732
	29	28	16	22	17	23	12	28	22	23
96	13,6711	11,6888	20,5134	17,9337	18,3031	12,4346	14,9305	12,4634	12,2414	9,8736
	29	29	17	22	17	23	12	28	20	24
97	13,6877	11,701	20,5165	17,9453	18,3203	12,453	14,9388	12,4665	12,2524	9,8829
	30	29	18	21	16	23	12	28	22	23
98	13,7028	11,7036	20,5164	17,9478	18,3317	12,4646	14,9432	12,4841	12,2655	9,8896
	29	29	17	23	17	22	12	28	20	23
99	13,7086	11,7165	20,5321	17,9635	18,3495	12,4818	14,9452	12,4925	12,2821	9,9019
	29	29	17	22	16	24	13	27	21	22
100	13,7151	11,7297	20,5344	17,9786	18,3652	12,4999	14,9606	12,5014	12,2895	9,9059
	29	29	17	21	16	22	11	28	20	24
101	13,7161	11,7469	20,5482	17,992	18,3802	12,5053	14,9693	12,5195	12,2921	9,9232
	28	30	16	22	16	23	13	28	22	22
102	13,7157	11,7563	20,5656	17,9947	18,3817	12,5157	14,979	12,5353	12,3032	9,9414
	29	29	17	21	16	24	11	28	21	23
103	13,7246	11,7579	20,5806	18,014	18,4007	12,5308	14,9855	12,5463	12,3096	9,9468
	29	29	18	22	17	22	12	27	20	23
104	13,7413	11,7617	20,5978	18,0334	18,4141	12,5342	14,9942	12,5546	12,3219	9,9515
	30	29	16	22	17	22	11	28	21	23
105	13,7572	11,7784	20,6138	18,0491	18,42	12,5443	15,006	12,5738	12,3244	9,9552
	28	28	17	22	16	24	11	28	21	23
106	13,7742	11,7915	20,6308	18,0544	18,426	12,5505	15,01	12,5778	12,3247	9,9729
	30	28	17	21	18	23	12	28	21	23
107	13,7926	11,7917	20,6375	18,0571	18,432	12,5591	15,0267	12,594	12,334	9,9756
	30	30	17	23	16	24	12	27	21	24
108	13,8047	11,7923	20,648	18,0581	18,4488	12,5593	15,0369	12,6099	12,3377	9,9808
	29	28	16	22	16	23	11	27	21	23
109	13,8055	11,7973	20,6567	18,0751	18,4646	12,5786	15,0405	12,6241	12,3395	9,9889
	28	29	17	22	17	23	11	27	20	22
110	13,8055	11,8153	20,6571	18,0852	18,4673	12,5895	15,0523	12,632	12,3528	10,0049
	29	29	18	22	17	23	12	28	21	23
111	13,8096	11,8186	20,6646	18,0883	18,4724	12,6053	15,0616	12,6513	12,3567	10,0083
	29	30	17	22	17	22	13	28	21	23
112	13,8097	11,8218	20,673	18,1055	18,4918	12,6099	15,0721	12,6531	12,3743	10,024
	29	29	16	23	17	23	13	28	21	22
113	13,8154	11,8253	20,6758	18,1245	18,5101	12,6226	15,0899	12,667	12,3868	10,0425
	28	30	18	21	16	22	12	29	21	24
114	13,8175	11,8308	20,6859	18,1324	18,5293	12,6259	15,1087	12,6706	12,3972	10,0502
	29	30	16	22	16	24	12	28	21	24
115	13,8318	11,8325	20,6962	18,1359	18,5411	9,4	15,1271	12,6868	12,3987	13,2924
	29	28	18	23	18	23	13	28	22	23
116	13,8323	11,8369	20,7137	18,144	18,5578	12,654	15,1306	12,695	12,4155	10,057
	28	29	17	21	18	24	11	28	20	23
117	13,8452	11,8448	20,7261	18,1465	18,5666	12,6713	15,1389	12,707	12,4244	10,0703
	30	29	17	22	17	23	12	28	21	23
118	13,8567	11,8584	20,7259	18,1498	18,573	12,6821	15,1412	12,7259	12,4434	10,0885
	28	30	18	21	16	23	12	27	22	24
119	13,862	11,8632	20,7432	18,1528	18,5846	12,6848	15,1554	12,7357	12,4618	10,0895
	29	29	18	22	18	23	13	27	21	22
120	13,8637	11,8642	20,7545	18,1579	18,5974	12,6873	15,156	12,7507	12,4709	10,0935
	29	29	18	22	16	24	12	28	20	24

Додаток 3

Варіанти завдань до задачі 2.37

№		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278	0,0317	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278
2	2	0,0119	0,0198	0,0079	0,0159	0,0238	0,0278	0,0119	0,0198	0,0079	0,0159	0,0238
3	3	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397	0,0437	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397
4	4	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357	0,0397	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357
5	5	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437	0,0476	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437
6	6	0,0198	0,0278	0,0159	0,0238	0,0317	0,0357	0,0198	0,0278	0,0159	0,0238	0,0317
	7	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278	0,0317	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278
	8	0,0119	0,0198	0,0079	0,0159	0,0238	0,0278	0,0119	0,0198	0,0079	0,0159	0,0238
	9	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397	0,0437	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397
	10	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357	0,0397	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357
	11	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437	0,0476	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437

№		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	12	0,0198	0,0278	0,0159	0,0238	0,0317	0,0357	0,0198	0,0278	0,0159	0,0238	0,0317
8	13	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357	0,0397	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357
9	14	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437	0,0476	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437
10	15	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278	0,0317	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278
11	16	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397	0,0437	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397
12	17	0,0119	0,0198	0,0079	0,0159	0,0238	0,0278	0,0119	0,0198	0,0079	0,0159	0,0238
	18	0,0198	0,0278	0,0159	0,0238	0,0317	0,0357	0,0198	0,0278	0,0159	0,0238	0,0317
	19	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357	0,0397	0,0238	0,0317	0,0198	0,0278	0,0357
	20	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437	0,0476	0,0317	0,0397	0,0278	0,0357	0,0437
	21	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278	0,0317	0,0159	0,0238	0,0119	0,0198	0,0278
	22	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397	0,0437	0,0278	0,0357	0,0238	0,0317	0,0397

№		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	1	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437	0,0476	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437
14	2	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357	0,0397	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357
15	3	0,0198	0,0119	0,0159	0,0238	0,0278	0,0317	0,0198	0,0119	0,0159	0,0238	0,0278
16	4	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397	0,0437	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397
17	5	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317	0,0357	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317
18	6	0,0159	0,0079	0,0119	0,0198	0,0238	0,0278	0,0159	0,0079	0,0119	0,0198	0,0238
	7	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437	0,0476	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437
	8	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357	0,0397	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357
	9	0,0198	0,0119	0,0159	0,0238	0,0278	0,0317	0,0198	0,0119	0,0159	0,0238	0,0278
	10	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397	0,0437	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397
	11	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317	0,0357	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317

№		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
19	1	0,0159	0,0079	0,0119	0,0198	0,0238	0,0278	0,0159	0,0079	0,0119	0,0198	0,0238
20	2	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397	0,0437	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397
21	3	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317	0,0357	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317
22	4	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357	0,0397	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357
23	5	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437	0,0476	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437
24	6	0,0198	0,0119	0,0159	0,0238	0,0278	0,0317	0,0198	0,0119	0,0159	0,0238	0,0278
	7	0,0159	0,0079	0,0119	0,0198	0,0238	0,0278	0,0159	0,0079	0,0119	0,0198	0,0238
	8	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397	0,0437	0,0317	0,0238	0,0278	0,0357	0,0397
	9	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317	0,0357	0,0238	0,0159	0,0198	0,0278	0,0317
	10	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357	0,0397	0,0278	0,0198	0,0238	0,0317	0,0357
	11	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437	0,0476	0,0357	0,0278	0,0317	0,0397	0,0437

№		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
25	1	0,0013	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0476	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317
26	2	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238
27	3	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159	0,0119	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159
28	4	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278
29	5	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198
30	6	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159	0,0119	0,0079	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159	0,0119
	7	0,0476	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0476	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317
	8	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238
	9	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159	0,0119	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159
	10	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0437	0,0397	0,0357	0,0317	0,0278
	11	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198	0,0159	0,0357	0,0317	0,0278	0,0238	0,0198

Додаток И

Вихідні дані до задачі 2.38

№ варіант	Інтервали							
	статистичний розподіл похибок вимірювань кутів тріангуляції (кількість похибок)							
1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	-4,-3	-3,-2	-2,-1	-1,0	0,1	1,2	2,3	3,4
1	11	29	70	130	111	71	30	9
2	9	29	79	139	109	69	33	8
3	8	27	69	127	122	70	29	7
4	7	31	82	126	130	79	27	8
5	8	30	73	125	132	69	31	6
6	6	43	85	124	133	82	30	9
7	9	42	89	123	120	73	43	5
8	5	43	90	122	119	85	42	7
9	7	39	71	121	117	89	43	6
10	6	27	83	120	124	90	39	10
11	10	37	88	127	134	71	27	12
12	12	30	78	133	139	83	37	10
13	10	34	75	130	128	88	30	6
14	6	32	76	128	136	78	34	8
15	8	38	81	127	122	75	32	7
16	7	29	84	125	120	76	38	6
17	7	34	83	135	128	81	29	9
18	9	31	82	132	129	84	34	10
19	10	36	81	130	140	83	31	7
20	7	38	80	125	132	82	36	6
21	6	35	79	123	133	81	38	9
22	9	38	69	121	128	80	35	6
23	6	39	80	130	129	79	38	5
24	5	40	83	128	118	69	39	7
25	7	41	85	122	132	80	40	7
26	7	46	79	121	123	83	41	6
27	6	36	77	120	139	85	46	9
28	9	38	72	135	112	79	36	10
29	10	32	86	136	126	77	38	12
30	12	38	88	137	131	72	32	11

Кінець додатка И

1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	11	35	75	132	128	86	38	5
32	5	33	73	128	130	88	35	7
33	7	39	71	129	128	75	33	5
34	5	40	81	124	139	73	39	9
35	9	38	83	124	125	71	40	7
36	7	35	85	121	128	81	38	8
37	8	33	84	118	131	83	35	6
38	6	29	82	119	127	85	33	8
39	8	38	79	121	132	84	29	9
40	9	37	82	120	133	82	38	7
41	7	39	88	121	128	79	37	9
42	9	40	79	127	116	82	39	8
43	8	42	80	123	134	88	40	10
44	10	38	78	128	125	79	42	11
45	11	39	84	132	140	80	38	6
46	6	33	74	129	132	78	39	9
47	9	39	73	119	127	84	33	8
48	8	36	70	117	119	74	39	6
49	6	38	75	116	125	73	36	9
50	9	44	77	130	139	70	38	7

Додаток К

Функція густини нормального розподілу

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

t	f(t)	t	f(t)	t	f(t)	t	f(t)
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,39894	0,56	0,34105	1,12	0,21307	1,68	0,09728
0,01	0,39892	0,57	0,33912	1,13	0,21069	1,69	0,09566
0,02	0,39886	0,58	0,33718	1,14	0,20831	1,7	0,09405
0,03	0,39876	0,59	0,33521	1,15	0,20594	1,71	0,09246
0,04	0,39862	0,6	0,33322	1,16	0,20357	1,72	0,09089
0,05	0,39844	0,61	0,33121	1,17	0,20121	1,73	0,08933
0,06	0,39822	0,62	0,32918	1,18	0,19886	1,74	0,0878
0,07	0,39797	0,63	0,32713	1,19	0,19652	1,75	0,08628
0,08	0,39767	0,64	0,32506	1,2	0,19419	1,76	0,08478
0,09	0,39733	0,65	0,32297	1,21	0,19186	1,77	0,08329
0,1	0,39695	0,66	0,32086	1,22	0,18954	1,78	0,08183
0,11	0,39654	0,67	0,31874	1,23	0,18724	1,79	0,08038
0,12	0,39608	0,68	0,31659	1,24	0,18494	1,8	0,07895
0,13	0,39559	0,69	0,31443	1,25	0,18265	1,81	0,07754
0,14	0,39505	0,7	0,31225	1,26	0,18037	1,82	0,07614
0,15	0,39448	0,71	0,31006	1,27	0,1781	1,83	0,07477
0,16	0,39387	0,72	0,30785	1,28	0,17585	1,84	0,07341
0,17	0,39322	0,73	0,30563	1,29	0,1736	1,85	0,07206
0,18	0,39253	0,74	0,30339	1,3	0,17137	1,86	0,07074
0,19	0,39181	0,75	0,30114	1,31	0,16915	1,87	0,06943
0,2	0,39104	0,76	0,29887	1,32	0,16694	1,88	0,06814
0,21	0,39024	0,77	0,29659	1,33	0,18474	1,89	0,06687
0,22	0,3894	0,78	0,29431	1,34	0,16256	1,9	0,06562
0,23	0,38853	0,79	0,292	1,35	0,16038	1,91	0,06438
0,24	0,38762	0,8	0,28969	1,36	0,15822	1,92	0,06316
0,25	0,38667	0,81	0,28737	1,37	0,15608	1,93	0,06195
0,26	0,38568	0,82	0,28504	1,38	0,15395	1,94	0,06077
0,27	0,38466	0,83	0,28269	1,39	0,15183	1,95	0,05959
0,28	0,38361	0,84	0,28034	1,4	0,14973	1,96	0,05844
0,29	0,38251	0,85	0,27798	1,41	0,14764	1,97	0,0573
0,3	0,38139	0,86	0,27562	1,42	0,14556	1,98	0,05618
0,31	0,38023	0,87	0,27324	1,43	0,1435	1,99	0,05508
0,32	0,37903	0,88	0,27086	1,44	0,14146	2	0,05399
0,33	0,3778	0,89	0,26848	1,45	0,13943	2,01	0,05292
0,34	0,37654	0,9	0,26609	1,46	0,13742	2,02	0,05186
0,35	0,37524	0,91	0,26369	1,47	0,13542	2,03	0,05082
0,36	0,37391	0,92	0,26129	1,48	0,13344	2,04	0,0498
0,37	0,37255	0,93	0,25888	1,49	0,13147	2,05	0,04879
0,38	0,37115	0,94	0,25647	1,5	0,12952	2,06	0,0478
0,39	0,36973	0,95	0,25406	1,51	0,12758	2,07	0,04682

Продовження додатка К

1	2	3	4	5	6	7	8
0,4	0,36827	0,96	0,25164	1,52	0,12566	2,08	0,04586
0,41	0,36678	0,97	0,24923	1,53	0,12376	2,09	0,04491
0,42	0,36526	0,98	0,24681	1,54	0,12188	2,1	0,04398
0,43	0,36371	0,99	0,24439	1,55	0,12001	2,11	0,04307
0,44	0,36213	1	0,24197	1,56	0,11816	2,12	0,04217
0,45	0,36053	1,01	0,23955	1,57	0,11632	2,13	0,04128
0,46	0,35889	1,02	0,23713	1,58	0,1145	2,14	0,04041
0,47	0,35723	1,03	0,23471	1,59	0,1127	2,15	0,03955
0,48	0,35553	1,04	0,2323	1,6	0,11092	2,16	0,03871
0,49	0,35381	1,05	0,22988	1,61	0,10915	2,17	0,03788
0,5	0,35207	1,06	0,22747	1,62	0,10741	2,18	0,03706
0,51	0,35029	1,07	0,22506	1,63	0,10567	2,19	0,03626
0,52	0,34849	1,08	0,22265	1,64	0,10396	2,2	0,03547
0,53	0,34667	1,09	0,22025	1,65	0,10226	2,21	0,0347
0,54	0,34482	1,1	0,21785	1,66	0,10059	2,22	0,03394
0,55	0,34294	1,11	0,21546	1,67	0,09893	2,23	0,03319
2,24	0,03246	2,8	0,00792	3,36	0,00141	3,92	0,00018
2,25	0,03174	2,81	0,0077	3,37	0,00136	3,93	0,00018
2,26	0,03103	2,82	0,00748	3,38	0,00132	3,94	0,00017
2,27	0,03034	2,83	0,00727	3,39	0,00127	3,95	0,00016
2,28	0,02965	2,84	0,00707	3,4	0,00123	3,96	0,00016
2,29	0,02898	2,85	0,00687	3,41	0,00119	3,97	0,00015
2,3	0,02833	2,86	0,00668	3,42	0,00115	3,98	0,00014
2,31	0,02768	2,87	0,00649	3,43	0,00111	3,99	0,00014
2,32	0,02705	2,88	0,00631	3,44	0,00107	4	0,00013
2,33	0,02643	2,89	0,00613	3,45	0,00104	4,01	0,00013
2,34	0,02582	2,9	0,00595	3,46	0,001	4,02	0,00012
2,35	0,02522	2,91	0,00578	3,47	0,00097	4,03	0,00012
2,36	0,02463	2,92	0,00562	3,48	0,00094	4,04	0,00011
2,37	0,02406	2,93	0,00545	3,49	0,0009	4,05	0.00011
2,38	0,02349	2,94	0,0053	3,5	0,00087	4,06	0,00011
2,39	0,02294	2,95	0,00514	3,51	0,00084	4,07	0,0001
2,4	0,02239	2,96	0,00499	3,52	0,00081	4,08	0,0001
2,41	0,02186	2,97	0,00485	3,53	0,00079	4,09	0,00009
2,42	0,02134	2,98	0,0047	3,54	0,00076	4,1	0,00009
2,43	0,02083	2,99	0,00457	3,55	0,00073	4,11	0,00009
2,44	0,02033	3	0,00443	3,56	0,00071	4,12	0,00008
2,45	0,01984	3,01	0,0043	3,57	0,00068	4,13	0,00008
2,46	0,01936	3,02	0,00417	3,58	0,00066	4,14	0,00008
2,47	0,01888	3,03	0,00405	3,59	0,00063	4,15	0,00007
2,48	0,01842	3,04	0,00393	3,6	0,00061	4,16	0,00007
2,49	0,01797	3,05	0,00381	3,61	0,00059	4,17	0,00007
2,5	0,01753	3,06	0,0037	3,62	0,00057	4,18	0,00006
2,51	0,01709	3,07	0,00358	3,63	0,00055	4,19	0,00006
2,52	0,01667	3,08	0,00348	3,64	0,00053	4,2	0,00006
2,53	0,01625	3,09	0,00337	3,65	0,00051	4,21	0,00006
2,54	0,01585	3,1	0,00327	3,66	0,00049	4,22	0,00005
2,55	0,01545	3,11	0,00317	3,67	0,00047	4,23	0,00005

Кінець додатка К

1	2	3	4	5	6	7	8
2,56	0,01506	3,12	0,00307	3,68	0,00046	4,24	0,00005
2,57	0,01468	3,13	0,00298	3,69	0,00044	4,25	0,00005
2,58	0,01431	3,14	0,00288	3,7	0,00042	4,26	0,00005
2,59	0,01394	3,15	0,00279	3,71	0,00041	4,27	0,00004
2,6	0,01358	3,16	0,00271	3,72	0,00039	4,28	0,00004
2,61	0,01323	317	0,00262	3,73	0,00038	4,29	0,00004
2,62	0,01289	3,18	0,00254	3,74	0,00037	4,3	0,00004
2,63	0,01256	3,19	0,00246	3,75	0,00035	4,31	0,00004
2,64	0,01223	3,2	0,00238	3,76	0,00034	4,32	0,00004
2,65	0,01191	3,21	0,00231	3,77	0,00033	4,33	0,00003
2,66	0,0116	3,22	0,00224	3,78	0,00031	4,34	0,00003
2,67	0,0113	3,23	0,00216	3,79	0,0003	4,35	0,00003
2,68	0,011	3,24	0,0021	3,3	0,00029	4,36	0,00003
2,69	0,01071	3,25	0,00203	3,81	0,00028	4,37	0,00003
2,7	0,01042	3,26	0,00196	3,82	0,00027	4,38	0,00003
2,71	0,01014	3,27	0,0019	3,83	0,00026	4,39	0,00003
2,72	0,00987	3,28	0,00184	3,84	0,00025	4,4	0,00002
2,73	0,00961	3,29	0,00178	3,85	0,00024	4,52	0,00001
2,74	0,00935	3,3	0,00172	3,86	0,00023	4,6	0,00000
2,75	0,00909	3,31	0,00167	3,87	0,00022		
2,76	0,00885	3,32	0,00161	3,88	0,00021		
2,77	0,00861	3,33	0,00156	3,89	0,00021		
2,78	0,00837	3,34	0,00151	3,9	0,0002		
2,79	0,00814	3,35	0,00146	3,91	0,00019		

Додаток Л

Значення функції Лапласа

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0, 3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0, 3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3883	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0, 2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0, 2703	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0, 2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0, 2764	1,28	0, 3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0, 2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0, 2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0, 2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0.4066	1,84	0,4671	2.72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0, 2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0, 2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0, 2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0, 3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985

Кінець додатка Л

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,41	0,1591	0,93	0, 3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0, 3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0, 3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0, 3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0, 3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0, 3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

Додаток М

Критичні точки χ^2 – розподілу (критерій Пірсона)

Число ступенів довільності r	Рівень значущості α						
	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,370
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,220	3,360
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,340	3,000	4,350
6	0,872	1,134	1,635	2,200	3,070	3,830	5,350
7	1,239	1,564	2,170	2,830	3,820	4,670	6,350
8	1,646	2,030	2,730	3,490	4,560	5,530	7,340
9	2,090	2,530	3,320	4,170	5,380	6,390	8,340
10	2,560	3,060	3,940	4,860	6,180	7,270	9,340
Число ступенів довільності r	Рівень значущості α						
	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,074	1,642	2,710	3,840	5,410	6,640	10,830
2	2,410	3,220	4,600	5,990	7,820	9,210	13,820
3	3,660	4,640	6,250	7,820	9,840	11,340	16,270
4	4,880	5,990	7,780	9,490	11,670	13,280	18,460
5	6,060	7,290	9,240	11,070	13,390	15,090	20,500
6	7,230	8,560	10,640	12,590	15,030	16,810	22,500
7	8,380	9,800	12,020	14,070	16,620	18,480	24,300
8	9,520	11,030	13,360	15,510	18,170	20,100	27,100
9	10,660	12,240	14,680	16,920	19,680	21,700	27,900
10	11,780	13,440	15,990	18,310	21,200	23,200	29,600

Продовження додатка М

Число ступенів довіль-ності r	Рівень значущості α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,001
1	2	3	4	5	6	7
1	0,000157	0,000982	0,003932	3,841455	5,023903	6,634891
2	0,0201	0,050636	0,102586	5,991476	7,377779	9,210351
3	0,114832	0,215795	0,351846	7,814725	9,348404	11,34488
4	0,297107	0,484419	0,710724	9,487728	11,14326	13,2767
5	0,554297	0,831209	1,145477	11,07048	12,83249	15,08632
6	0,872083	1,237342	1,63538	12,59158	14,44935	16,81187
7	1,239032	1,689864	2,167349	14,06713	16,01277	18,47532
8	1,646506	2,179725	2,732633	15,50731	17,53454	20,09016
9	2,087889	2,700389	3,325115	16,91896	19,02278	21,66605
10	2,558199	3,246963	3,940295	18,30703	20,4832	23,20929
11	3,053496	3,815742	4,574809	19,67515	21,92002	24,72502
12	3,570551	4,403778	5,226028	21,02606	23,33666	26,21696
13	4,1069	5,008738	5,891861	22,36203	24,73558	27,68818
14	4,660415	5,628724	6,570632	23,68478	26,11893	29,14116
15	5,229356	6,262123	7,260935	24,9958	27,48836	30,57795
16	5,812197	6,907664	7,961639	26,29622	28,84532	31,99986
17	6,407742	7,564179	8,671754	27,5871	30,19098	33,40872
18	7,014903	8,230737	9,390448	28,86932	31,52641	34,80524
19	7,632698	8,906514	10,11701	30,14351	32,85234	36,19077
20	8,260368	9,590772	10,8508	31,41042	34,16958	37,56627
21	8,897172	10,28291	11,59132	32,67056	35,47886	38,93223
22	9,542494	10,98233	12,33801	33,92446	36,78068	40,28945
23	10,19569	11,68853	13,09051	35,17246	38,07561	41,63833
24	10,85635	12,40115	13,84842	36,41503	39,36406	42,97978
25	11,52395	13,11971	14,6114	37,65249	40,6465	44,31401
26	12,19818	13,84388	15,37916	38,88513	41,92314	45,64164
27	12,87847	14,57337	16,15139	40,11327	43,19452	46,96284
28	13,56467	15,30785	16,92788	41,33715	44,46079	48,27817
29	14,25641	16,04705	17,70838	42,55695	45,72228	49,58783
30	14,95346	16,79076	18,49267	43,77295	46,97922	50,89218
31	15,65547	17,53872	19,28056	44,98534	48,23192	52,19135
32	16,3622	18,29079	20,07191	46,19424	49,48044	53,48566
33	17,07348	19,04666	20,86652	47,3999	50,7251	54,77545
34	17,7891	19,80624	21,66428	48,60236	51,96602	56,06085

Продовження додатка М

1	2	3	4	5	6	7
35	18,50887	20,56938	22,46501	49,80183	53,20331	57,34199
36	19,23263	21,33587	23,26862	50,99848	54,43726	58,61915
37	19,96027	22,10562	24,07494	52,19229	55,66798	59,89256
38	20,69141	22,87849	24,88389	53,38351	56,89549	61,16202
39	21,42614	23,6543	25,69538	54,57224	58,12005	62,42809
40	22,1642	24,43306	26,5093	55,75849	59,34168	63,69077
41	22,90556	25,21452	27,32556	56,9424	60,56055	64,94998
42	23,65014	25,99866	28,14405	58,12403	61,77672	66,20629
43	24,39757	26,78537	28,96471	59,30352	62,99031	67,45929
44	25,14801	27,57454	29,7875	60,4809	64,20141	68,70964
45	25,9012	28,36618	30,61226	61,65622	65,41013	69,9569
46	26,65719	29,16002	31,439	62,82961	66,61647	71,2015
47	27,41582	29,95616	32,26761	64,00113	67,82064	72,44317
48	28,17697	30,7545	33,09807	65,17076	69,02257	73,68256
49	28,94059	31,55493	33,93029	66,33865	70,22236	74,91939
50	29,70673	32,35738	34,76424	67,50481	71,42019	76,1538
51	30,47501	33,1618	35,59986	68,66932	72,61603	77,38601
52	31,24569	33,96813	36,43708	69,83216	73,80992	78,61563
53	32,01855	34,7763	37,27589	70,99343	75,0019	79,84336
54	32,79343	35,58633	38,1162	72,15321	76,19206	81,06878
55	33,57052	36,39811	38,95805	73,31148	77,38044	82,29198
56	34,34954	37,21157	39,80127	74,46829	78,56713	83,51355
57	35,13056	38,02672	40,64592	75,62372	79,75218	84,73265
58	35,91351	38,84352	41,49198	76,77778	80,9356	85,95015
59	36,69818	39,66185	42,3393	77,93049	82,11737	87,16583
60	37,4848	40,48171	43,18797	79,08195	83,29771	88,37943
61	38,2732	41,30317	44,0379	80,23209	84,4764	89,59122
62	39,06326	42,12599	44,88904	81,38098	85,6537	90,8015
63	39,85509	42,95031	45,74135	82,52872	86,82963	92,00989
64	40,64851	43,77594	46,5949	83,67524	88,00398	93,2167
65	41,44355	44,60297	47,44957	84,82064	89,17716	94,422
66	42,24025	45,43137	48,30538	85,96494	90,34883	95,62559
67	43,03836	46,261	49,16225	87,10804	91,51933	96,82768
68	43,83804	47,09194	50,02026	88,25017	92,68849	98,02832
69	44,63917	47,92412	50,87924	89,39119	93,85648	99,22741
70	45,4417	48,75754	51,73926	90,53126	95,02315	100,4251
71	46,24564	49,59217	52,6003	91,67026	96,18873	101,6214
72	47,05102	50,42794	53,46232	92,80827	97,35298	102,8163
73	47,85773	51,26478	54,3253	93,94533	98,51621	104,0098
74	48,66566	52,10282	55,18922	95,08146	99,67838	105,2019

Кінець додатка М

1	2	3	4	5	6	7
75	49,47512	52,94192	56,05405	96,21666	100,8393	106,3929
76	50,28553	53,78209	56,91982	97,35097	101,9992	107,5824
77	51,09732	54,62332	57,78646	98,48438	103,1581	108,7709
78	51,91041	55,46561	58,65393	99,61696	104,3159	109,9582
79	52,72478	56,30887	59,52228	100,7486	105,4727	111,144
80	53,53998	57,15315	60,39146	101,8795	106,6285	112,3288
81	54,35668	57,9984	61,2615	103,0095	107,7834	113,5123
82	55,17428	58,84465	62,1323	104,1387	108,9373	114,6948
83	55,99301	59,69173	63,00389	105,2672	110,0902	115,8762
84	56,81293	60,53983	63,87624	106,3949	111,2422	117,0566
85	57,63391	61,38877	64,74937	107,5217	112,3933	118,2356
86	58,45588	62,23863	65,62326	108,6479	113,5436	119,4137
87	59,27906	63,08937	66,49788	109,7733	114,6929	120,5909
88	60,10295	63,94093	67,37323	110,898	115,8415	121,7672
89	60,92799	64,79339	68,24927	112,022	116,989	122,9422
90	61,75402	65,64659	69,12602	113,1452	118,1359	124,1162
91	62,58097	66,50068	70,00347	114,2679	119,282	125,2893
92	63,40892	67,35557	70,88159	115,3898	120,427	126,4616
93	64,238	68,21125	71,76032	116,511	121,5714	127,633
94	65,06761	69,06762	72,63976	117,6317	122,7152	128,8032
95	65,89826	69,92486	73,51982	118,7516	123,858	129,9725
96	66,73003	70,78279	74,40057	119,8709	125,0001	131,1411
97	67,56234	71,64154	75,28184	120,9897	126,1414	132,3089
98	68,39571	72,50091	76,16378	122,1077	127,2821	133,4756
99	69,22986	73,3611	77,04631	123,2252	128,4219	134,6415
100	70,065	74,22188	77,92944	124,3421	129,5613	135,8069

Додаток Н

Критичні значення для найбільшого відхилення емпіричного розподілу від теоретичного (критерій Колмогорова)

r	Рівень значущості *α*					*k*	Рівень значущості α				
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01		0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,90000	0,95000	0,97500	0,99000	0,99500	51	0,14697	0,16769	0,186591	0,20864	0,22386
2	68377	77639	84189	90000	92929	52	14558	16637	18482	20667	722174
3	56481	63604	70760	78456	82900	53	14423	16483	18311	20475	21968
4	49265	56522	62394	68887	73424	54	14292	16322	18144	20289	21768
5	44698	50945	56328	62718	66853	55	14164	16186	17981	20107	21574
6	0,41037	0,46799	0,51926	0,57741	0,61661	56	0,14040	0,16044	0,17823	0,19930	0,21384
7	38148	43607	48342	53844	57581	57	13919	15906	17669	19758	21199
8	35831	40962	45427	50654	54179	58	13801	15771	1,7519	19590	21019
9	33910	38746	43001	47960	51332	59	13686	15639	17373	19427	20844
10	32260	36866	40925	45662	48893	60	13573	15511	17231	19267	20673
11	0,30829	0,35242	0,39122	0,43670	0,46770	61	0,13464	0,15385	0,17091	0,19112	0,20506
12	29577	33815	37543	41918	44905	62	13357	15263	16956	18960	20343
13	28470	32549	36143	40362	43247	63	13253	15144	16823	18812	20184
14	27481	31417	34890	38970	41762	64	13151	15027	16693	18667	20029
15	26588	30397	33760	37713	40420	65	13052	14913	16567	18525	19877
16	0,25778	0,29472	0,2733	0,36571	0,39201	*66*	0,12954	0,14802	0,16443	0,18387	0,19729
17	25039	28627	31796	35528	38086	6"	12859	14693	16322	18252	19584
18	24360	27851	30936	34569	37062	68	12766	14587	16204	18119	19442
19	23735	27136	30143	33685	36117	69	12675	14483	16088	17990	19303
20	23156	26473	29408	32866	35241	70	12586	14.381	15975	17863	19167
21	0,2617	0,25858	0,28724	0,32104	0,34427	71	0,12499	0,14281	0,15864	0,17739	0,19034
22	22115	25283	28087	31394	33666	72	12413	14183	15755	17618	18034
23	21645	24746	27490	30728	32954	73	12329	14087	15649	17498	18776
24	21205	24242	26931	30104	32286	74	12247	13993	15544	17382	18650
25	20790	23768	26404	29516	31657	75	12167	13901	15442	17286	18528I
26	0,20399	0,23320	0,25907	0,28962	0,31064	76	0,12088	0,13811	0,15342	0,17155	0,18408
27	20030	22898	25438	28438	30502	77	12011	13723	15244	17045	18290
28	19680	22497	24993	27942	29971	78	11935	13636	15147	16938	18174
29	19348	22117	24571	27471	29466	79	11860	13551	15052	16832	18060
30	19032	21756	24170	27023	28987	80	11787	13467	14960	16728	17949
31	0,18732	0,21412	0,23788	0,26596	0,28530	81	0,11716	0,13385	0,14868	0,16626	0,17840
32	18445	21085	23424	26189	28094	82	11645	I 3305	14779	16526	17732
33	18171	20771	23076	25801	27677	83	11576	13226	14691	16428	17627
34	17909	20472	22743	25429	27279	84	1 1508	13148	14605	16331	17523
35	17659	20185	22425	25073	26897	85	11442	13072	14520	16236	17421

Кінець додатка Н

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36	0,17418	0,19910	0,22119	0,24732	0,26532	86	0,11376	0,12997	0,14437	0,16143	0,17321
37	17188	19646	21826	24404	26160	87	11311	12923	14355	16051	17223
38	16966	19392	21544	24089	25843	88	11248	12850	14274	15961	17126
39	16753	19148	21273	23786	25518	89	11186	12779	14195	1 5873	17031
40	16547	18913	21012	23494	25205	90	11125	12709	14117	15786	16938
41	0,16349	0,18687	0,20760	0,23213	0,24904	91	0,11064	0,12640	0,14040	0,15700	0,16846
42	16158	18468	20517	22941	24613	92	11005	12572	13965	15616	16755
43	15974	18257	20283	22679	24332	93	10947	12506	13891	15533	16666
44	15796	18053	20056	22426	24060	94	10889	12440	13818	15451	16579
45	15623	17856	19837	22181	23798	95	10833	12375	13746	15371	16493
46	0,15457	0,17665	0,19625	0,21944	0,23544	96	0,10777	0,12312	0,13675	0,15291	0,16408
47	15295	17481	19420	21715	23298	97	10722	12249	13606	15214	16324
48	15135	17302	19221	21493	23059	98	10668	12187	13537	15137	16242
49	14987	17128	19028	21277	22828	99	10615	12126	13496	15061	16161
50	14840	16959	18841	21068	22604	100	10563	12067	13403	14987	16081

Додаток П

Варіанти вихідних даних та результатів вимірів до задачі 2.39

Варіант	Пункт мережі	Наближені координати, м		Варіант	Результати вимірів	
		x^0	y^0			
1		9701,135	7201,756	1		146° 24′ 01″
2		9702,135	7202,756	2		146° 24′ 02″
3		9703,135	7203,756	3		146° 24′ 03″
4		9704,135	7204,756	4		146° 24′ 04″
5		9705,135	7205,756	5		146° 24′ 05″
6		9706,135	7206,756	6		146° 24′ 06″
7		9707,135	7207,756	7		146° 24′ 07″
8		9708,135	7208,756	8		146° 24′ 08″
9		9709,135	7209,756	9		146° 24′ 09″
10		9710,135	7210,756	10		146° 24′ 10″
11		9711,135	7211,756	11		146° 24′ 11″
12		9712,135	7212,756	12		146° 24′ 12″
13		9713,135	7213,756	13		146° 24′ 13″
14		9714,135	7214,756	14		146° 24′ 14″
15	Початковий пункт Н	9715,135	7215,756	15	Дирекційний кут $\alpha_{НК}$	146° 24′ 15″
16		9716,135	7216,756	16		146° 24′ 16″
17		9717,135	7217,756	17		146° 24′ 17″
18		9718,135	7218,756	18		146° 24′ 18″
19		9719,135	7219,756	19		146° 24′ 19″
20		9720,135	7220,756	20		146° 24′ 20″
21		9721,135	7221,756	21		146° 24′ 21″
22		9722,135	7222,756	22		146° 24′ 22″
23		9723,135	7223,756	23		146° 24′ 23″
24		9724,135	7224,756	24		146° 24′ 24″
25		9725,135	7225,756	25		146° 24′ 25″
26		9726,135	7226,756	26		146° 24′ 26″
27		9727,135	7227,756	27		146° 24′ 27″
28		9728,135	7228,756	28		146° 24′ 28″
29		9729,135	7229,756	29		146° 24′ 29″
30		9730,135	7230,756	30		146° 24′ 30″
Для всіх варіантів	Кінцевий пункт К	8862,356	7783,342	Довжина сторони $s_{ПК}$, м	1033,295	

Кінець додатка П

Вихідні дані		
шукані репери	варіант	висоти реперів, м
НА	1	201,850
	2	202,850
	3	203,850
	4	204,850
	5	205,850
	6	206,850
	7	207,850
	8	208,850
	9	209,850
	10	210,850
	11	211,850
	12	212,850
	13	213,850
	14	214,850
	15	215,850
	16	216,850
	17	217,850
	18	218,850
	19	219,850
	20	220,850
	21	221,850
	22	222,850
	23	223,850
	24	224,850
	25	225,850
	26	226,850
	27	227,850
	28	228,850
	29	229,850
	30	230,850
НВ	235,731 (для всіх варіантів)	
НС	200,130 (для всіх варіантів)	

Додаток Р

Варіанти вихідних даних та результатів вимірів до задачі 2.41

1. Схема нівелірної мережі.

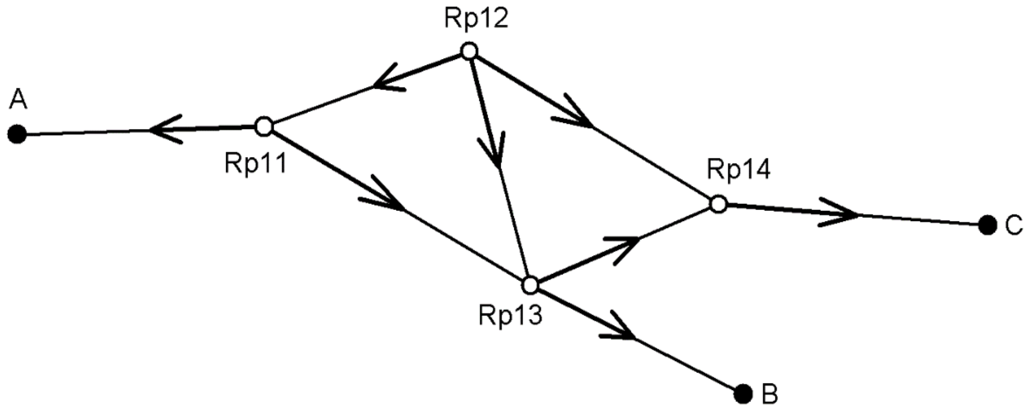


Рис. Схема нівелірної мережі.

Схема нівелірної мережі однакова для всіх варіантів.

2. Висота вихідних реперів:

Висота вихідного репера A визначається за формулою:

$$H_A = 188{,}GN,$$

де G – група (наприклад, 41); N – порядковий номер за списком студента в журналі обліку успішності.

Висоти реперів $H_B = 188{,}462$ м; $H_C = 186{,}298$ м (для всіх варіантів).

3. Результати вимірів записано у таблицю.

Результати вимірів (для всіх варіантів)

№ ходу *i*	Репери		Виміряне перевищення h_i, м	Довжина ходу L_i, км
	початковий	кінцевий		
1	A	Рп11	2,186	10,7
2	Рп11	Рп12	1,566	14,2
3	Рп11	Рп13	-0,302	16,7
4	Рп12	Рп13	-1,881	12,4
5	Рп14	Рп13	0,915	15,8
6	Рп12	Рп14	-2,814	15,1
7	Рп14	C	-3,137	17,8
8	B	Рп13	1,489	10,0

Навчальне видання

Рижок Зоряна Русланівна
Поляковська Людмила Леонідівна
Ступень Роман Михайлович
Колодій Павло Петрович

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Навчальний посібник

Редактор *Д. Б. Дончак*

Коректор *Л. Г. Лісович-Біла*

Підписано до друку 30.10.2020 р. Формат 60х84/16
Папір офсетний. Друк офсетний
Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 10,4
Наклад 300 пр.

ТзОВ «Галицька видавнича спілка»
вул. Туган-Барановського, 24, м. Львів, 79005
тел. (032) 276-37-99
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 198

Віддруковано:
СПД ФОП «Марусич М.М.»
Львів, пл. Я.Осмомисла, 5/11
Тел./факс +38(032) 261 51 31
e-mail:interprint-m@ukr.net