Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет природокористування

Т.І. Бубняк

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА з основами системного аналізу

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти

ЛЬВІВ 2022

УДК 517

Рецензенти:

С. В. Мягкота, завідувач кафедри фізики, д. ф.-м. н., професор (Львівський національний університет природокористування).

Я. І. Соколовський, д. т. н., професор

(Львівський національний університет «Львівська політехніка»).

Рекомендовано до друку вченою радою Львівського національного університету природокористування

Протокол № ______від _________ 2021 року

Бубняк Т. І.

Б25 Вища та прикладна математика з основами системного аналізу: Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти. Львів: 2022. – 330с.

До навчального посібника увійшли основні розділи вищої та прикладної математики, рекомендовані програмою вищої освіти для студентів інженерно-технічних та економічних спеціальностей.

Структура навчально-методичного посібника така: До кожного розділу сформульовані визначення, твердження та виписані основні формули (деякі з виведеннями). Далі йдуть розв’язані приклади чи задачі на відповідну тематику з детальним поясненням. У кінці кожного розділу пропонуються вправи та задачі (прикладні та підвищеної трудності) для аудиторної і самостійної роботи, переважна більшість з яких супроводжуються відповідями.

Для студентів інженерно-технічних та економічних спеціальностей вузів України.

ISBN

З М І С Т

Передмова

Вища математика, для більшості студентів, є складним предметом як у розумінні теоретичних основ так і у розв'язуванні практичних задач. Тому важливим є створення якісного навчально-методичного забезпечення навчального процесу, що даватиме мотив вивчати математику для розв'язування задач прикладної спрямованості за фахом, розвиток математичних і професійних компетентностей.

Як відомо, задачі прикладного характеру відіграють суттєву роль у підготовці інженера: вони оживляють навчальний процес і викликають цікавість до вивчення математики. В сучасних задачниках мало місця виділяється для прикладних задач пов'язаних з виробництвом. Тому метою цього видання є, хоча би частково, заповнити цю прогалину.

Посібник написаний у відповідності до програми вузів для машинобудівних, механічних, енергетичних, будівельних та економічних спеціальностей.

Проте, він може бути корисним і іншим галузям практичних знань, з якими майбутній спеціаліст зустрінеться у своїй практичній діяльності.

Метою цього видання є:

- формування та розвиток у студентів інтелекту та здатності до логічного і алгоритмічного мислення;
- оволодіння основними математичними методами у пошуках оптимальних рішень та виборі найкращих способів реалізації цих рішень;
- оволодіння основними методами розв'язування спеціальних задач прикладного характеру за профілем майбутніх фахівців.

У процесі вивчення курсу вищої та прикладної математики студент повинен вміти:

- створювати математичні моделі реальних механічних задач та представляти їх як прикладні задачі математики;
- вміти розробляти раціональні методи дослідження створених моделей, використовувати чисельні методи розв'язування з використанням комп'ютерних програм
- аналізувати отримані результати чисельного експерименту.

Широке застосування ЕОМ у різних галузях науки і техніки сприяє інтенсивному впровадженню в практику ефективних чисельних методів, що дають можливість розв'язувати складні прикладні задачі пов'язані з розрахунком і проектуванням конструкцій, створенням нових технологічних ліній тощо.

Автор вдячний рецензентам за цінні зауваження та поради.

Розділ 1. ВИЩА АЛГЕБРА

Лінійні функції та їх лінійні комбінації є предметом лінійної алгебри. Лінійні однорідні функції описуються системою коефіцієнтів, які записують у вигляді прямокутної таблиці – матриці. Теорія матриць є головною частиною лінійної алгебри.

§ 1. Матриці та дії над ними

Матрицею називають сукупність об'єктів, зокрема чисел, яка записується у вигляді прямокутної таблиці:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матриці скорочено позначають великими латинськими літерами або малими літерами (з двома індексами) у квадратних дужках:

$$A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}],\ \dots .$$

Дві матриці однакового розміру називаються *рівними*, якщо рівні всі їхні відповідні елементи (елементи з однаковими індексами).

Матриці однакових розмірів додаються та віднімаються поелементно:

$$C = A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}] .$$

Добуток матриці на число визначається так:

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] .$$

Нуль-матриця – це матриця, в якої всі елементи нулі:

Одинична матриця – це квадратна матриця, в якої на головній діагоналі всі елементи рівні 1, а решта – нулі.

Визначимо добуток рядка, довжиною n, на стовпчик, висотою n:

$$\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Добуток довільних прямокутних матриць A та B визначається лише в тому випадку, коли довжина (кількість стовпчиків) матриці, що є зліва, дорівнює висоті (кількості рядків) матриці, що є правим множником. Добутком двох матриць A та B буде матриця $C = A \cdot B$ елементи якої $C = \left[c_{ij}\right]$, знаходяться $c_{ij} = \left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\right) \begin{pmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ ... \\ b_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk}$.

Транспонованою до матриці A називається матриця, утворена з матриці A заміною i-го рядка матриці A її i-м стовпчиком. Вона позначається $A^T = \left[a_{ji}\right]$, якщо $A = \left[a_{ij}\right]$ (рядки і стовпці поміняні місцями).

Квадратна матриця $A = \left[a_{ij}\right]$ називається *діагональною*, якщо всі її недіагональні елементи дорівнюють нулю.

§ 2. Визначники та їх властивості

На квадратних матрицях можна будувати визначники. Визначник – це число, обчислене за певним правилом із елементів квадратної матриці.

Визначником 2-го порядку називається число, що позначається символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ і визначається $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Визначником 3-го порядку називається число, що позначається символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ і обчислюється (за правилом трикутника)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 .$$

Визначник 3-го порядку можна обчислити, розкладаючи його за довільним рядком чи стовпчиком на суму визначників 2-го порядку, наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогічно, визначник 4-го порядку можна обчислити, розклавши його за довільним рядком чи стовпчиком на суму чотирьох визначників 3-го порядку і т.ін.

Нехай A – квадратна матриця розміром $n \times n$. Позначимо M_{ij} і назвемо *мінором* елемента a_{ij} матриці $A_{n \times n}$ визначник $(n-1)$-го порядку матриці, яка отримується з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпчика:

$$\mathrm{M}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ назвемо *алгебраїчним доповненням* до елемента a_{ij}.

Розклад визначника матриці A за i-м рядком, через алгебраїчні доповнення, має вигляд

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Аналогічно можна записати розклад визначника за довільним стовпчиком j:

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Наведемо найбільш вживані властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється при заміні рядків стовпчиками
   $\det(A) = \det(A^T)$.
2. При перестановці місцями двох рядків (стовпчиків) визначник змінює знак на протилежний.
3. Визначник, який містить нульовий рядок чи стовпчик, дорівнює нулю.
4. Визначник з двома однаковими чи пропорційним рядками або стовпчиками дорівнює нулю.

5. Спільний множник елементів одного рядка чи стовпчика можна винести за знак визначника.
6. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпчика) додати елементи другого, помноженого на довільне число.
7. Якщо кожен елемент n -го рядка (стовпчика) є сумою двох доданків, то такий визначник розпадається на суму двох визначників, в одному з яких n -й рядок (стовпчик) складається з перших доданків, а в другому – з других; усі інші елементи трьох визначників однакові (ті ж самі).

Матриця B називається *оберненою* до матриці A, якщо $A \cdot B = B \cdot A = I$. Обернену матрицю позначають A^{-1}. Вона знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} матриці A.

Матриця у якої $\det(A) = 0$ називається *виродженою*.

Рангом матриці A називають найвищий порядок мінора (складеного з рядків (стовпчиків) матриці A), що відмінний від нуля.

***Приклад* 1**. Знайти обернену матрицю до заданої $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для існування оберненої матриці необхідно, щоб визначник $\det(A) \neq 0$. Знайдемо визначник матриці

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 54 + 28 + 45 - 27 - 40 - 63 = -3 \neq 0 .$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що $A \cdot A^{-1} = I$.

3. Системи лінійних рівнянь

Розглянемо загальний вигляд системи n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \ . \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Матриця коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Позначимо матриці-стовпчики невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ і вільних членів $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Тоді система рівнянь (1) у матричній формі має вигляд

$$A \cdot X = B . \tag{1'}$$

Помножимо матричне рівняння (1') зліва на A^{-1}, тоді отримаємо розв'язок $X = A^{-1} \cdot B$. Отже, система має єдиний розв'язок лише в тому випадку, коли існує обернена матриця A^{-1}, або якщо головний визначник системи $\det(A)$ не дорівнює нулю.

Теорема Кронекера – Капеллі. Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці A дорівнював рангу розширеної $\tilde{A}$ (розширена матриця $\tilde{A}$ включає в себе і матрицю A, і стовпчик вільних членів) . Причому якщо $r(A) = r(\tilde{A}) = n$, то система має єдиний розв'язок, якщо ж $r(A) = r(\tilde{A}) < n$, то система має безліч розв'язків. (Доведення опускаємо).

Розглянемо кілька методів розв'язання систем лінійних рівнянь.

Метод підстановки. Метод підстановки полягає в тому, що ми визначаємо з одного із n рівнянь системи одну невідому змінну і підставляємо її в решту рівнянь системи. Отримаємо при цьому систему $n-1$ порядку з $n-1$ невідомою. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо значення однієї з невідомих. Підставляючи її в попередню систему, отримаємо значення другої невідомої (і т. д.). Піднімаючись знизу вверх, підставляючи при цьому значення знайдених невідомих, знайдемо розв'язок системи рівнянь.

***Приклад* 1**. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння знаходимо *y*: $y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$.

Підставляємо знайдене y в друге рівняння, отримаємо

$$4x-5\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}x\right)=40.$$ Звідси $x=\frac{115}{23}=5$.

Знаючи x, підставимо його в довільне рівняння системи, отримаємо $y=-4$.

Розв'язок системи (5;−4).

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих). Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих із системи (1). На кожному кроці (етапі) вибираємо головне рівняння з одиничним коефіцієнтом біля головної (ведучої) невідомої, за допомогою якого виключаємо ту чи іншу невідому із системи. Таким чином, прийдемо до системи трикутного виду із якої легко отримати розв'язок.

***Приклад* 2**. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x+5y-4z=-5, \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$$

Розв'язання. Вибираємо із системи головне рівняння $x+5y-4z=-5.$ Якщо такого рівняння немає, то легко це зробити, поділивши все рівняння на коефіцієнт біля x. За допомогою цього головного рівняння виключаємо змінну x з двох інших рівнянь системи:

$$\begin{cases} x+5y-4z=-5, & \big|\cdot(-2) \quad \big|\cdot(-4) \\ -13y+9z=12, \\ -19y+13z=16. \end{cases}$$

На другому кроці поділимо друге рівняння отриманої системи на −13 і назвемо його головним рівнянням новоутвореної системи. За допомогою цього головного рівняння виключимо y з третього рівняння системи:

$$\begin{cases} x+5y-4z=-5, \\ y-\frac{9}{13}z=-\frac{12}{13}, & \big|\cdot\ 19 \\ -\frac{2}{13}z=-\frac{20}{13}. \end{cases}$$

Поділивши останнє рівняння на $-\frac{2}{13}$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+5y-4z=-5, \\ \quad y-\frac{9}{13}z=-\frac{12}{13}, . \\ \qquad\qquad z=10. \end{cases}$$

Підставляючи $z=10$ в друге рівняння і результат у перше, отримаємо розв'язок системи $(5;6;10)$.

Розв'язання систем рівнянь за правилом Крамера.

Розв'язування системи рівнянь за правилом Крамера полягає в наступному:

а) спочатку знаходимо головний визначник системи Δ, утворений з коефіцієнтів при невідомих;

б) шукаємо допоміжні визначники системи до кожного невідомого Δ_{x_i}, $i=\overline{1,n}$ (щоб записати Δ_{x_i}, треба у головному визначнику Δ замість коефіцієнтів при невідомому x_i записати стовпчик вільних членів b_i);

в) записуємо розв'язок системи: $x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, $i=\overline{1,n}$.

Тут можливі такі випадки:

а) якщо головний визначник системи не дорівнює нулю $(\Delta\neq 0)$, то система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок;

б) головний визначник системи дорівнює нулю $(\Delta=0)$. Тоді можливі два випадки:

- якщо всі допоміжні визначники системи дорівнюють нулю $\Delta_{x_i}=0$, $i=\overline{1,n}$, то система рівнянь має безліч розв'язків;
- якщо хоча б один із допоміжних визначників системи відмінний від нуля, то система рівнянь несумісна (не має розв'язку).

***Приклад* 3**. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x-y-z=1, \\ x+y-3z=6, \\ 3x-2y+z=-2. \end{cases}$$

Розв’язання. Знаходимо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2+9+2+3+1-12 = 5 .$$

Шукаємо допоміжні визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6+12-2-6+6 = 5 ;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12-9+2+18-12-1 = 10 ;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4-18-2-3+24-2 = -5 .$$

Згідно з правилом Крамера запишемо розв’язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1 .$$

Метод Жордана-Гаусса. На відміну від методу Гаусса, у методі Жордана – Гаусса перетворення здійснюються лише над коефіцієнтами системи рівнянь. Записуємо спочатку розширену матрицю системи (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Якщо ранг матриці, складений із коефіцієнтів при невідомих, дорівнює рангу розширеної матриці, то система рівнянь сумісна і має розв'язок.

Елементарними перетвореннями цієї розширеної матриці (множення головного рядка на число і додавання до іншого рядка) треба прийти до одиничної матриці в лівій частині розширеної матриці. У виділеному стовпчику (де раніше були вільні члени) отримаємо розв'язок системи рівнянь.

***Приклад* 4**. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$$

Розв’язання. Елементарними перетвореннями отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c|c|c} -4 & -8 & -3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c|c} \\ -1 & 3 \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Звідси записуємо розв'язок: $x_1=1;\quad x_2=1;\quad x_3=-1;\quad x_4=-1$.

Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь. Як ми вже відзначали раніше, систему лінійних рівнянь можна записати в матричній формі (1'). Помноживши її зліва на обернену матрицю A^{-1}, отримуємо розв’язок системи $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$. Під $\vec{x}$ та $\vec{b}$ розуміємо відповідно вектори-стовпці невідомих та вільних членів. Покажемо це на прикладі.

***Приклад* 5**. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+2y-z=3, \\ 3x+2y+2z=7. \end{cases}$

Розв’язання. Для знаходження оберненої матриці спочатку обчислюємо визначник матриці, складений із коефіцієнтів при невідомих

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Маємо обернену матрицю $A^{-1} = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -7 & 3 & 5 \\ -2 & -9 & 8 \end{pmatrix}$.

Помноживши обернену матрицю зліва на стовпчик вільних членів, отримаємо розв’язок системи

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -7 & 3 & 5 \\ -2 & -9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = 1,\quad y = 1,\quad z = 1$.

§ 4. Прикладні задачі матричного числення

При розв’язанні багатьох прикладних задач використовуються елементи алгебри матриць, особливо при розробці і використанні баз даних. У роботі з ними майже вся інформація зберігається і обробляється в матричній формі.

***Приклад*1**. Підприємство виготовляє чотири види виробів з використанням чотирьох видів сировини. Норма споживання сировини задана матрицею

$$\begin{array}{lccccl} \textit{вид сировини} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & & & & & \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \textit{ вид виробу.}$$

Потрібно знайти затрати сировини кожного виду при заданому плані випуску виробів відповідно 60, 50, 35, 40 од.

Розв'язання. Вектор-план випуску продукції відомий: $\vec{b}(60, 50, 35, 40)$. Враховуючи норми споживання кожного виду сировини на одиницю кожного виробу, вектор затрат є добуток матриць $\vec{b}$ (матриця – рядок) та матриці *A*:

$$\vec{b}A=(60,50,35,40)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо затрати сировини кожного із чотирьох видів $(575; 550; 835; 990)$.

Приклад 2. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи при цьому три види сировини. Характеристики виробництва задані таблицею:

вид сировини	витрати сировини за видами, на одиницю продукції			Запаси сировини
	1	**2**	**3**	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Визначити план випуску продукції кожного виду, використавши всі запаси. Задачі такого типу виникають при прогнозах і оцінках функціонування підприємств, плануванні мікроекономіки підприємств, тощо.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 – поки що невідомі обсяги випуску продукції. За умови повного використання запасів можна забезпечити балансові співвідношення, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо обсяги випуску продукції: $x_1 = 150,\ x_2 = 250,\ x_3 = 100$.

Загальна постановка задачі прогнозу випуску продукції. Нехай $C = \left\{(c_{ij}), i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right\}$ – матриця затрат сировини m видів на виготовлення одиниці продукції n видів. Нехай $\vec{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор – план випуску продукції. Тоді план випуску знаходиться із системи рівнянь

$$C\vec{x}^T = \vec{b},$$

де $\vec{b}$ – вектор запасів сировини кожного виду; T – індекс транспонування (стрічку замінюємо стовпчиком).

Лінійна модель торгівлі. Процес взаємних закупівель товарів аналізується з використанням понять власного числа і власного вектора матриці. Будемо вважати, що бюджети n країн, які позначимо відповідно $x_1, x_2, ..., x_n$, витрачаються на закупівлю товарів. Розглянемо *лінійну модель обміну*, або *модель міжнародної торгівлі.*

Нехай a_{ij}– частина бюджету x_i, яку j-та країна витратить на закупівлю товарів в i-й країні.

Введемо матрицю коефіцієнтів a_{ij}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Тоді, якщо бюджет витрачається тільки на закупки всередині країни і поза нею (це трактують як торговий бюджет), справедлива рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1;\ j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Матриця (1) з властивістю (2) називається *структурною матрицею торгівлі*. Для i-ї країни загальна виручка від внутрішньої і зовнішньої торгівлі виражається формулою

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \,. \qquad (3)$$

Умова збалансованої (бездефіцитної) торгівлі формулюється так: *для кожної країни її бюджет має бути не більший від виручки від торгівлі*, тобто $P_i \geq x_i$, або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq x_i \,, \text{ для } i = \overline{1,n} \,. \qquad (4)$$

Покажемо, що в умові (4) не може бути нерівності. Дійсно, додамо всі ці нерівності для всіх $i = \overline{1,n}$. Групуючи доданки з величинами бюджетів x_j, отримаємо

$$x_1(a_{11} + a_{21} + a_{31} + ... + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + a_{32} + ... + a_{n2}) + ...$$
$$+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + ... + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Легко бачити, що вирази в дужках дорівнюють одиниці, тому

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_n \,.$$

Це можливо лише тоді, коли є знак рівності. Таким чином, нерівності (4) приймають вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = x_i \,, \text{ для } i = \overline{1,n} \,. \qquad (5)$$

Введемо вектор бюджетів $\vec{x}$ (матриця–стовпчик), кожна компонента якого характеризує бюджет відповідної країни. Система (5) набуде вигляду

$$A\vec{x} = \vec{x} \,. \qquad (6)$$

Вектор, який є розв'язком матричного рівняння $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, називають власним вектором, а число λ – власним значенням.

Рівняння (6) означає, що власний вектор структурної матриці A, що відповідає її власному значенню $\lambda = 1$, складається з бюджетів країн бездефіцитної міжнародної торгівлі.

Рівняння (6) запишемо у вигляді, який дозволяє знайти $\vec{x}$:

$$(A - E)\vec{x} = 0 \,. \qquad (7)$$

***Приклад* 3**. Структурна матриця торгівлі чотирьох країн має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети цих країн, які задовольняють збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума бюджетів задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270 .$$

Розв'язання. Необхідно знайти власний вектор $\vec{x}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$ матриці A, тобто розв'язати рівняння (7), що в нашому випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ранг системи дорівнює 3, тому одна невідома вільна. Розв'язання системи методом Гаусса дає такі значення невідомих:

$$x_1 = \frac{140}{121} C ; \quad x_2 = \frac{146}{121} C ; \quad x_3 = \frac{20}{11} C ; \quad x_4 = C .$$

Підставивши ці значення в суму бюджетів, визначимо величину C: $C = 1210$.

Отже, шукані величини бюджетів країн при бездефіцитній торгівлі дорівнюють:

$$x_1 = 1400 ; \; x_2 = 1460 ; \; x_3 = 2200 ; \; x_4 = 1210 .$$

§ 5. Комплексні числа

***Означення* 1**. Число виду $a + bi$, де a і b – дійсні числа, а $i = \sqrt{-1}$ називається *комплексним*. Число a – *дійсна частина*, число b – *уявна частина* комплексного числа. Наприклад, $3 + 4i$ ($a = 3,\ b = 4$). Така форма запису комплексного числа називається алгебраїчною.

Розв'язком квадратного рівняння $x^2 - 4x + 5 = 0$ є комплексні числа:

$$x_1 = 2 + i, \quad x_2 = 2 - i .$$

Два комплексні числа вважаються рівними в тому випадку, якщо рівні їх дійсні та уявні частини, тобто $a + bi = a_1 + b_1 i$, якщо $a = a_1, \quad b = b_1$. При $b = 0$ комплексне число стає дійсним.

***Означення* 2.** Два комплексні числа $z_1 = a + bi$ та $z_2 = a - bi$ називаються комплексно-спряженими (*спряженими*). Вони відрізняються між собою тільки знаком перед уявною частиною.

***Означення* 3**. *Модулем* комплексного числа $z = a + bi$ називається дійсне число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Геометрично модуль комплексного числа – це довжина вектора $\overrightarrow{OM}$. Наприклад, $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Дії над комплексними числами, які задані в алгебраїчній формі

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $z = a + bi$, уявна і дійсна частини якого дорівнюють відповідно сумі дійсних і сумі уявних частин доданків z_1 і z_2:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Наприклад, $(2 + 3i) + (3 - i) = (2 + 3) + (3 - 1)i = 5 + 2i$.

Геометрично, під сумою двох комплексних чисел розуміють суму векторів.

Віднімання комплексних чисел проводять аналогічно з додаванням:

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ можна перемножувати за звичайним правилом множення многочленів; в отриманому результаті i^2 замінюється -1, наприклад:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Часткою від ділення двох комплексних чисел $a + bi$ та $a_1 + b_1 i$ називається комплексне число $x + yi$, яке, помножене на дільник, дасть у добутку ділене. Найкраще, при діленні комплексних чисел помножати чисельник і знаменник на спряжений вираз до знаменника, наприклад

$$\frac{2 + 3i}{2 + i} = \frac{(2 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{4 - 3i^2 + 6i - 2i}{2^2 + 1} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i.$$

Тригонометрична форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Вираз $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається *тригонометричною формою* комплексного числа. Причому, зв'язок між алгебраїчною та тригонометричною формою такий: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = arktg\,\dfrac{b}{a}$.

Множення двох комплексних чисел у тригонометричній формі має значно простіший вигляд, якщо:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);\; z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);$$

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2),\ \text{або}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].$$

Отже, при множенні комплексних чисел у тригонометричній формі модулі їх перемножуються, а аргументи додаються.

Легко показати, що при діленні комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі, їх модулі діляться, а аргументи віднімаються:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Підносячи до степеня комплексне число, записане у тригонометричній формі, отримаємо так звану формулу Муавра:

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Після скорочення маємо

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Добування кореня n-го степеня з комплексного числа проводиться за формулою

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1},$$

де $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня.

Показникова форма запису комплексного числа

В основі показникової форми лежить формула Ейлера, яка встановлює зв'язок між тригонометричними функціями дійсного аргументу і показниковою функцією уявного аргумента:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Тоді комплексне число z записується $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Отже, комплексне число має показникову форму запису $z = re^{i\varphi}$.

Легко побачити періодичність показникової функції комплексного аргументу, її період $T = 2\pi i$. Дійсно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Вправи

***Завдання* 1**

1. Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ подати як лінійну комбінацію матриць

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай $A \cdot B = 0$. Чи обов'язково $B \cdot A = 0$?

3. Обчислити $A^2 - 4A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити: а) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, б) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

5. Подати довільну матрицю–вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ як лінійну комбінацію одиничних векторів:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Знайти обернену матрицю до матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники, розклавши їх за елементами довільного рядка або стовпчика:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Спростити та обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

д) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити визначник матриці A , звівши його до трикутного вигляду:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$.

***Завдання* 3**

1. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ x + y + z = 3, \\ 3x - 2y - 2z = -1. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$; г) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -4, \\ 2x - y - 2z = 6, \\ 3x + 3y + z = 6. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0, \\ x + 3y + 4z - 6 = 0. \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3=0, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6=0, \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8=0, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8=0. \end{cases}$

3. Розв'язати системи рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} 3x+2y-z=6, \\ x-y+2z=-1, \\ 2x+y-3z=9. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ 3x-5y-3z=-4, \\ 5x-y+2z=1. \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_4+3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4+6=0, \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=0, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4-2=0. \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=35, \\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4+15x_5=70, \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4+35x_5=126, \\ x_1+5x_2+15x_3+35x_4+70x_5=210. \end{cases}$

4. Дослідити сумісність і знайти розв’язок систем:

а) $\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

***Завдання* 4**

1. Два залізобетонні заводи випускають вироби **А, Б, В** першої, другої та третьої категорії якості. Кількості випущених кожним заводом виробів за кожною категорією подані в таблиці

Категорія якості	Завод №1			Завод №2		
	А	**Б**	**В**	**А**	**Б**	**В**
Перша	100	150	150	50	150	100
Друга	150	150	100	150	100	150
Третя	50	20	50	30	30	20

Яким є загальний випуск виробів за категоріями якості?

2. Виготовлення деталей чотирьох видів **A, B, C, D** потребує витрат матеріалів, робочої сили та електроенергії (в умовн. од.) задано табл.

Ресурси	Витрати на одну деталь кожного виду			
	A	**B**	**C**	**D**
матеріали	1	2	2	3
робоча сила	2	3	1	2
електроенергія	2	4	2	1

Обчислити загальні потреби у матеріалах, робочій силі та електроенергії, для виготовлення деталей кожного виду відповідно у кількостях **A(10), B(5), C(5), D(10)**.

3. Три підприємства виготовляють вироби 4 видів. Задана матриця **A** накопиченого з початку року деякого місяця обсяг випуску виробів k –го підприємства. Знайти місячний обсяг випуску виробів на кожному підприємстві, якщо аналогічна матриця через місяць мала вигляд **B**

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 & 100 \\ 200 & 100 & 150 & 300 \\ 250 & 150 & 100 & 200 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 300 & 300 & 150 & 200 \\ 350 & 200 & 250 & 350 \\ 300 & 250 & 200 & 250 \end{pmatrix}.$$

4. Задана кількість одиниць продукції, яка відвантажується щодня на трьох заводах до 4-х пунктів споживання

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 5 & 20 \\ 15 & 10 & 10 & 15 \\ 12 & 15 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

Вартості перевезень одиниці продукції з кожного пункту постачання до кожного пункту споживання задані матрицею (в ум.од.)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти загальні витрати на перевезення.

5. Підприємство виготовляє протягом місяця вироби трьох видів **A, B, C**, використовуючи при цьому сировину трьох типів **S_1, S_2, S_3.** Норми затрат та запаси сировини задані таблицею (ум. од.)

Вид сировини	Норма витрат на 1 виріб			Загальні запаси сировини (ум.од.)
	A	B	C	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900

S_3	3	2	2	1600

Знайти щомісячний обсяг виготовлення кожного виробу.

6. З листового матеріалу потрібно викроїти 200 заготовок типу **A**, 260 – типу **B** і 290 – типу **C**. При цьому можна застосовувати 3 способи розкрою. Кількість заготовок, отриманих з кожного листа при кожному способі розкроювання задана таблицею

Тип заготовки	Спосіб розкроювання		
	I спосіб	II спосіб	III спосіб
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Скільки листів потрібно для даної кількості заготовок?

***Завдання* 5**

1. Виконати а) додавання; б) віднімання; в) множення; г) ділення двох комплексних чисел в алгебраїчній формі:

1) $2+3i, 5-2i$; 2) $\sqrt{8}+\sqrt{5}i$, $\sqrt{8}-\sqrt{5}i$; 3) $3\sqrt{7}+2i\sqrt{3}$, $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}i$; 4) $3+\sqrt{2}i$, $4-\sqrt{5}i$; 5) $\sqrt{2}+3i$, $\sqrt{5}-i$; 6) $-2+3i, 2-3i$; 7) $1-\sqrt{2}i, 2+\sqrt{3}i$; 8) $2\sqrt{2}-3i, 2\sqrt{2}+3i$.

2. Записати числа в тригонометричній і показниковій формах:

1) $4+3i$, 2) $-3+2i$, 3) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, 4) $2i$, 5) 4,

6) $1-\sqrt{2}i$, 7) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, 8) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 9) $\sqrt{2}-i$, 10) $1-2i$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $x^3-1=0$, б) $x^6-1=0$, в) $x^4-16=0$, г) $x^3+1=0$, д) $x^5+1=0$.

***Завдання* 6. Задачі підвищеної трудності.**

1. Обчислити визначники:

А) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; Б) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$;

В) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 1 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.Визначити ранг матриці:

А) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Дослідити і розв'язати системи рівнянь залежно від параметра

А) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$ Б) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$

В) $\begin{cases} (3+2\lambda)x_1 + (1+3\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = 3, \\ 3\lambda x_1 + (3+2\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = 1, \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + 3x_3 + (\lambda-1)x_4 = 1, \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = 1. \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda+1)z = \lambda, \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda-1)z = \lambda, \\ (\lambda+1)x + \lambda y + (3+2\lambda)z = 1. \end{cases}$

Відповіді

***До завдання* 1**

1. $A = a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + a_{12}E_3 + a_{22}E_4$.
2. Ні.

3. $\begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$.

4. а) $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

5. $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} + ... + x_n\vec{e_n}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

До завдання 2

1.а) 26; б) -28; в) $2a$; г) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$.

2.а) -19; б) $-2x$; в) $(x-y)(y-z)(x-z)$.

3.а) 40; б) -3; в) 1; г) -9; д) 18; е) 452.

4.а) 0; б) $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$; в) $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$; г) 1;

д) $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$.

5.а) $n!$; б) $2n+1$.

До завдання 3

1. а) $(1;1;1)$, б) $(5;6;10)$, в) $(-1,3,-2,2)$, г) $(2,1.-3,1)$, д) (1,0,-1,0,1).

2. а) $(1,2-3)$, б) $(1;-1,2)$, в)(1,2,2,0) г) $(2;-2;1;-1)$.

3. а) $(2;-1;-2)$, б) $(1,2-1)$, в) $(-2,1,4,3)$, г) $(5,4,3,2,1)$.

4. а) $(2a-1,a+1,a)$, б) система несумісна; в) $(a,3a-13,-7,0)$.

До завдання 4

1. $C = A + B = \begin{pmatrix} 150 & 300 & 250 \\ 300 & 250 & 250 \\ 80 & 60 & 70 \end{pmatrix}$. 2. $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$.

3. $C = B - A = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 50 & 100 \\ 150 & 100 & 100 & 50 \\ 50 & 100 & 100 & 50 \end{pmatrix}$. 4. 336ум.од. 5. (200;300;200).

6. (40;30;20).

До завдання 5

1. 1) а) $7+i$; б) $-3+5i$; в) $16+11i$; г) $\frac{4}{29}+\frac{19}{29}i$.

2) а) $4\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{5}i$; в) 13; г) $\frac{3}{13}+\frac{4\sqrt{10}}{13}i$.

3) а) $6\sqrt{7}$; б) $4\sqrt{3}i$; в) 75; г) $\frac{51}{75}+\frac{12\sqrt{21}}{75}i$.

4) а) $7+(\sqrt{2}-\sqrt{5})i$; б) $-1+(\sqrt{2}+\sqrt{5})i$; в) $12+\sqrt{10}+(4\sqrt{2}-3\sqrt{5})i$;

г) $\frac{12-\sqrt{10}}{21}+\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{21}i$.

5) а) $\sqrt{2}+\sqrt{5}+2i$; б) $\sqrt{2}-\sqrt{5}+4i$; в) $3+\sqrt{10}+(3\sqrt{5}-\sqrt{2})i$;

г) $\frac{\sqrt{10}-3}{6}+\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}{6}i$.

2. 1) а) $5\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\right]$; б) $5e^{i\operatorname{arctg}0,75}$.

2) а) $\sqrt{13}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)-i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)\right]$; б) $\sqrt{13}\ e^{-i\operatorname{arctg}\frac{2}{3}}$.

3) а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right]$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

4) а) $2\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]$; б) $2e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5) а) $4[\cos\ 0+i\sin 0]$; б) $4e^{0i}$.

3. а) $x_1 = 1$, $x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

б) $x_k = \cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}$, $k = \overline{0,5}$.

в) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 2i$.

г) $x_1 = -1$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$.

д) $x_1 = -1$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, $x_3 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$,

$x_4 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}$, $x_5 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}$.

До завдання 6

1. А) 394; Б) x^2z^2; В) $(-1)^n(n-1)!$. 2. А) 3; Б) 4; В) 5.

3. А) Якщо $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$; якщо $\lambda = -3$, то система несумісна; якщо $\lambda = 1$, то $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$. Б) Якщо $\lambda(\lambda+3)\neq 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+3}$; якщо $\lambda = -3$, то система несумісна; якщо $\lambda = 0$, то $x_1 = 1 - x_2 - x_3$.; В) При $\lambda \neq 1; 3$ система має єдиний розв'язок $x_1 = \frac{2}{3-\lambda}$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = \frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}$. При $\lambda = 1$ система несумісна. При $\lambda = 3$, система має загальний розв'язок $x_1 = -\frac{17}{9} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{9}x_4$, $x_2 = 2$. Г) Якщо $\lambda \neq 0$ то $x = 1-\lambda$, $y = \lambda$, $z = 0$. Якщо $\lambda = 0$, то $x = 1$, $y = \textit{довільне}$, $z = 0$.

Розділ 2. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Загальні поняття. Базис векторного простору

***Означення* 1**. Множина V називається *лінійним простором* над числовим полем P, якщо:

1. над елементами множини V визначена операція додавання, яка володіє властивостями для довільних $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$:
   а) додавання комутативне $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;
   б) додавання асоціативне $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;
   в) існує єдиний нульовий елемент $\boldsymbol{0}$: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$;
   г) існує єдиний протилежний елемент $-\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$;
2. визначена операція множення над полем P, яка володіє властивостями для довільних $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ і довільних чисел $\alpha, \beta \in P$:
   а) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$; б) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$; в) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$; г) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Елементи лінійного простору прийнято називати *векторами*, а сам лінійний простір *векторним простором*.

Кажуть, що вектор

$$\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$$

є *лінійна комбінація* векторів $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, де α_i – дійсні числа.

Система векторів $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо хоча б один із цих векторів $\boldsymbol{x}_i$ лінійно виражається через інші, та *лінійно незалежною* – у протилежному випадку, тобто

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=0$$

тоді і тільки тоді, коли всі $\alpha_i=0$.

Лінійно незалежна система векторів $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, через яку лінійно виражається довільний вектор простору, називається *базисом* (*базою*), наприклад,

$$\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – є *координати* вектора $\boldsymbol{y}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

§ 1. Скаляри. Вектор як напрямлений відрізок

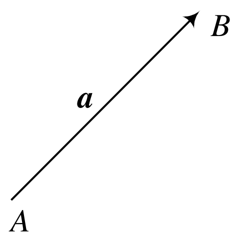


Рис. 1.

Величини, які повністю характеризуються своїм числовим значенням, називаються *скалярними*. Наприклад, маса тіла, об'єм тіла, температура середовища та ін. Величина, яка, крім числового значення, характеризується ще й напрямом, називається *вектором*. Наприклад, сила, переміщення, швидкість, тощо. Вектор характеризується довжиною (модулем) і напрямом.

Геометрично вектор зображається напрямленим відрізком (рис. 1),

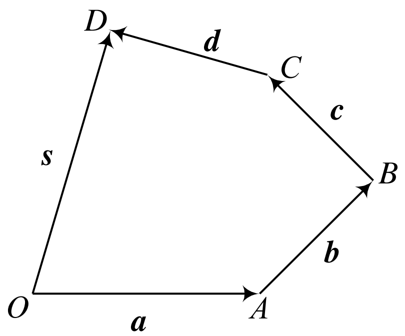


Рис. 2.

$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, A – початок відрізка, B – кінець відрізка.

Під *модулем* (довжиною) вектора $\boldsymbol{a}$ $|\boldsymbol{a}|$ розуміють числове значення його, без врахування напряму. Вектор $\boldsymbol{0}$, модуль якого дорівнює нулю, називається *нуль-вектором* (напрям нуль-вектора довільний).

Два вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжину і напрям.

***Означення* 2**. *Сумою* кількох векторів $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ називається вектор $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ (рис. 2), що замикає ламану $OABCD$, побудовану на цих векторах.

Або кажуть ще так: якщо розмістити вектори (паралельним перенесенням) так, щоб кінець першого збігався з початком другого, кінець другого збігався з початком третього і т.д., то вектор, що сполучає початок першого з кінцем останнього, буде сумою цих векторів.

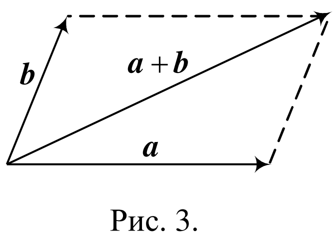


Рис. 3.

Для двох векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ *сумою* $\boldsymbol{s}$ буде вектор-діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 3), з початком у спільній точці їх прикладання.

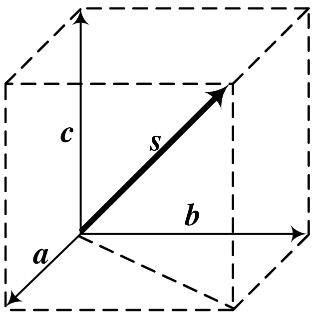


Рис. 4.

Для трьох векторів сумою буде діагональ паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на сторонах (рис. 4).

Легко перевірити, що для векторів справедливий переставний та сполучний закони відносно додавання.

Для кожного вектора $\boldsymbol{a}$ існує протилежний вектор $-\boldsymbol{a}$, що має ту ж довжину і протилежний напрям. За правилом паралелограма $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$, де $\boldsymbol{0}$ – нуль-вектор.

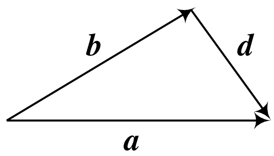


Рис. 5.

Під *різницею* векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ розуміють вектор $\boldsymbol{d}$ такий, що $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}$. Різницею двох векторів буде вектор, що сполучає їх кінці і напрямлений у бік того вектора, від якого віднімаємо $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (рис. 5).

***Означення* 3**. *Добутком* вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр λ називається вектор, що має довжину $\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|$, напрям якого:

1) збігається з напрямом вектора $\boldsymbol{a}$, якщо $\lambda>0$;
2) протилежний до вектора $\boldsymbol{a}$, якщо $\lambda<0$;
3) довільний, якщо $\lambda=0$.

***Означення* 4**. Два вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні в широкому розумінні цього слова (тобто розміщені на паралельних прямих або на одній і тій же прямій).

Вважають, що нуль-вектор колінеарний до довільного вектора.

***Означення* 5**. Три вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Теорема. Три ненульові вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією двох інших, наприклад,

$$\boldsymbol{c}=\lambda\,\boldsymbol{a}+\mu\,\vec{\boldsymbol{b}}\,, \quad \lambda, \mu \text{ – скаляри.}$$

Для просторової системи координат за осями координат направляють одиничні вектори (орти) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, і $\boldsymbol{k}$. Вектори $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, і $\boldsymbol{k}$ утворюють базис тривимірного простору, тому довільний вектор у просторі можна виразити через лінійну комбінацію векторів бази (рис. 6):

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\,.$$

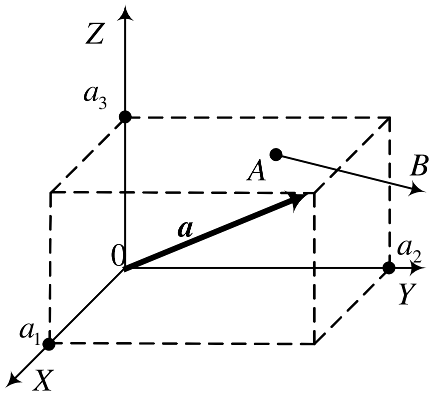


Рис. 6.

Нехай вектор $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ утворює кути α, β і γ відповідно із осями координат OX, OY та OZ. Величини $\cos\alpha, \cos\beta$ і $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\boldsymbol{a}$ і обчислюються:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Легко переконатись що для напрямних косинусів справедлива рівність:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Задача. Розкласти вектор $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ за трьома не компланарними векторами $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$ є не компланарні, то вони можуть бути базисом тримірного простору. Тому довільний вектор, зокрема і вектор $\boldsymbol{s}$, можна представити через базисні вектори $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{s} = x_1\boldsymbol{m} + x_2\boldsymbol{n} + x_3\boldsymbol{p}.$$

Запишемо останню рівність покоординатно, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Зведемо систему до трикутного вигляду і отримаємо розв'язок методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 1, /-1/2 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 0, /-2 \\ 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок системи $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Отже, вектор $\boldsymbol{s}$ має розклад $\boldsymbol{s} = \frac{2}{5}\boldsymbol{m} + \frac{3}{5}\boldsymbol{n} + \frac{3}{5}\boldsymbol{p}$.

§ 2. Скалярний добуток векторів

Під *скалярним добутком* двох векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ розуміють добуток довжин цих векторів, помножений на косинус кута між ними:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) ; \qquad (1)$$

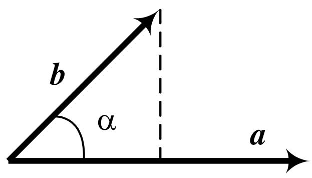


Рис. 7.

Оскільки $|\boldsymbol{b}| \cos\alpha = np_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ – проекція вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$, тому можна записати (рис. 7)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \ \ np_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \ \ np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} .$$

Для двох взаємно перпендикулярних векторів скалярний добуток дорівнює нулю, оскільки косинус прямого кута дорівнює нулю. ($\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$).

Для векторів, які задані в просторі у координатній формі скалярний добуток визначається

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1')$$

Якщо вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ задані на площині своїми координатами то формула (1') спрощується

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad (1'')$$

Використовуючи скалярний добуток, легко шукати косинус кута між векторами:

$$\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} . \qquad (2)$$

Якщо відомі координати векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ у просторі то маємо:

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} . \qquad (3)$$

Для векторів, які задані на площині у координатній формі, косинус кута між ними знаходимо за формулою

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} . \qquad (3')$$

З рівності (3) можна записати умову перпендикулярності векторів, які задані своїми координатами:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

Задача **1.** Знайти кут між векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}-$ одиничні вектори, які утворюють кут 120^0.

Розв'язання. Кут між векторами знаходимо за формулою (2). Чисельник дорівнює

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}) = 2\boldsymbol{m}^2 - 2\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} + 4\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n}^2 =$$

$$= 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{m} \,\hat{}\, \vec{n}) - 4 = -2 + 2\cos 120^0 = -3 .$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}) \cdot (2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n})} = \sqrt{4\boldsymbol{m}^2 + 16\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} + 16\boldsymbol{n}^2} =$$

$$= \sqrt{4 + 16\cos 120^o + 16} = \sqrt{20 - 8} = \sqrt{12} ,$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})^2} = \sqrt{\boldsymbol{m}^2 - 2\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} .$$

Отже, $\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{12}\sqrt{3}} = \dfrac{-3}{2 \cdot 3} = -\dfrac{1}{2}$.

Тоді $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{1}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Задача **2.** Відомо що $|\boldsymbol{m}| = 2$, $|\boldsymbol{n}| = 5$ і кут $(\boldsymbol{m} \,\hat{,}\, \boldsymbol{n}) = 120^0$. Визначити, при якому значенні параметра α вектори $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{m} + 17\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$ будуть взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Вектори взаємно перпендикулярні якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тому спочатку знайдемо скалярний добуток векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\alpha\boldsymbol{m} + 17\boldsymbol{n}) \cdot (3\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}) = 3\alpha|\boldsymbol{m}|^2 - \alpha\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} + 51\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} - 17|\boldsymbol{n}|^2 =$$

$$= 12\alpha + (51 - \alpha)\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} - 17 \cdot 25 = 12\alpha + (51 - \alpha) \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^0 - 425 =$$

$$= 12\alpha - 5(51 - \alpha) - 425 = 17\alpha - 680.$$

Прирівнявши отриманий вираз скалярного добутку до нуля, отримаємо значення параметра α: $17\alpha - 680 = 0$, $\alpha = 40$.

§ 3. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ називається такий третій вектор $\boldsymbol{c}$ (рис. 8), який:

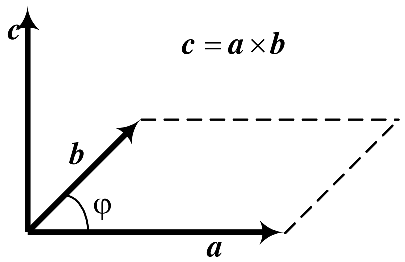


Рис. 8.

1) має модуль (довжину), що чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$;
2) перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$;
3) утворює праву трійку з векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто якщо дивитися з кінця вектора $\boldsymbol{c}$, то рух від $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ має бути проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Коротко це можна записати так:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},$$

якщо:

1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$;

2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$; (1)

3) вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ утворюють праву трійку (див. рис 14).

Для векторного добутку одиничних взаємно перпендикулярних векторів (орт) справедлива так звана циклічна перестановка, тобто:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i};\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i};\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}.$$

Якщо вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ задані в координатній формі, то векторний добуток обчислюється як визначник

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}. \quad (2)$$

За допомогою векторного добутку двох векторів легко знайти площу паралелограма чи площу трикутника, побудованих на цих векторах:

$$S_{пар.}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|, \qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

Крім цього за допомогою векторного добутку векторів часто шукають момент сили.

Нехай $\boldsymbol{F}$ сила прикладена до точки M, а вектор $\boldsymbol{a}$ напрямлений від деякої точки C в точку M, тоді вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{F}$ визначає момент сили відносно точки C.

***Задача* 1.** Знайти площу трикутника з вершинами $A(0;8;4)$, $B(1;0;6)$ і $C(4;5;-3)$.

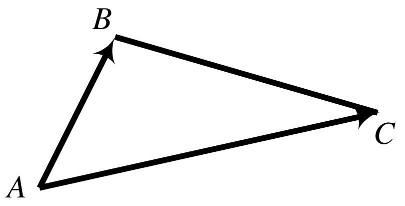


Рис. 9.

Розв'язання. Запишемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, віднімаючи від координат кінцевої точки координати початку (рис. 9):

$$\overrightarrow{AB}(1;-8;2),\quad \overrightarrow{AC}(4;-3;-7).$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ за формулою (2):

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -8 & 2\\ 4 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8 & 2\\ -3 & -7\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -7\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1 & -8\\ 4 & -3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=$$

$$=(56+6)\boldsymbol{i}-(-7-8)\boldsymbol{j}+(-3+32)\boldsymbol{k} = 62\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}+29\boldsymbol{k}.$$

Оскільки площа трикутника дорівнює $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, маємо

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|62\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}+29\boldsymbol{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{62^2+15^2+29^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3844+225+841}=\frac{1}{2}\sqrt{4910}.$$

***Задача* 2.** Сила $\boldsymbol{F}(2;2;9)$ прикладена до точки $B(4;2;-3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $A(2;4;0)$.

Розв'язання. Спочатку запишемо координати вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}(4-2;2-4;-3-0)$, або $\boldsymbol{a}=(2;-2;-3)$. Момент сили знаходимо як векторний добуток

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 9\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 9\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{k}=-12\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}.$$

Тоді величина моменту сили $\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{F}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=28$.

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha=\frac{-12}{28}=-\frac{3}{7};\qquad \cos\alpha=\frac{-24}{28}=-\frac{6}{7};\qquad \cos\alpha=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}.$$

§ 4. Змішаний добуток векторів

Змішаним добутком трьох векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ називається комбінований добуток ($(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, тобто $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ перемножені векторно, і отриманий вектор перемножується з вектором $\boldsymbol{c}$ скалярно).

Якщо вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ задані у координатній формі, то змішаний добуток обчислюється як визначник

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Оскільки змішаний добуток векторів обчислюється за формулою (1), то він володіє тими ж властивостями що і визначники.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, дорівнює

$$V_{пар.} = \pm\boldsymbol{abc}, \tag{2}$$

а об'єм піраміди відповідно дорівнює

$$V_{пір.} = \pm\frac{1}{6}\boldsymbol{abc}. \tag{3}$$

Якщо три вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ лежать в одній площині, тобто є компланарні, то їх змішаний добуток дорівнює нулю.

Зауваження. Якщо змішаний добуток $\boldsymbol{abc} > 0$, впорядкована трійка векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ є *правою*, а якщо $\boldsymbol{abc} < 0$, то *лівою*.

***Задача* 1.** Показати, що вектори $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ і $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ компланарні та знайти лінійну залежність між ними.

Розв'язання. Запишемо координати векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і обчислимо їх змішаний добуток, використовуючи формулу (1):

$$\boldsymbol{a}(1;1;4), \quad \boldsymbol{b}(1;-2;0), \quad \boldsymbol{c}(3;-3;4);$$

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 12 + 24 - 4 = 0.$$

Отже, вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ – компланарні. Знайдемо лінійну залежність між ними, тобто покажемо, що довільний вектор, наприклад $\boldsymbol{c}$, можна виразити як лінійну комбінацію двох інших $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b},$$

де λ і μ – поки що невідомі коефіцієнти.

Записавши останню рівність покоординатно, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3, \\ \lambda - 2\mu = -3, \\ 4\lambda = 4. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $\lambda = 1,\ \mu = 2$.

Отже, вектор $\boldsymbol{c}$ має розклад: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.

Задача 2. Об'єм піраміди дорівнює 2. Три її вершини лежать у точках $A(2;1;3)$, $B(3;3;2)$, $C(1;2;4)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі OZ.

Розв'язання. Нехай координати четвертої вершини $D(0;0;m)$. Запишемо координати векторів $\boldsymbol{a} = DA(2;1;3-m)$, $\boldsymbol{b} = DB(3;3;2-m)$ і $\boldsymbol{c} = DC(1;2;4-m)$, та обчислимо їх змішаний добуток

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3-m \\ 3 & 3 & 2-m \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = 3\cdot(3-m) - 3\cdot(2-m) + 3\cdot(4-m) = 15 - 3m.$$

Підставимо у формулу (3) $V_{пір.} = \pm\frac{1}{6}\boldsymbol{abc}$ відомі результати:

$2 = \pm\frac{1}{6}(15-3m)$, або $\pm(15-3m) = 12$, звідси $m_1 = 1,\quad m_2 = 9$.

Відповідь: $D_1(0;0;1),\quad D_2(0;0;9)$.

§ 5. Подвійний векторний добуток векторів

Багато задач динаміки тіла з однією нерухомою точкою і задач гіроскопії пов'язане з послідовним обчисленням декількох векторних добутків. Такий процес розв'язування веде до поняття кратних векторних добутків, зокрема подвійного векторного добутку.

1. Кінетичний момент тіла. При визначенні моменту кількості руху (кінетичного моменту) тіла з однією нерухомою точкою маємо кількість руху деякої матеріальної точки M_i (дискретної маси m_i, в точці M_i): $m_i\overrightarrow{v_i}$.

Момент кількості руху цієї маси $\overrightarrow{K_i} = \vec{r_i} \times (m_i \overrightarrow{v_i})$. Тут швидкість руху точки M_i дорівнює $\vec{v_i} = \overrightarrow{\omega_1} \times \vec{r_i}$. Отже, $\overrightarrow{K_i} = m_i \vec{r_i} \times (\overrightarrow{\omega_1} \times \vec{r_i})$ визначається через подвійний векторний добуток $\vec{r_i} \times (\overrightarrow{\omega_1} \times \vec{r_i})$, а момент кількості руху системи n матеріальних точок $\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{K_i} = m_i \vec{r_i} \times (\overrightarrow{\omega_1} \times \vec{r_i})$.

2. Обчислення гіроскопічного моменту гіроскопа. Двохступеневий гіроскоп застосовують в якості пасивного або активного стабілізатора. Ця властивість використовується в проектах монорейкової залізної дороги, заспокоювача коливання суден і.т.ін. Взаємодія руху поїзда з кутовими швидкостями $\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{\omega_2}$ (вздовж осей X та Z) і $\overrightarrow{\omega_3} = \overrightarrow{\omega_y}$ веде до появи кутового прискорення $\lambda \overrightarrow{\omega_1} \times (\overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{\omega_1})$.

При обчисленні подвійного векторного добутку $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ спочатку обчислюємо внутрішній векторний добуток $(\vec{b} \times \vec{c})$, а потім $\vec{a}$ множимо векторно на отриманий попередньо результат. Проте, зручна формула для обчислень подвійного векторного добутку $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Вправи

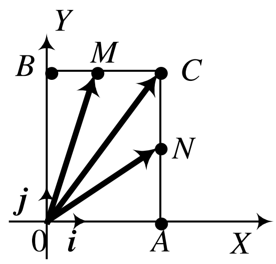


Рис. 10.

1. На сторонах OA і OB прямокутника $OACB$ відкладені одиничні вектори $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ (рис. 10). Виразити через них вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$, якщо $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{OB}| = 4$, а точки M і N – середини сторін відповідно BC та AC. Розкласти аналітично і геометрично вектор $\overrightarrow{OC}$ за векторами $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$.

2. Дано три компланарні одиничні вектори $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{p}$, причому $(\boldsymbol{m}, \wedge \boldsymbol{n}) = 30^o$ і $(\boldsymbol{n}, \wedge \boldsymbol{p}) = 60^o$. Побудувати вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n} - 3\boldsymbol{p}$ і знайти його модуль.

3. На площині задано точки $A(3;3)$, $B(-3;3)$ і $C(-3;0)$. У початку координат прикладені сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. Побудувати рівнодійну $\overrightarrow{OM}$, знайти її величину та проекції на осі координат.
4. Три сусідні ребра куба лежать на осях декартової просторової системи координат. Знайти розклад всіх вектор-діагоналей куба, якщо ребро його дорівнює 3.
5. Побудувати вектор $\overrightarrow{OM} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ і визначити його довжину і напрям. Перевірити, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, де α, β, γ – кути, які утворює вектор з осями координат.
6. Вектор утворює з осями OX і OZ кути 40° і 80°. Знайти кут цього вектора з віссю OY.
7. Дано точки $A(1;2;3)$ і $B(3;-4;6)$. Побудувати вектор $\overline{AB}$, його проекції на осі координат і визначити довжину і напрям вектора.
8. Побудувати паралелограм на векторах $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ і $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{k} - 3\boldsymbol{j}$ і визначити його діагоналі.
9. Задані три послідовні вершини паралелограма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Знайти його четверту вершину.
10. Знайти внутрішні кути трикутника ABC з вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ і $C(0;0;5)$.
11. Знайти кут між бісектрисами кутів XOY і YOZ.
12. Який кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ і $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$?
13. Знайти кут між діагоналями куба.
14. Визначити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - 2\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ – одиничні вектори, кут між якими 60^0. Знайти проекцію вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$.
15. Який кут утворюють одиничні вектори $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$, якщо відомо, що вектори $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{q} = 5\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n}$ взаємно перпендикулярні?
16. Відомі розклади векторів, які служать сторонами трикутника ABC: $\overrightarrow{AB} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{BC} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ і $\overrightarrow{CA} = -7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$. Знайти довжину медіани $\overrightarrow{AM}$ і висоти $\overrightarrow{AD}$ трикутника ABC.

17. Проекції переміщення рухомої точки на осі координат дорівнюють $S_x = 2$ м, $S_y = 3$ м, $S_z = -2$ м. Проекції діючої сили $\overrightarrow{F}$ на осі координат дорівнюють $F_x = 5\,\kappa\Gamma$, $F_y = 4\ \kappa\Gamma$, $F_z = 3\ \kappa\Gamma$. Обчислити роботу A сили $\vec{F}$ ($A = \vec{F} \cdot \vec{S}$) і кут між силою $\vec{F}$ і переміщенням $\vec{S}$.
18. Знаючи вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, на яких побудований паралелограм, виразити через них вектор, який співпадає з висотою паралелограма, проведеної до сторони $\boldsymbol{a}$.
19. Використовуючи векторний добуток векторів, обчислити площу трикутника з вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ і $C(4;5;-2)$.
20. На векторах $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$ побудувати паралелограм і обчислити його площу та висоту.
21. Розкрити дужки і спростити вираз
$$(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$
22. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ і $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, якщо $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 5$, а кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ дорівнює 45^0.
23. На бісектрисах кутів XOY, YOZ, XOZ відкладені одиничні вектори, на яких побудовано похилий паралелепіпед. Знайти площі діагональних перерізів цього паралелепіпеда.
24. Побудувати паралелепіпед на векторах $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ і обчислити його об'єм.
25. Показати, що точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ і $D(5;0;-6)$ лежать в одній площині.
26. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на бісектрисах координатних кутів з довжиною ребра 2 см.
27. Показати, що вектори $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -3\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ компланарні і розкласти вектор $\boldsymbol{c}$ за векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.
28. Точки $A(-1;-3;$ $B(-2;6;2)$, $C(-1;7;1)$ і $D(2;6;-5)$ є вершинами чотирикутника. Довести що цей чотирикутник плоский і знайти його площу.
29. Знайти висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, якщо за основу взяти паралелограм побудований на векторах $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.

30. Довести, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на діагоналях граней даного паралелепіпеда, дорівнює подвоєному об'єму даного паралелепіпеда.

31. Довести, що для будь-яких векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ вектори $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ та $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ компланарні.

32. Довести компланарність векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, знаючи, що $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$.

33. Знаючи, що $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ знайти співвідношення між векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, які не містять коефіцієнтів λ і μ (через координати векторів).

34. Точки $A(-1;3;-2), B(-2;6;2), C(-1;7;1), D(2;6;-5)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский, та знайти його площу.

35. Об’єм піраміди $V=5$, три її вершини лежить у точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі ОУ.

36. Будівельна фірма, що бере участь у будівництві багатоповерхових будинків на одному з масивів міста, отримала кредити від п’яти комерційних банків. Кожен з них надав кредити у розмірі 100, 150, 200, 250, 300 млн. грн. під річну процентну ставку 10, 12, 15, 20 і 22% відповідно. Визначити, яку суму треба повернути за кредити вкінці року самих відсотків, не враховуючи тіла кредиту.

37. Фірма, для виготовлення одиниці продукції, використала 7650 грн. Ресурси на виготовлення склали: 200 од. сировини першого виду по 15грн. за штуку та 300 – другого по 11грн. за шт. Для виготовлення одиниці продукції потрібно 9 люд. год. Яка ціна у гривнях за 1 люд.год.?

38. Показати, що вектори $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\boldsymbol{d}=5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$ в цьому базисі.

Задачі підвищеної трудності

39. Сила тяги гелікоптера утворює з напрямком вітру кут 40^o. Відношення швидкості руху гелікоптера до швидкості вітру дорівнює 6. Знайти кут між напрямом руху гелікоптера і напрямом вітру.

40. Однорідний стержень масою $3кг$ закріплений своїм нижнім кінцем до шарніру. До другого його кінця підвішений вантаж масою $2кг$. Стержень підтримується у рівновазі горизонтальною відтяжкою, яка прикріплена до нерухомої вертикальної стійки. Знайти силу натягу відтяжки, якщо довжина вертикальної стійки $1,4м$, а довжина горизонтальної відтяжки $0,5м$.

41. Тіло вагою $qкг$. переміщається вверх похилою площиною, яка утворює з горизонтальною площиною кут β. Знайти силу P, яка діє під кутом α до похилої площини і може зсунути тіло з місця, враховуючи тертя.

42. Точка О розтягується за трьома взаємно перпендикулярними напрямками. Взявши цю точку за початок координат, а згадані напрямки – за напрямки координатних осей, позначимо відповідні напруження через $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$. Нехай перпендикуляр до довільної площини, що проходить через точку О утворює з осями координат кути α, β, γ. Визначити повне напруження $\mathbf{P}$, яке діє в точці О на цю площину.

43. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні вектори. Обчислити $\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times\left[\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]\right\}$.

44. Задані вектори $\vec{a}(3;0;-1), \vec{b}(2;4;3), \vec{c}(-1;3;2), \vec{d}(2;0;1)$. Обчислити $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ і $(\vec{a}\times\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d})$.

45. Для довільної точки M твердого тіла швидкість $\vec{v}$ визначається формулою Ейлера $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, де $\vec{\omega}-$ кутова швидкість обертання, а $r-$ відстань від точки M до точки О осі обертання, до якої прикладений вектор $\vec{\omega}$. Знайти лінійну швидкість обертання точок дзиги(“балеринки”), які лежать на колі більшого діаметру, що дорівнює 20, якщо $\vec{\omega}(-3;2;4)$ і вектор $\vec{\omega}$ прикладений у центрі кола.

Відповіді

1. $\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{AC}=4\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{CB}=-3\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OM}=1,5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{ON}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{MN}=1,5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, $\overline{OC}=\frac{2}{3}(\overline{OM}+\overline{ON})$. **2.** $\sqrt{8+2\sqrt{3}}$. **3.** $x=x_1+x_2+x_3=-3$; $y=y_1+y_2+y_3=6$; $\left|\overline{OM}\right|=3\sqrt{5}$. **4.** $\vec{d}_1=3(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, $\vec{d}_2=3(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, $\vec{d}_3=3(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, $\vec{d}_4=3(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$. **5.** $\left|\overline{OM}\right|=7$. **6.** $\beta=52^0$ або 128^0.

7. $\left|\overline{AB}\right|=7$. **8.** $\overline{OC}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\left|\overline{OC}\right|=\sqrt{6}$, $\overline{AB}=-\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\left|\overline{AB}\right|=3\sqrt{2}$.

9. $D(4;0;6)$. **10.** $\angle B=\angle C=45^0$. **11.** 60^0. **12.** 90^0. **13.** $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$. **14.** $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$, $np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** $\alpha=60^0$ **16.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=6$, $\left|\overline{AD}\right|=\frac{12\sqrt{5}}{5}$. **17.** $16\,\kappa\Gamma$м, $\cos\theta=\frac{8\sqrt{34}}{85}$. **18.** $\boldsymbol{h}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{a^2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. **19.** $24,5$. **20.** $\sqrt{21}$, $h=\sqrt{4,2}$. **21.** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

22. $50\sqrt{2}$. **23.** $S_1=\sqrt{2}, S_2=1$. **24.** $V=51$. **26.** $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **27.** $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

28. $\sqrt{74}$. **29.** $h=\frac{49}{\sqrt{323}}$. **33.** $\boldsymbol{abc}=0$. **34.** $\sqrt{74}$. **35.** $D_1(0;8;0), D_2(0;-7;0)$.

36. 174 млн.грн. **37.** 150 грн./люд.год. **38.** $(-1,4,3)$. **39.** $\approx 34^o$.

40. $0,25\vec{i}\times(-3g)\vec{j}+0,5\vec{i}\times(-2g)\vec{j}+F\vec{i}\times 0,8\vec{j}=0;\quad F=12,25\,н.$

41. $P=q\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos(\alpha+\gamma)}=q\frac{\mu\cos\beta-\sin\beta}{\mu\sin\alpha-\cos\alpha}$, де $\gamma-$ кут між напрямком рівнодійної реакції опори і нормаллю до поверхні; $\mathrm{tg}\gamma=\mu-$ коефіцієнт тертя.

42. $\mathbf{P}=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}=\sqrt{(\sigma_1\cos\alpha)^2+(\sigma_2\cos\beta)^2+(\sigma_3\cos\gamma)^2}$. **43.** $a^4\vec{b}$.

44. $-58\vec{i}-20\vec{j}+\vec{k}$; -80. **45.** $\vec{r}=R(\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k})$. $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=10\times\left[\left(2\cos\gamma-4\cos\beta\right)\vec{i}+\left(3\cos\gamma+4\cos\alpha\right)\vec{j}-\left(3\cos\beta+2\cos\alpha\right)\vec{k}\right].$

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

§ 1. Прямокутна і полярна системи координат

Координатами точок на площині є пара чисел, що визначають положення цієї точки на площині.

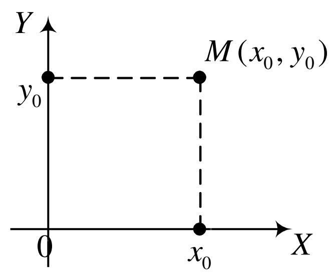


Рис. 11.

Прямокутні декартові координати на площині вводяться так: на площині вибирається точка O (початок координат) і дві взаємно перпендикулярні напрямні прямі OX і OY, що перетинаються в точці O (рис. 11).

При введенні *полярної системи координат* кожній точці на площині ставимо у відповідність два дійсні числа (полярний радіус ρ та полярний кут φ).

Між координатами прямокутної та полярної систем координат існує простий зв'язок, а саме: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, і навпаки,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,. \tag{1}$$

Відстань між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ дві точки на площині. Тоді відстань між ними дорівнює

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\,. \tag{2}$$

На відрізку AB лежить точка M, яка ділить його на дві частини у відношенні $\lambda = \dfrac{AM}{MB}$. Тоді координати точки M знаходять за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,. \tag{3}$$

При поділі відрізка пополам ($\lambda = 1$), маємо координати центра відрізка:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}\,. \tag{4}$$

Задача 1. Перевіряючи термометр виявилось, що ртуть піднімається до + 96^0 при вимірюванні температури кипіння води і опускається тільки $+1^0$ при вимірюванні температури топлення льоду. Визначити фактичну температуру в градусах Цельсія, користуючись показами цього термометра.

Розв'язання. Ця задача зводиться до складання формули переходу від одної системи координат до іншої, причому початок координат переноситься у точку ($+1^0$) і крім цього змінюється одиниця довжини. Частина шкали від $+1^0$ до $+96^0$, тобто 95 одиниць старої системи буде у новій системі містити 100 одиниць, тобто $\frac{e'}{e}=\frac{95}{100}=0,95$ і формула подвійного перетворення буде: $t=0,95x+1$ ($t-$ покази термометра, $x-$ фактична температура). Із останнього рівняння знаходимо фактичне значення температури

$$x=\frac{20}{19}(t-1)\ .$$

Задача 2. На відрізку, що з'єднує точки $A(-4;2)$ і $B(3;16)$, знайти точку M з абсцисою $x=1$.

Розв'язання. За абсцисами відомих та шуканої точок знайдемо параметр λ, підставляючи значення у першу формулу (5):

$1=\frac{-4+3\lambda}{1+\lambda}$. Звідси $\lambda=2,5$.

Тепер знаходимо ординату точки M : $y_M=\frac{2+2,5\cdot 16}{1+2,5}=12$.

Маємо координати точки $M(1;12)$.

§ 2. Пряма на площині

Види рівнянь прямої

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис. 21):

   $y=kx+b$,

   причому $k=\text{tg}\alpha$, де α - кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX; b – відрізок, що відтинає пряма на осі OY.
2. Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0\,, \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)\,.$$

Якщо $B \neq 0$, то рівняння зводиться до попереднього виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\,; \qquad k = -\frac{A}{B}\,.$$

3. Рівняння прямої через дві точки випливає із паралельності векторів $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ (див. рис. 12):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

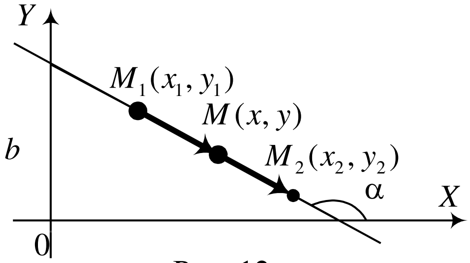


Рис. 12.

4. Рівняння прямої у відрізках на осях (рис. 13):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,,$$

де a і b – відрізки, які відтинає пряма на осях OX та OY відповідно. Воно випливає із попереднього, якщо в якості двох точок взяти точки $M_1(a, 0)$ і $M_2(0, b)$.

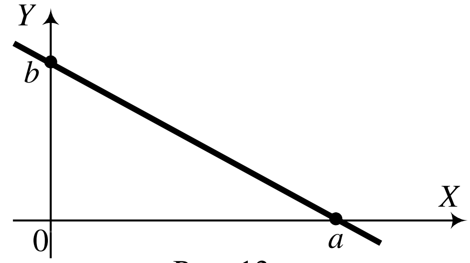


Рис. 13.

5. Нормальне рівняння прямої

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0\,,$$

де φ – кут між нормаллю p до прямої і додатним напрямом осі OX (рис. 14).

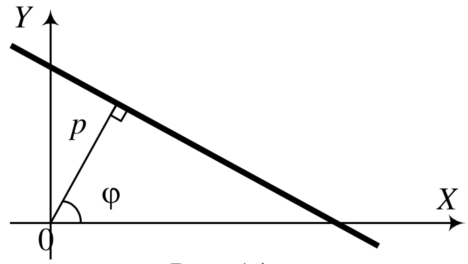


Рис. 14.

6. Параметричне рівняння прямої має вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}.$$

Його легко отримати, наприклад із рівняння третього виду. Фактично рівняння третього виду може бути записане так:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}\,,$$

де m і n – координати напрямного вектора прямої. Прирівнюючи вирази до деякого параметра t

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=t\,,$$

отримаємо параметричне рівняння прямої: $x=x_1+mt,\quad y=y_1+nt$.

Пучком прямих називають сукупність прямих даної площини, які проходять через одну і ту ж точку – *центр пучка*.

Пучок прямих можна записати також через дві прямі що перетинаються, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\alpha(A_2x+B_2y+C_2)=0\,,$$

де α – параметр, що визначає положення прямої пучка. Змінюючи параметр α отримаємо все можливі прямі пучка.

Кут між двома прямими

Нехай $y=k_1x+b_1,\quad y=k_2x+b_2$ – рівняння двох прямих. Тоді кут між ними визначається

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\,. \qquad (1)$$

Якщо прямі паралельні, то $\varphi_2=\varphi_1$, а отже, $k_1=k_2$.

Якщо ж прямі перпендикулярні, то

$$\theta=\frac{\pi}{2}\text{, а отже, }\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0\,.$$

Звідси $1+k_1k_2=0$, тоді $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ (умова перпендикулярності прямих).

***Задача* 1.** Знайти точку перетину прямих $\begin{cases}3x+4y-10=0,\\2x+5y-9=0.\end{cases}$

Розв'язання. Розв’яжемо систему за правилом Крамера:

$$\Delta=15-8=7\,,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}10 & 4\\ 9 & 5\end{vmatrix}=50-36=14\,,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 10\\ 2 & 9\end{vmatrix}=27-20=7\,.$$

Розв’язок системи $x=2,\ y=1$. Отже, прямі перетинаються в точці $N(2;1)$.

Відстань від точки до прямої визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2)$$

***Задача* 2.** Дано координати вершин трикутника $A(2;-5)$, $B(1;-3)$, $C(4;1)$. Через вершину A провести пряму, яка паралельна до медіани BD.

Розв'язання. Спочатку знайдемо координати середини відрізка AC, тобто координати точки D:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \qquad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

Отже, $D(3;-2)$. Рівняння прямої BD шукаємо у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Маємо $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+3}{-2+3}$, або $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1}$, або $x - 1 = 2y + 6$.

Отримали рівняння прямої BD: $x - 2y - 7 = 0$.

***Задача* 3.** При якому значенні невідомого параметра a прямі $(3a+2)x + (1-4a)y + 8 = 0$, $(5a-2)x + (a+4)y - 7 = 0$ перпендикулярні одна до одної?

Розв'язання. Із умови перпендикулярності прямих $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, маємо рівняння $(3a+2)(5a-2) + (1-4a)(a+4) = 0$, або $11a^2 - 11a = 0$. Звідси маємо шукані значення параметра $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

***Задача* 4.** Скласти рівняння сторін трикутника ABC, знаючи одну із його вершин $A(-4;2)$ та рівняння двох медіан $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати точки M перетину медіан трикутника

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0, \\ 3x + 5y - 12 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0, \\ 7y - 14 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ y = 2. \end{cases}$$

Легко бачити що точка $A(-4;2)$ не належить жодній із заданих медіан. Оскільки медіани трикутника в точці перетину поділяються на відрізки у відношенні $\lambda = 2:1$ рахуючи від вершини, то можна знайти координати точки D, медіани AD

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda}, \\ y_M = \dfrac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} = \dfrac{-4 + 2x_D}{1+2}, \\ 2 = \dfrac{2 + 2y_D}{1+2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 3, \\ y_D = 2. \end{cases} \text{ Отже } D(3;2).$$

Так як вершини B і C трикутника ABC лежать на заданих медіанах, то можна стверджувати що їхні координати мають вигляд

$B\left(x_1, \dfrac{3x_1 + 2}{2} \right)$, $C\left(x_2, \dfrac{-3x_2 + 12}{2} \right)$, а точка $D(3;2)$ є середина BC.

Звідси маємо систему рівнянь для знаходження координат вершин B і C:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 3, \\ \dfrac{3x_1 + 2}{2} + \dfrac{-3x_2 + 12}{5} = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ 5x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Маючи координати точок $B(2,4)$ і $C(4,0)$, запишемо рівняння сторони BC:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-4}{0-4}, \Rightarrow y - 4 = -2(x-2), \Rightarrow 2x + y - 8 = 0.$$

Аналогічно знаходимо рівняння сторін AB і AC:

$$(AB) \quad \frac{x+4}{2+4} = \frac{y-2}{4-2}, \quad \Rightarrow x + 4 = 3y - 6, \; x - 3y + 10 = 0,$$

$$(AC) \quad \frac{x+4}{4+4} = \frac{y-2}{0-2}, \quad \Rightarrow x + 4 = -4y + 8, \; x + 4y - 4 = 0.$$

§ 3. Криві другого порядку

Найбільш загальний вигляд кривої другого порядку задається рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому хоча би один із коефіцієнтів A, B, C, не дорівнює нулю.

Залежно від вибору коефіцієнтів рівняння (1), можна отримати чотири види кривих: *коло*, *еліпс*, *гіперболу* і *параболу*.

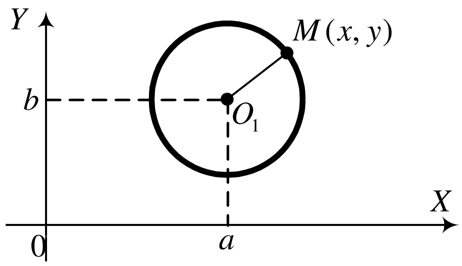


Рис. 15.

1. ***Коло***. Якщо $A=C=1$, $B=0$, то рівняння (1) описує коло (рис 15), або задає точку, або не існує ніякої кривої. *Коло* – це множина точок на площині, рівновіддалених від однієї точки, яка називається центром кола. Загальне рівняння кола

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

Якщо центр кола є в початку координат $(a=b=0)$, тоді маємо найпростіше рівняння кола

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2')$$

Якщо x_1 і y_1 координати довільної точки на колі, то *дотична до кола* в цій точці записується рівнянням $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$, або $xx_1+yy_1=R^2$, залежно від того як визначене коло, у вигляді (2) чи (2').

Задача **1.** Написати рівняння кола з центром в точці $O_1(3;3)$, що дотикається до координатних осей.

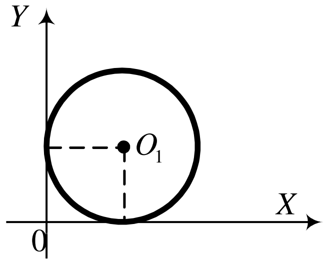


Рис. 16.

Розв'язання. Легко бачити (див. рис.16), що радіус кола $R=3$. Тоді згідно з (2) маємо коло $(x-3)^2+(y-3)^2=9$.

Задача 2. Як зміниться рівняння кола $x^2+y^2+2x-6y+1=0$, якщо перенести початок координат у точку $A(-4,3)$?

Розв'язання. Здійснимо паралельне перенесення початку координат в точку $A(-4,3)$, тоді нові координати пов'язані зі старими залежностями:

$$\begin{cases} X=x+4, \\ Y=y-3. \end{cases}$$

Визначимо звідси обернені зв'язки $x = X - 4, \quad y = Y + 3$ і підставимо їх у рівняння кола, матимемо:

$(X-4)^2 + (Y+3)^2 + 2(X-4) - 6(Y+3) + 1 = 0$, або $X^2 + Y^2 - 6X = 0$.

2. *Еліпс* – це множина точок на площині, сума відстаней яких до двох фіксованих точок, що називаються *фокусами*, є стала і дорівнює $2a$. Причому якщо c – фокусна відстань (відстань від центра еліпса до фокуса), a – велика піввісь, то необхідно, щоб $a > c$ (рис. 17).

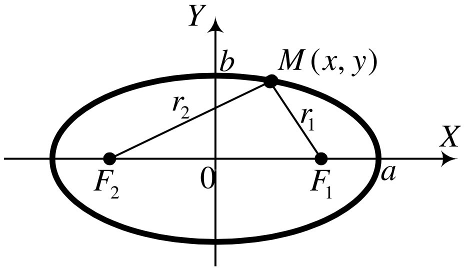


Рис. 17.

$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокуси еліпса; $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ – фокальні радіуси. За означенням еліпса

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Це канонічне рівняння еліпса. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Сплюснутість еліпса характеризує ексцентриситет еліпса, який визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Фокальні радіуси r_1, r_2 знаходять за формулами:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \; r_2 = a + \varepsilon x, \tag{8}$$

де x – абсциса точки M, до якої проведено фокальні радіуси.

Осі координат є осями симетрії еліпса. Точки перетину еліпса з осями симетрії називаються його *вершинами*.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, які паралельні до малої осі і віддалені від неї на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$. Рівняння директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Дотична до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_1, y_1)$ є пряма $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Задача **3.** Написати канонічне рівняння еліпса, якщо відстані від його фокусів до кінців великої осі дорівнюють 2 і 18.

Розв'язання. За умовою задачі $F_1A=2;$ $F_2A=18$ (див. рис. 17). $F_1A+F_2A=2a$; тому $a=10$. Фокусна відстань дорівнює $c=\sqrt{a^2-b^2}$; $OF_1=10-2=8$. З рівняння $8=\sqrt{100-b^2}$ отримуємо $b^2=36$.

Маємо шукане рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

Задача **4.** Знайти дотичні до еліпса $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$, які паралельні до прямої $6x-2y-5=0$.

Розв'язання. Шукані рівняння дотичних матимуть вигляд $\dfrac{xx_1}{5}+\dfrac{yy_1}{4}=1$, або у іншому вигляді $y=\dfrac{4}{y_1}-\dfrac{4x_1}{5y_1}x$. Звідси кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $k=-\dfrac{4x_1}{5y_1}$. Кутовий коефіцієнт заданої прямої – $k_1=3$. З умови паралельності ($k=k_1$), маємо: $4x_1+15y_1=0$. Координати точок дотику знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1+15y_1=0, \\ \dfrac{x_1^2}{5}+\dfrac{y_1^2}{4}=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1+15y_1=0, \\ 4x_1^2+5y_1^2=20. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{15}{7},\ y_1=\dfrac{4}{7}; \\ x_2=\dfrac{15}{7},\ y_2=-\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

Підставимо точки дотику у рівняння $y=\dfrac{4}{y_1}-\dfrac{4x_1}{5y_1}x$, отримаємо рівняння дотичних: $3x-y\pm 7=0$.

3. ***Гіпербола.*** *Гіпербола* – це г.м.т. на площині для кожної з яких різниця відстаней до двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є величина стала і дорівнює $2a$. Причому, якщо c – фокусна відстань, а a – дійсна піввісь, то необхідно $a < c$.

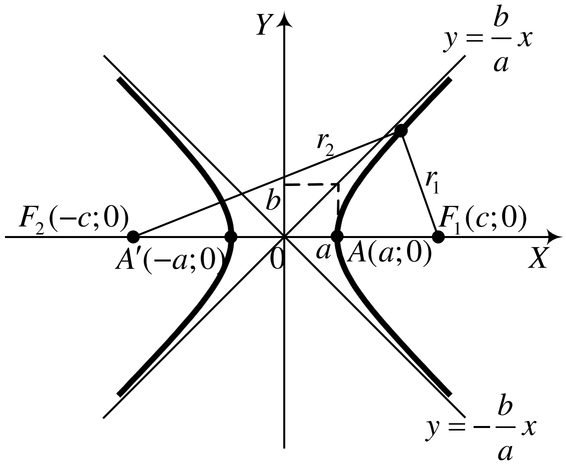


Рис. 18.

Канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ексцентриситет гіперболи визначається так:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Директрисами гіперболи називаються прямі, які перпендикулярні до фокальної осі і віддалені від центра на відстані a/ε, тобто

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Фокальні радіуси визначаються за формулами

$$r_1 = |a - \varepsilon x|, \ r_2 = |a + \varepsilon x|, \qquad (11)$$

де x – абсциса точки M.

Дотична до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці (x_1, y_1) визначається аналогічно як для еліпса, тобто $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$. Із кожної точки площини можна провести дві дотичні до гіперболи; якщо точка взята на гіперболі то дві дотичні зливаються в одну.

Задача **5.** Відомо що точка $M(12, 3\sqrt{3})$ лежить на гіперболі. Знаючи рівняння асимптот $y = \pm 0,5x$ скласти рівняння гіперболи.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння гіперболи у вигляді (9). Оскільки точка M лежить на гіперболі, то її координати задовольняють рівняння гіперболи, маємо: $\frac{144}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1$. Крім цього з рівняння асимптот видно, що $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, або $a=2b$. Тоді $\frac{144}{4b^2}-\frac{27}{b^2}=1, \quad b^2=9, \quad a=6.$

Запишемо рівняння шуканої гіперболи $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

***Задача* 6.** На гіперболі $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ знайти точки, дотичні в яких нахилені до осі абсцис під кутом 60^0.

Розв'язання. Згідно умови, рівняння дотичної $\frac{xx_1}{8}-\frac{yy_1}{9}=1$ запишемо як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=\frac{9x_1}{8y_1}x-\frac{9}{y_1}$. Кутовий коефіцієнт цієї прямої $\frac{9x_1}{8y_1}$ дорівнює $\mathrm{tg}60^0=\sqrt{3}$, звідси $y_1=\frac{9x_1}{8\sqrt{3}}$.

Підставляючи координати (x_1, y_1) у рівняння гіперболи

$$\frac{x_1^2}{8}=\frac{\frac{81x_1^2}{64\cdot 3}}{9}=1, \text{ знайдемо } x_1=\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5};\ y_1=\pm\frac{9}{\sqrt{15}}=\pm\frac{3\sqrt{15}}{5}.$$

Випишемо координати шуканих точок

$$M_1\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{15}}{5}\right), \quad M_2\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right).$$

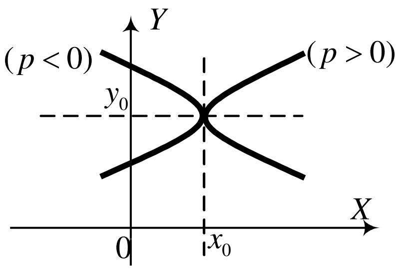


Рис. 19.

4. ***Парабола***. Крива (12) називається *параболою*.

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0). \qquad (12)$$

Точка $M(x_0, y_0)$ – *вершина* параболи, а число p – параметр. Пряма $y=y_0$ є віссю симетрії параболи (рис. 19).

Якщо вершина параболи є у

початку координат, то маємо рівняння

$$y^2 = 2px. \qquad (13)$$

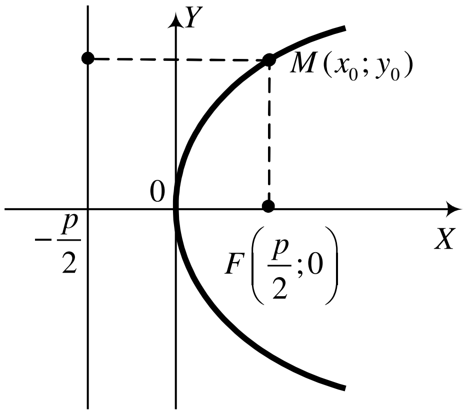


Рис. 20.

Параболою називається геометричне місце точок на площині, для кожної з яких відстань до фіксованої точки, що називається *фокусом*, дорівнює відстані до прямої, яка називається *директрисою* (рис.20).

Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$, причому $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболи, $x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси.

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ в точці (x_1, y_1) визначається рівнянням $yy_1 = p(x + x_1)$.

***Задача* 7.** Дано рівняння параболи $y^2 = 12x$. Знайти довжину хорди, яка проходить через точку $M(8;0)$ і нахилена до осі параболи під кутом 60^0.

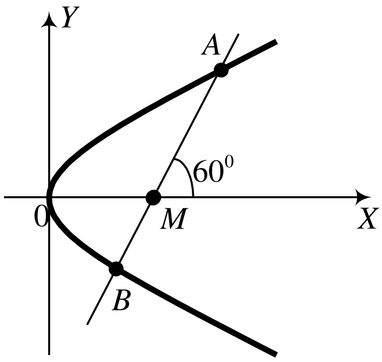


Рис. 21.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку M, та знайдемо її перетин з параболою (рис. 21)

$y = k(x-8)$. Вісь параболи є вісь OX, тому $k = \mathrm{tg}60^0 = \sqrt{3}$. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x-8), \\ y^2 = 12x; \end{cases}$

$$12x = 3(x-8)^2; \; x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 16; \; y_1 = 8\sqrt{3}; \\ x_2 = 4; \; y_2 = -4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Координати точок перетину: $A(16;8\sqrt{3})$, $B(B(4;-4\sqrt{3})$. Довжина хорди

$$AB=\sqrt{(16-4)^2+(12\sqrt{3})^2}=\sqrt{144+144\cdot 3}=12\cdot 2=24.$$

***Задача* 8.** Знайти найкоротшу відстань від параболи $y^2=64x$ до прямої $4x+3y+46=0$.

Розв'язання. Шукана відстань, це відстань від прямої $4x+3y+46=0$ до дотичної проведеної до параболи, яка паралельна до заданої прямої. Тому кутовий коефіцієнт дотичної $yy_1=32(x+x_1)$ співпадає з кутовим коефіцієнтом прямої ($k=-\dfrac{4}{3}$). Тому маємо: $\dfrac{32}{y_1}=-\dfrac{4}{3}$, $y_1=-24$, $x_1=9$. Отже точка $M(9,-24)$, є точкою дотику дотичної до параболи. Залишилось знайти відстань від цієї точки до прямої $4x+3y+46=0$, за відомою формулою

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 9+3(-24)+46|}{\sqrt{16+9}}=2.$$

***Задача* 9.** Підприємство розпочало виробництво машин нового типу. Нехай випуск машин є рівномірний за часом, а річний обсяг продукції 1млн. грошових коштів. Повний термін експлуатації машин складає 10 років. Визначити вартість машинного парку (за винятком суми зносу) на кінець $\boldsymbol{t}$-го року, знаючи що $t\in[0;10]$.

Розв'язання. Нехай $y(t)$ шукана вартість. Вартість машинного парку на кінець $\boldsymbol{t}$-го року без врахування зносу складає 10^6 $\boldsymbol{t}$, проте фактична вартість буде менша внаслідок фізичного та морального зносів. Враховуючи, що машини були введені у виробництво неодночасно, будемо вважати, що середній рік машин ***t/2***. Річний знос машини дорівнює 0,1 від її вартості. Тому на $\boldsymbol{t}$-му році вартість зносу машинного парку складає $\dfrac{10^6 t}{10}\cdot\dfrac{t}{2}=5\cdot 10^4\cdot t^2$. Тому фактична вартість $y(t)=10^6 t-5\cdot 10^4\cdot t^2$ Графіком цієї функції є парабола.

Вправи

1. Показати, що трикутник з вершинами $A(-3;-2)$, $B(0;-1)$, $C(-2;5)$ – прямокутний.

2. Знайти точку, симетричну до точки $(3;-5)$ відносно бісектриси першого координатного кута.

3. Задано квадрат зі стороною 4. Знайти координати вершин цього квадрата, якщо за осі координат взяти його діагоналі.

4. Знайти точку, рівновіддалену від точок $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;2)$.

5. Серединою відрізка є точка $(-1;2)$, а координати одного з кінців відрізка $(2;5)$. Знайти координати другого кінця відрізка.

6. У трьох точках $A(-1;0)$, $B(-2;4)$, $C(4;-5)$ розміщені вантажі відповідно 30, 50, і 70 г. Визначити центр ваги системи.

7. Побудувати прямі, які задані рівняннями:

а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; г) $y = 2x + 3$; д) $y = -2x - 3$;

е) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; є) $2x + 3y - 4 = 0$; ж) $3y - 5 = 0$.

8. Знайти рівняння прямої, яка утворює кут 30^0 з віссю OX і перетинає вісь OY у точці $(0;3)$.

9. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ і паралельна осі OY.

10. Знайти кутові коефіцієнти прямих:

а) $x - y - 5 = 0$; б) $6x - 3y + 7 = 0$; в) $3x + 2y - 1 = 0$.

11. Знайти рівняння прямих, що проходять через точки:

а) $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$; б) $(2;-1)$ і $(2;3)$; в) $(2;-1)$ і $(2;-4)$.

12. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $(4;-3)$ і утворює кут 45^0 з прямою $3x + 4y = 0$.

13. Знайти рівняння двох перпендикулярів до прямої $y = 3x + 1$, які проходять через точки перетину її з осями координат.

14. Знайти рівняння перпендикуляра, встановленого в середині відрізка, що з'єднує точки $(-5;-1)$ і $(-3;4)$.

15. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину прямих $2x - y - 1 = 0$, $x - y + 7 = 0$ і $x - 7y - 1 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

16. Знайти відстань між паралельними прямими $2x + 3y - 8 = 0$ і $2x + 3y - 10 = 0$.

17. Рівнобедрена трапеція з основами 2 і 18 см має гострий кут 45^0. Записати рівняння сторін трапеції, пустивши вісь OX більшою основою трапеції, а вісь OY – віссю симетрії трапеції.

18. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $(-4;6)$ і відтинає від осей координат трикутник площею 6 кв.од.

19. Знайти точку перетину медіан трикутника, знаючи координати його вершин $A(-1;5)$, $B(-4;-2)$, $C(5;-3)$.

20. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(7;0)$, $B(4;6)$, $C(-2;3)$ і $D(1;-3)$ – квадрат.

21. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і: а) паралельна до прямої $y = 4x - 7$; б) перпендикулярна до прямої $y = -0,5x + 3$; в) утворює кут 45^0 з прямою $y = 2x + 5$.

22. Дано трикутник з вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Записати рівняння сторін трикутника, медіани AE, висоти AD і знайти довжину медіани AE.

23. Знайти периметр трикутника, утвореного осями координат та прямою $3x + 4y - 12 = 0$.

24. Записати рівняння перпендикуляра до прямої $8x + 4y - 3 = 0$ в точці перетину її з прямою $x - y = 0$.

25. Скласти рівняння прямої, віддаленої від точки $A(4;-2)$ на 4 одиниці і паралельної до прямої $8x - 15y = 0$.

26. Дано рівняння двох сторін паралелограма $x + y - 7 = 0$, $x - 5y + 23 = 0$ і координати точки перетину діагоналей $(5;5)$. Знайти рівняння двох інших його сторін.

27. Протилежні вершини ромба $A(2;3)$ і $C(1;-2)$. Сторона AB нахилена до осі OX під кутом 45^0. Знайти рівняння всіх сторін ромба.

28. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y=3x+5$ і вершину прямого кута $(4;-1)$.

29. Дано трикутник з вершинами $A(0;-4)$, $B(3;0)$ і $C(0;6)$. Знайти відстань від вершини C до бісектриси кута A.

30. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(0;2)$ і рівняння висот (BM) $x+y=4$, і (CM) $y=2x$, де M – точка перетину висот.

Коло

31. Побудувати систему кіл, що задані рівняннями: а) $x^2+y^2=16$; б) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$; в) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$; г) $x^2+(y-2)^2=4$.

32. Записати рівняння кола з центром в точці $(4;2)$, яке проходить через точку $(3;-2)$.

33. Знайти кут між радіусами кола $x^2+y^2+4x-6y=0$, проведеними в точки перетину його з віссю OY.

34. Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат і відтинає 6 од. від осі OX і 8 од. від осі OY.

35. Визначити траєкторію точки $M(x;y)$, яка рухається так, що сума квадратів її відстаней від точок $A(-a;0)$, $B(0;a)$ і $C(a;0)$ залишається рівною $3a^2$.

36. Коло дотикається до осі OX в початку координат і проходить через точку $A(0;-4)$. Написати рівняння кола і знайти точки його перетину з бісектрисами координатних кутів.

37. Знайти рівняння кола, яке проходить через точку $(-3;4)$ і концентричне до кола $x^2+y^2+3x-4y-1=0$.

Еліпс

38. Знайти довжини осей, ексцентриситет і координати фокусів еліпса $9x^2+25y^2=225$.

39. Знайти рівняння еліпса, який симетричний відносно осей координат, координати фокусів якого $(0;\pm3)$, а довжина більшої осі 12 од.

40. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що він проходить через точки $M_1(6;4)$ і $M_2(-8;3)$.

41. Більша вісь еліпса лежить на осі OX і дорівнює 6; ексцентриситет еліпса $0,5$. Знайти рівняння еліпса.

42. Знайти довжину хорди еліпса $x^2+2y^2=18$, яка ділить кут між осями навпіл.

43. Знайти рівняння еліпса, в якого ексцентриситет дорівнює $\frac{1}{3}$ і абсциса одного з фокусів дорівнює $\frac{3}{2}$.

44. Еліпс, симетричний відносно осі OX і прямої $x=-5$, проходить через точки $(-1;1,8)$ і $(-5;3)$. Написати рівняння еліпса і побудувати його.

45. Знайти траєкторію точки M, яка при своєму русі залишається втричі ближче до точки $A(1;0)$, ніж до прямої $x=9$.

46. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2+8y^2=45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

47. Знайти рівняння сторін квадрата, описаного навколо еліпса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

Гіпербола

48. Знайти ексцентриситет, координати фокусів і рівняння асимптот гіперболи $4x^2-9y^2=36$.

49. Знайти рівняння гіперболи, в якої фокуси мають координати $(\pm 4;0)$ і дійсна вісь дорівнює 6.

50. Написати рівняння гіперболи, що має вершини у фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

51. Записати рівняння гіперболи, що має асимптотами прямі $y=\pm\frac{3}{4}x$ і проходить через точку $(2;1)$.

52. Знайти ексцентриситет гіперболи, асимптота якої утворює з віссю OX кут 60^0.

53. Визначити траєкторію точки M, яка при своєму русі залишається вдвічі далі від точки $F(-8;0)$, ніж від прямої $x=-2$.

54. На гіперболі $9x^2-16y^2=144$ знайти точку, відстань якої від лівого фокуса вдвічі менша, ніж до правого.

55. Довести, що добуток відстаней довільної точки гіперболи до асимптот є величина стала.

56. На гіперболі $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ взята точка, абсциса якої дорівнює 10 і ордината додатня. Знайти фокальні радіуси цієї точки і кут між ними.

57. До гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ провести таку дотичну, яка однаково віддалена від центра і від правого фокуса.

Парабола

58. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і від прямої $x=-4$.

59. Вершина параболи в точці $(2;3)$. Парабола проходить через початок координат і її вісь паралельна до осі OX. Знайти її рівняння.

60. На параболі $y^2=6x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює $4{,}5$.

61. Написати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y=x$ з колом $x^2+y^2+6x=0$ і симетрична відносно осі OX.

62. Через фокус параболи $y^2=-4x$ проведена пряма під кутом 120^0 до осі OX. Написати рівняння прямої і знайти довжину хорди, що утворилася.

63. Написати рівняння параболи, вершина якої міститься в точці $(3;2)$, а фокус – у точці $(5;2)$.

64. Мостова арка має форму параболи. Визначити параметр p цієї параболи, знаючи, що довжина арки 24 м, а висота – 6 м.

65. Через точку $A(2,1)$ провести таку хорду параболи $y^2=4x$, яка би поділялась в цій точці пополам.

66. Визначити параметр параболи $y^2=2px$, якщо відомо, що вона дотикається прямої $x-2y+5=0$.

67. Знайти найкоротшу відстань від параболи $y^2 = 64x$ до прямої $4x + 3y + 46 = 0$.

Змішані задачі підвищеної трудності

68. Валова продукція підприємства за п'ять років збільшилась на $25,5\%$. Скласти рівняння прямої, яка відображає зміну валової продукції протягом п'яти років, якщо валова продукція у відсотках змінюється пропорційно часу. (Валову продукцію за 1рік приймаємо за 100%).
69. Скласти рівняння прямої, яка зображає зміну врожайності з одного гектара протягом 17 років, якщо за перший рік з одного гектара було зібрано 9,1ц зернових культур, а за останній рік – 21ц.
70. Перевезення одиниці деякого вантажу із м. Львова до першого пункту призначення, який знаходиться на відстані 100км, обходиться у 200грн. До другого, який віддалений від Львова на 400км, – 350грн. Скласти залежність вартості перевезень y від відстані, знаючи що ця функція лінійна.
71. Між пунктами А та В проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати А(2;4) та В(16;0) (розміри у км.). Завод С з координатами С(10;14) в тій же системі треба сполучити найкоротшою дорогою із шосе. Знайти на шосе точку входження в нього дороги і довжину цієї дороги.
72. Матеріальна точка рухається під дією деякої сили по колу $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$. Дія сили припинилась, коли точка визначалась координатами $(2;1)$. Визначити подальшу траєкторію руху точки.
73. Автомобільна фара має форму параболічного рефлектора. Де розміщений фокус параболи, коли діаметр осьового перерізу рефлектора 22см, а глибина 5см.
74. В точці M, поближче до пункту B розміщена ворожа гармата. На захисних рубежах A і B звуки її вистрілів чути не одночасно: на рубежі A пізніше, ніж на B на $t = 10$ сек. Відстань від A до B – 20км. Як виявити ворожу гармату? ($c = 340$ м/с – швидкість звуку).
75. Снаряд вилетів із ствола гармати зі швидкістю V під кутом α до горизонту. Скласти рівняння траєкторії снаряда і умови попадання у ворожий пункт, якщо він розміщений на відстані a від вогневої точки O. Опором повітря знехтувати.

76. Знайти координати центра ваги двотаврового перерізу, зображеного на рисунку. Розміри задано у мм.

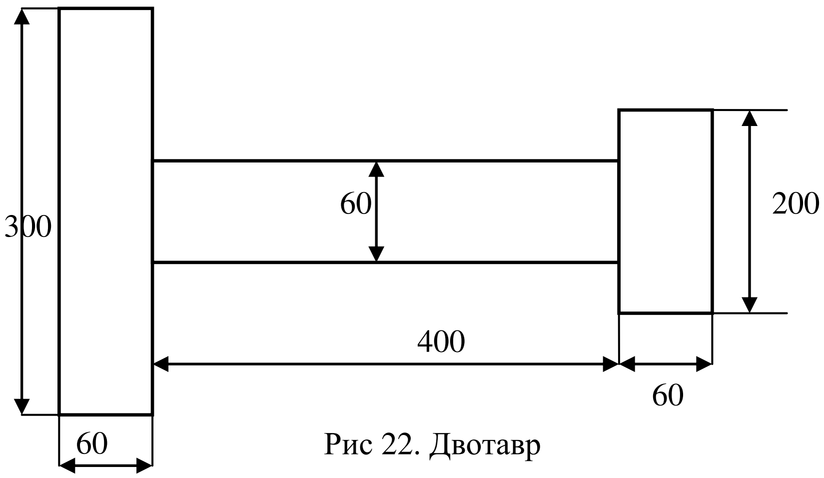


Рис 22. Двотавр

77. Потрібно відновити межі квадратної ділянки землі за трьома стовпцями, які збереглися: один – у центрі ділянки і по одному – на двох протилежних гранях. Скласти рівняння прямих, які відображають межі ділянки на площині, якщо на плані координати стовпців: $M(1;6)$ – в центрі, $A(5;9)$, $B(3;0)$ – на сторонах.

78. Матеріальна точка M рухалась під дією деякої сили по колу $(x-5)^2+(y+3)^2=25$. Дія сили припинилась в момент, коли положення точки визначалась координатами (2;1). Визначити подальшу траєкторію руху точки.

79. Визначити рівняння орбіти штучного супутника Землі, якщо найвища точка орбіти над Землею 5000*км*, а найнижча 300*км.* Землю вважати кулею з радіусом 6370*км.*

80. Стальний міст має вигляд параболічної арки. Проліт арки $29{,}9$*м*, а висота 67*м.* Скласти рівняння арки, прийнявши за вісь OX дотичну у

вершині, а за вісь ОУ – вісь симетрії параболи. Побудувати фокус і директрису параболи.

81. Горизонтальна балка довжиною 3м і масою 80кг вільно лежить своїми кінцями на двох нерухомих опорах А і В. На якій відстані від кінця А треба розмістити вантаж масою 200кг, щоб тиск на опору В був 1100н?

82. Стержень довжиною 60см і масою 5кг підвішений за кінці двома шнурками. Один із шнурків не може витримати натягу, який перевищує 200н. На якій відстані від відповідного кінця стержня можна прикріпити вантаж масою 100кг?

Відповіді

2. $(-5;3)$. **3.** $(2\sqrt{2};0), (0;2\sqrt{2}), (-2\sqrt{2};0), (0;-2\sqrt{2})$. **4.** $(0,5;1)$. **5.** $(-4;-1)$. **6.** $(1;-1)$. **8.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$. **9.** $x=\frac{1}{3}$. **10.** а) 1; б) 2; в) $-\frac{3}{2}$. **11.** а) $x+4y=0$; б) $x=2$. **12.** $x-7y-25=0$. **13.** $3x+9y+1=0$; $x+3y-3=0$.
14. $4x+10y+1=0$. **15.** $23x-14y+26=0$. **16.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **17.** $y=x+9,\ y=-x+9$, $y=8,\ y=0$. **18.** $3x+4y-12=0,\quad 3x+y+6=0$. **19.** $O(0;0)$. **21.** а) $y=4x$, б) $y=2x$, в) $y=\frac{1}{3}x$ або $y=-3x$. **22.** $AE: 2x-5y+4=0, AD: x-2y+2=0$; $\sqrt{29}$. **23.** 12. **24.** $4x-8y+1=0$. **25.** $8x-15y+6=0, 8x-15y-130=0$.
26. $x+y-13=0$, $x-5y+17=0$. **27.** $x-y+1=0,\ 8x+y-6=0$, $x-y-3=0$, $8x+y-19=0$. **28.** $x-2y-6=0,\ 2x+y-7=0$. **29.** $\sqrt{10}$. **30.** $y-x=2$, $x+2y=4$, $2x+y=8$. **32.** $(x-4)^2+(y-2)^2=17$. **33.** $\operatorname{tg}\alpha=-2,4; \alpha=112^0 37'$.
34. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. **35.** $x^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2=\frac{a^2}{9}$. **36.** $x^2+y^2+4y=0; (0;0)$, $(2;-2), (-2;-2)$. **37.** $x^2+y^2+3x-4y=0$. **38.** $10; 6; 0,8;\ (\pm4;0)$.
39. $4x^2+3y^2=108$. **40.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. **41.** $3x^2+4y^2=27$. **42.** $4\sqrt{3}$.

43. $8x^2+9y^2=162$. **44.** $\frac{x^2+10x}{25}+\frac{y^2}{9}=0$. **45.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

46. $\pm 3x\pm 4y+15=0$. **47.** $x-y\pm 3=0,\quad x+y\pm 3=0$. **48.** $\frac{1}{3}\sqrt{13}$; $(\pm\sqrt{13};0)$; $2x\pm 3y=0$. **49.** $7x^2-9y^2=63$. **50.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **51.** $9x^2-16y^2=20$. **52.** $\varepsilon=2$.

53. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$. **54**. $(-9,6;\pm\frac{3}{5}\sqrt{119})$. **56.** $r_1=9, r_2=19,\quad \text{tg}\alpha=\frac{28\sqrt{2}}{41}$.

57. $8x\pm\sqrt{11}y-20=0.$ **58.** $y^2=8(x+2)$. **59.** $2y^2-12y+9x=0$. **60.** $(3;\pm 3\sqrt{2})$.

61. $y^2=-3x$. **62.** $y=-\sqrt{3}(x+1)$; $\frac{16}{3}$. **63.** $y^2-4y-8x+28=0$. **64**. $p=12$ м.

65. $2x-y-3=0$. **66.** $p=2{,}5$. **67**. $d=2$. **68.** $y=5{,}1x+94{,}9$.

69. $y=0{,}744x+8{,}356$. **70**. $y=0{,}5x+150$. **71**. $\left(\frac{358}{53};\frac{140}{53}\right)$, $L=12$ км.

72. $3x-4y-2=0$. **73**. $F(0;6{,}05)$. **74**. $|AM|-|BM|=ct=2a$, біля асимптоти гіперболи $y\approx 5{,}8x$. **75**. $x=Vt\cos\alpha,\quad y=Vt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2},\quad t-$час.

$y=xtg\alpha-\frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha};\quad \alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{ag}{V^2}$. **76**. $x=234{,}6\textit{мм},\quad y=0.$

77. $x+2y-23=0;\quad x+2y-3=0;\quad 2x-y-6=0;\quad 2x-y+14=0.$

78. Складемо рівняння нормалі за двома точками. Потім рівняння дотичної за точкою дотику і її напрямом, перпендикулярному до нормалі. $3x-4y-2=0.$ **79**. $\frac{x^2}{9020^2}+\frac{y^2}{2290^2}=1.$ **80**. Рівняння параболи $x^2=3{,}2y$ та директриси $y=-0{,}4\textit{м}.$ **81**. $x\approx 1{,}07\textit{м}$ ($\lambda\approx 0{,}56$). **82**. На відстані не ближче, ніж $49{,}25\textit{см}$ від кінця більш слабого шнурка.

Розділ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Відстань між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в просторі можна знайти за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{1}$$

Якщо відрізок M_1M_2 поділити точкою M у відношенні $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, то координати точки M знаходяться за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

При поділі відрізка пополам, маємо формули:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3}$$

***Означення* 1.** Рівнянням поверхні в просторі $OXYZ$ називається рівняння виду

$$F(x, y, z) = 0\ , \tag{4}$$

яке пов'язує змінні x, y, z так, що координати довільної точки даної поверхні задовольняють це рівняння і не задовольняють координати тих точок, що не лежать на цій поверхні.

§ 1. Різні види рівнянь площини

Загальне рівняння площини має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0\ , \tag{1}$$

де A, B, C – координати нормального (перпендикулярного) вектора до площини.

Часткові випадки рівняння (1):

а) $D = 0$, рівняння (1) описує площину, яка проходить через початок координат;

б) $A = 0$ – площина, паралельна до осі OX,
$B = 0$ – площина, паралельна до осі OY,
$C = 0$ – площина, паралельна до осі OZ;

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з відомим нормальним вектором $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

Рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3)$$

де a,b,c – відрізки, які відтинає площина від осей координат, відповідно від OX, OY та OZ.

Рівняння площини через три точки

$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, які не лежать на одній прямій.

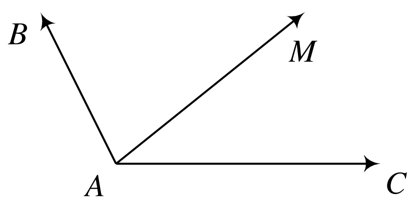


Рис. 23.

Нехай $M(x, y, z)$ – біжуча точка шуканої площини (рис. 23).

Використовуючи умову компланарності векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$, маємо рівняння площини через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Розкиваючи цей визначник за першою стрічкою (або за довільним правилом), отримаємо загальне рівняння площини.

5. Нормальне рівняння площини має вигляд

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad (5)$$

причому

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \qquad (6)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до площини.

Загальне рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ можна звести до (5), помноживши його на нормуючий множник $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (знак "+" чи "–" беремо протилежний до знака D).

6. Пучок площин. Нехай дві площини, які перетинаються, задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Рівняння

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (7)$$

описує пучок площин які проходять через лінію перетину заданих двох площин. Змінюючи параметр λ, отримуємо те чи інше рівняння площини пучка.

Кут між площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини

Нехай задані рівняння двох площин:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$\vec{N}_1(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$ – нормальні вектори до площин. Тоді кут між площинами визначається як кут між нормальними векторами (рис. 24):

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2}{|\boldsymbol{N}_1||\boldsymbol{N}_2|}. \qquad (8)$$

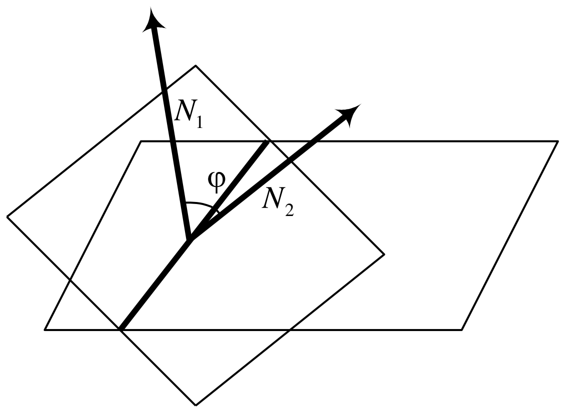


Рис. 24.

Виходячи з цього, площини паралельні, якщо паралельні їх нормальні вектори, тобто

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \qquad (9)$$

і перпендикулярні, якщо перпендикулярні нормальні вектори, тобто

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (10)$$

Відстань від точки до площини шукається аналогічно, як відстань від точки до прямої:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (11)$$

Задача **1.** Знайти відрізки які відтинає площина $2x-3y-z+12=0$ від осей координат.

Розв'язання. Зведемо задане рівняння до рівняння площини у відрізках на осях (3)

$$2x-3y-z+12=0,\ 2x-3y-z=-12,\ \frac{x}{-6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{12}=1.$$

З останнього рівняння маємо відрізки $a=-6,\ b=4,\ c=12$.

***Задача* 2.** Знайти площину, знаючи, що точка $P(3,-6,2)$ служить основою перпендикуляра опущеного із початку координат на цю площину.

Розв'язання. Використаємо рівняння площини що проходить через точку із заданим нормальним вектором (2)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,.$$

Вектор $\overrightarrow{PO}(-3,6,-2)$ є нормальним до шуканої площини, тому $A=-3, B=6, C=-2$. Підставимо координати точки P, та координати нормального вектора у рівняння (2), маємо:

$$-3(x-3)+6(y+6)-2(z-2)=0,\ \text{або}\ 3x-6y+2z-49=0.$$

§ 2. Пряма в просторі. Кут між прямою і площиною

Нехай відомі координати двох точок простору $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Запишемо координати векторів $\overrightarrow{MM_0}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ і $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$. Ці вектори лежать на одній прямій (рис.25).

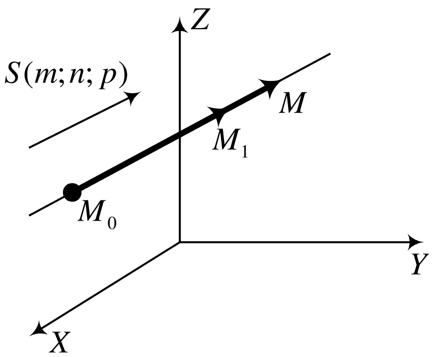


Рис. 25.

Виходячи з умови паралельності векторів, отримуємо рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (1)$$

Вектор $\vec{S}$ паралельний до $\overrightarrow{M_0M_1}$, тому рівняння (1) можна записати таким чином:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називають *канонічним* рівнянням прямої, що проходить через точку із заданим напрямним вектором $\vec{S}(m,n,p)$.

Від рівняння (2) можна перейти до параметричного рівняння прямої

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,\ \text{звідси}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (3)$$

Пряма в просторі може бути задана як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

причому напрямним вектором прямої буде вектор $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Для двох прямих у просторі заданих, канонічними рівняннями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ і $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ кут між ними визначається як кут між напрямними векторами $\vec{S}(m, n, p)$ і $\overrightarrow{S_1}(m_1, n_1, p_1)$.

Якщо один із знаменників у канонічному рівнянні прямої дорівнює нулю, наприклад

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

то чисельник відповідного дробу треба прирівняти до нуля, маємо рівносильну систему

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Кут прямої з площиною

Кут між прямою та площиною визначають як кут між прямою та її проекцією на цю площину. Кут між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ та площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається через скалярний добуток векторів $\vec{N}$ та $\vec{S}$ (рис. 26):

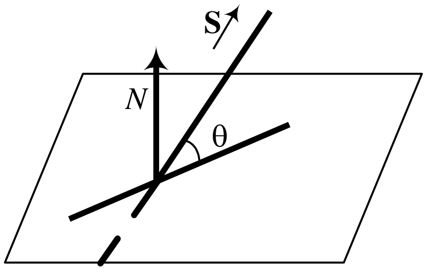


Рис. 26.

$$\cos(90^0-\theta)=\frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{N}|\cdot|\boldsymbol{S}|},\qquad \text{або}$$

$$\sin\theta=\frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{N}|\cdot|\boldsymbol{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{5}$$

Якщо $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{S}$, то $Am+Bn+Cp=0$ — умова паралельності прямої і площини;

Якщо $\boldsymbol{N}\parallel\boldsymbol{S}$, то $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ — умова перпендикулярності прямої і площини.

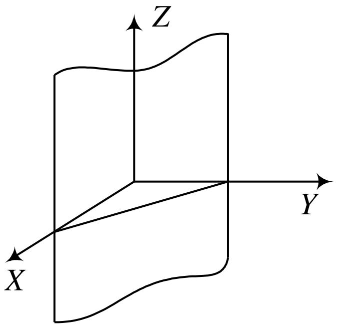


Рис. 27.

***Задача* 1.** Написати рівняння площини, яка паралельна до осі OZ і відтинає на осях OX і OY відрізки 2 і 3 см.

Розв'язання. Шукаємо рівняння площини у вигляді (рис. 27) $Ax+By+D=0$. Перетворимо його так: $\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}=1$.

Враховуючи, що $\begin{cases}-\frac{D}{A}=2,\\ -\frac{D}{B}=3,\end{cases}$

маємо $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, або $3x+2y-6=0$.

Це і є шукане рівняння площини.

Точка перетину прямої з площиною

Щоб знайти точку перетину прямої з площиною, зводимо пряму до параметричного виду і підставляємо біжучі координати прямої в рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\begin{cases}x=mt+x_0,\\ y=nt+y_0,\\ z=pt+z_0.\end{cases}$$

Знаходимо t_0, при якому здійснюється перетин. Тоді t_0 підставляємо в дану систему, отримаємо координати точки перетину.

***Задача* 2.** Знайти відстань між двома паралельними прямими

$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ і $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Розв'язання. Запишемо, наприклад, рівняння другої прямої у параметричному виді $\left.\begin{matrix} x=3t+7 \\ y=4t+1 \\ z=2t+3 \end{matrix}\right\}$. Виберемо на першій прямі точку $A(2,-1,0)$, і побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$, де B біжуча точка взята на другій прямій, тоді $\overrightarrow{AB}(3t+5,4t+2,2t+3)$. Відстань $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ буде найкоротша, коли вектор $\overrightarrow{AB}$ буде перпендикулярний до напрямного вектора $\vec{S}(3,4,2)$. З умови перпендикулярності $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{S}=0$, тому

$$3(3t_0+5)+4(4t_0+2)+2(2t_0+3)=0, \quad \Rightarrow \quad t_0=-1.$$

$\overrightarrow{AB_0}(2,-2,1)$. Відстань між прямими дорівнює $\left|\overrightarrow{AB_0}\right|=\sqrt{4+4+1}=3$.

§ 3. Поверхні другого порядку

Аналогом до кривих другого порядку на площині, для простору є поверхні другого порядку. *Алгебраїчною поверхнею другого порядку* називається поверхня, рівняння якої в декартовій системі координат має найзагальніший вигляд

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+My+Lz+K=0, \quad (1)$$

де коефіцієнти при других степенях змінних A,B,C,D,E,F одночасно не дорівнюють нулю. Вибором коефіцієнтів в (1) отримують канонічні поверхні другого порядку. Розглянемо кілька прикладів.

Сфера. Якщо півколо обертати навколо діаметра то отримаємо поверхню яка називається сферою. Рівняння сфери радіусом R з центром у точці $C(x_0,y_0,z_0)$ має вигляд $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$, якщо ж центр сфери розміщений у початку координат, то її рівняння таке: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Еліпсоїд. Обертання еліпса навколо одної із осей дає поверхню, яка називається еліпсоїдом обертання. Наприклад, обертаючи еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ навколо осі OZ, матимемо поверхню $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Рівняння еліпсоїда із різними півосями має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Якщо центр еліпсоїда знаходиться у точці $A(x_0, y_0, z_0)$, то його рівняння має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

Якщо рівняння (1) не містить змінної z, тобто має вигляд $F(x,y)=0$, то воно описує циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі OZ. Аналогічно кожне з рівнянь $F(y,z)=0$ і $F(x,z)=0$ визначає циліндричну поверхню з твірною, відповідно паралельною до осі OX та OY.

Циліндри другого порядку (рис. 28):

а) круговий $x^2+y^2=R^2$;

б) еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

в) гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

г) параболічний $y^2=2px,\ \ p>0$.

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням плоскої кривої L навколо деякої прямої l (вісь обертання), що лежить у площині лінії L.

Щоб отримати рівняння поверхні обертання лінії L, що лежить у площині XOZ, навколо осі OZ, треба у рівнянні цієї лінії замінити змінну x виразом $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, тобто якщо рівняння лінії L: $F(x,z)=0$, $y=0$, то при її обертанні навколо осі OZ рівняння поверхні обертання має вигляд

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0.$$

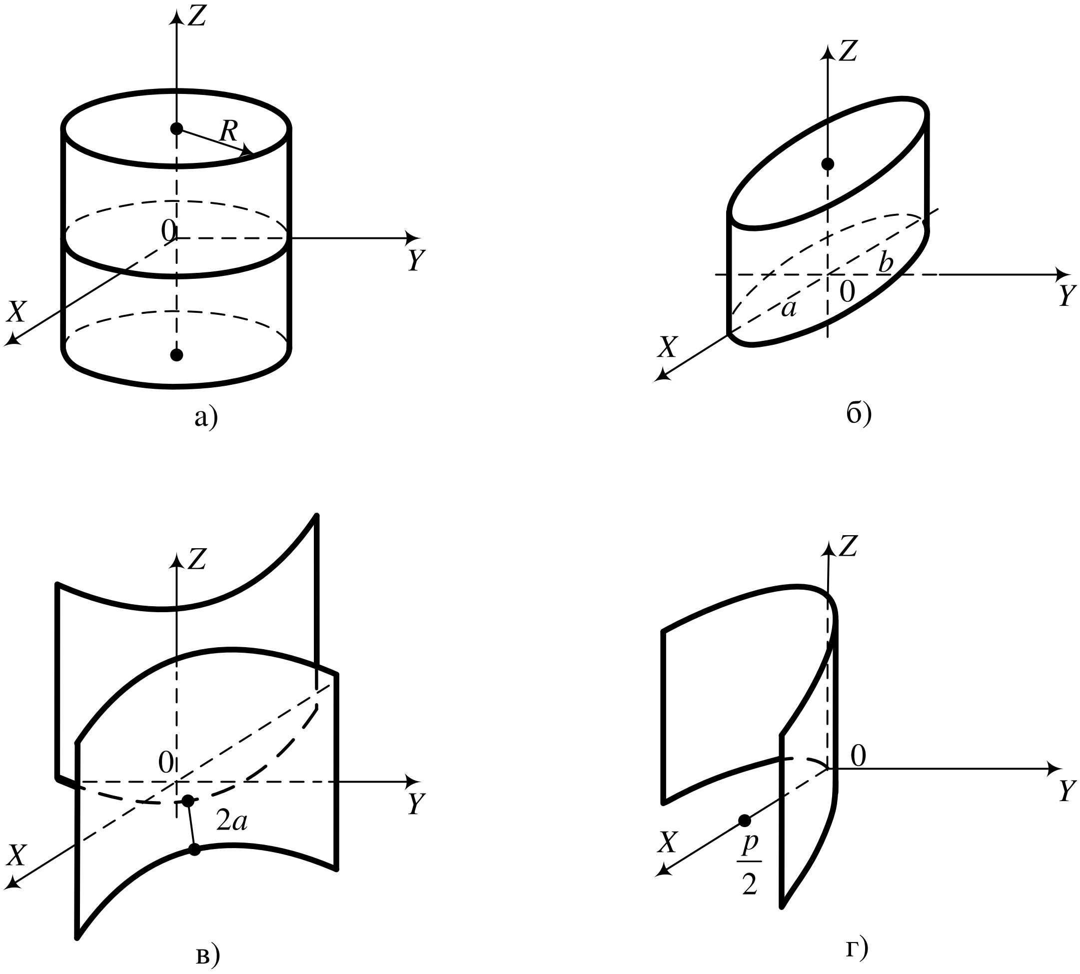


Рис. 28.

Конічною називається поверхня, описана рухомою прямою (твірною), що проходить через фіксовану точку (вершину) і перетинає деяку криву (напрямну) конуса (рис. 29).

Рівняння конуса другого порядку з вершиною в початку координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (2)$$

Однією з можливих напрямних цього конуса є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c$.

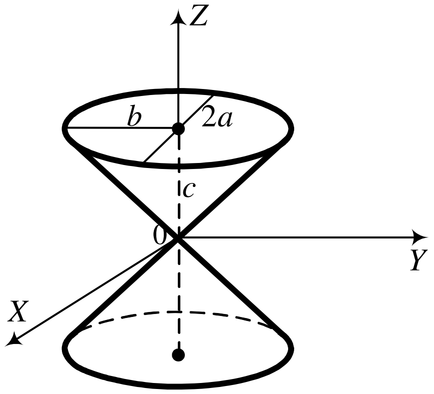


Рис. 29.

Рівняння сфери з центром в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \quad (3)$$

Якщо центр сфери є в початку координат, то маємо найпростіше рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Запишемо канонічні рівняння поверхонь другого порядку:

1. Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 30).
2. Гіперболоїди:
   а) однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 31);
   б) двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 32).
3. Параболоїди:
   а) еліптичний $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad (pq>0)$ (рис.33);

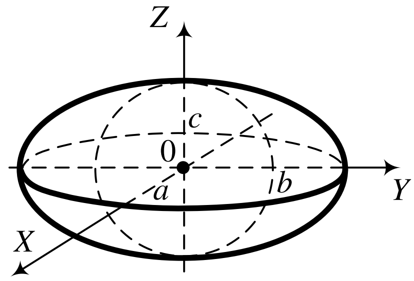


Рис. 30.

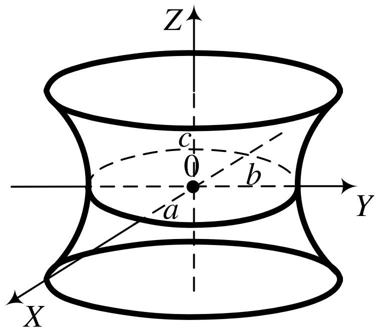


Рис. 31.

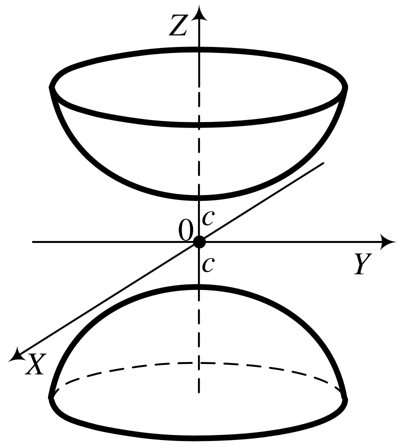


Рис. 32.

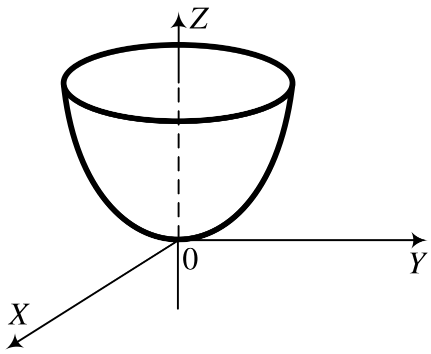


Рис. 33.

б) гіперболічний $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \quad (pq > 0)$ (рис.34).

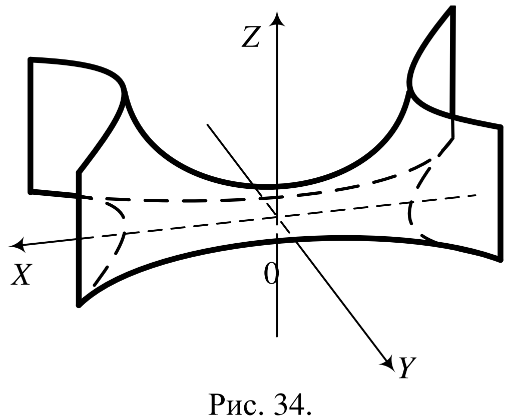


Рис. 34.

Задача **1.** Скласти рівняння поверхні, сума відстаней кожної точки якої до точок $F_1(0,0,-4)$ і $F_2(0,0,4)$ дорівнює 10.

Розв'язання. Нехай $M(x,y,z)$– біжуча точка шуканої поверхні. Запишемо відстані від неї до заданих точок F_1 і F_2:

$$d_1 = |MF_1| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z+4)^2};$$

$$d_2 = |MF_2| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2}.$$

За умовою $d_1 + d_2 = 10$. Звідси маємо рівняння

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z+4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2} = 10.$$

Зведемо його до найпростішого вигляду

$$x^2 + y^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + (z-4)^2 - 20\sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2} + 100;$$

$20\sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2} = 100 + (z-4)^2 - (z+4)^2$; звідси

$$5\sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2} = 25 - 4z;$$

Піднесемо ліву і праву частину рівності ще раз до квадрата:

$$25(x^2 + y^2) + 25(z^2 - 8z + 16) = 625 - 200z + 16z^2;$$

$$25(x^2 + y^2) + 9z^2 = 225, \text{ або } \frac{x^2 + y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

останнє рівняння описує еліпсоїд обертання.

Задача **2.** Скласти рівняння і визначити вид поверхні, яка утворилася при обертанні гіперболи $y^2 - x^2 = 1$ навколо осі OX.

Розв'язання. Згідно з викладеним вище, якщо крива лежить у площині XOY і обертання проходить навколо осі OX, то, щоб записати рівняння цієї поверхні, треба в рівняння лінії замість y підставити $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$.

У результаті отримаємо $y^2 + z^2 - x^2 = 1$. Це однопорожнинний гіперболоїд.

Задача **3.** Написати рівняння нормалі та дотичної площини до поверхні $10x^2 + 16y^2 - z^2 = 1$ в точці $M(1;-1;5)$.

Розв'язання. Для поверхні, яка задана рівнянням $F(x,y,z) = 0$, координати нормального вектора $\vec{N}(A,B,C)$, встановленого в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, визначаються:

$$A=\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0};\ B=\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0};\ C=\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}.$$

Для нормалі цей вектор буде напрямним. У нашому випадку

$$A=20x\big|_{M_0}=20;\qquad B=32y\big|_{M_0}=-32;\qquad C=-2z\big|_{M_0}=-10.$$

Запишемо рівняння нормалі (канонічне рівняння прямої в просторі; пряма, яка проходить через точку в заданому напрямі):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};\ \frac{x-1}{20}=\frac{y+1}{-32}=\frac{z-5}{-10},\text{ або }\frac{x-1}{10}=\frac{y+1}{-16}=\frac{z-5}{-5}.$$

Дотичну площину запишемо виходячи з формули

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

У нашому випадку

$$20(x-1)-32(y+1)-10(z-5)=0,\text{ або } 20x-32y-10z-2=0.$$

Вправи

Завдання* 1. *Площина і пряма в просторі

1. Вказати особливості розміщення площин $x+y+z-1=0$, $x+y-1=0$, $x+y+z=0$, $x+z-3=0$, $x-3=0$.
2. Які відрізки на осях координат відтинає площина $3x-6y+4z-12=0$?
3. Через точку $(1;2;-1)$ провести площину, паралельну до площини $4x-6y+2z-7=0$.
4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $(1;2;-1)$, $(2;-1;3)$ перпендикулярно до площини $2x-3y+z-8=0$.
5. Побудувати площину $2x+3y+6z-22=0$ і знайти кути нормалі до площини з осями координат.
6. Записати рівняння площини, яка паралельна до осі OX і проходить через точки $M_1(0;1;3)$ і $M_2(2;4;5)$.
7. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;2)$ $M_2(2;1;2)$ і $M_3(1;1;4)$.
8. Знайти відстань від точки $(5;1;-1)$ до площини $x-2y-2z+4=0$.
9. Знайти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$ і через точку $(1;2;4)$.

10. Знайти кут між площинами $x-2y+2z-8=0$ і $x+z-6=0$.

11. Записати рівняння площин, паралельних до площини $2x+2y+z-8=0$ і віддалених від неї на відстані $d=4$.

12. Знайти сліди прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$ на площинах XOY та XOZ і побудувати їх.

13. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(3;2;5)$ паралельно до вектора $\vec{m}(4;3;-1)$.

14. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{7}$ з площиною $x+y-z+3=0$.

15. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+y-2z+1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+3y-z-4=0. \end{cases}$

16. Побудувати пряму $x=3,\ z=5$ і знайти її напрямний вектор.

17. Знайти відстань між прямими

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2} \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

18. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2;-3;4)$ на вісь OY.

19. Знайти кут між прямою $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ і площиною $2x+y+z-4=0$.

20. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ і перпендикулярна до площини $2x+3y-z=4$.

21. Записати рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3} \qquad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

22. Знайти проекцію точки $(1;2;8)$ на пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z$.

23. Знайти відстань між прямими $x=-2y=z$ і $x=y=2$.

24. Знайти точку P_1, симетричну до точки $P(2;-5;7)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M_1(5;4;6)$ і $M_2(-2;-17;-8)$.

25. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ на площину $2x+3y-z-5=0$.
26. Знайти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути між площинами $3x+2y+6z-35=0$ і $21x-30y-70z-237=0$.
27. Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $x-y+z-7=0$ і $3x+2y-12z+5=0$.
28. Через пряму $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ провести площину паралельну до прямої $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Завдання 2. Поверхні другого порядку

1. Скласти рівняння поверхні, кожна точка якої розміщена вдвічі ближче до точки $A(2;0;0)$, ніж до точки $B(-4;0;0)$.
2. Скласти рівняння поверхні, кожна точка якої рівновіддалена від прямої $x=a,\ \ y=0$ і площини YOZ.
3. Побудувати поверхні, які визначаються рівняннями:
   а) $x^2+y^2=9$; б) $y^2=2x$; в) $y^2+z^2-6y=0$; г) $x^2+z^2=4x$.
4. Скласти рівняння циліндричної поверхні з твірною, яка паралельна до вектора $\vec{S}(1;1;1)$, і напрямною $x^2+y^2=4x,\quad z=0$.
5. Пряма $x-1=y+1=z$ обертається навколо осі OZ. Скласти рівняння поверхні обертання.
6. Визначити координати центра і радіус сфери, яка задана рівнянням $x^2+y^2+z^2+10x-8y-6z+25=0$.
7. Скласти рівняння площини, що проходить через центр C сфери $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z=0$ перпендикулярно до прямої, що проходить через центр C і початок координат.
8. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,\quad 2x+2y+z+1=0$.
9. Встановити тип поверхонь і побудувати схематичний рисунок: а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$; в) $x^2+y^2+z=4$.

10. Довести, що лінія перетину поверхні $x^2 + y^2 = 2z$ площиною $x + y + z = 1$ є еліпс, і знайти його параметричні рівняння.

11. Побудувати гіперболоїд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ і знайти його твірні, що проходять через точку $M_0(4;1;-3)$.

Завдання 3. Прикладні задачі

1. Вважаючи форму Землі за геоїд – кулю, близьку до земного еліпсоїда (R=6370км), визначити радіус 51 паралелі і написати рівняння цієї паралелі.
2. Знайти довжини тропіка і полярного круга, якщо відомо, що вони віддалені від екватора на $23^0 27'$ і $66^0 33'$ відповідно, і написати їх рівняння.
3. Струмінь фонтану витікає із трубки зі швидкістю v під кутом α до горизонту по кривій $y = tg\alpha + \frac{gx^2}{2v^2}$. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням струменю навколо осі ОУ. Побудувати цю поверхню.
4. В посудину налита рідина. Посудину рівномірно обертають з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ навколо деякої осі. Визначити форму поверхні рідини.
5. Прийнятий в геодезії Земний еліпсоїд (еліпсоїд Красовського) має такі параметри: велика піввісь $a = 6378,245 км$, стиск $\alpha = \frac{a-b}{b} = \frac{1}{298,3}$. Скласти рівняння еліпсоїда.

Завдання* 4. *Задачі підвищеної трудності

1.

Відповіді

***До завдання* 1**

2. $(4;-2;3)$. **3**. $2x - 3z + z + 5 = 0$. **4**. $9x + 7y + 3z - 20 = 0$. **5**. $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$. **6**. $2y - 3z + 7 = 0$. **7**. $2x - y + z = 5$. **8**. 3.

9. $x-8y+9z-21=0$. **10**. 45^0. **11**. $2x+2y+z-20=0$ і $2x+2y+z+4=0$.
12. $(0;-4;0)$ і $(2;0;2)$. **13**. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{-1}$. **14**. $(18;5;26)$.

15. $\varphi=\arccos\frac{11}{26}$. **16**. $\vec{p}(0;1;0)$. **17**. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **18**. $y=-3,\quad 2x-z=0$.

19. $\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$. **20**. $8x-5y+z-11=0$. **21**. $x-y-z=0$. **22**. $(3;-1;1)$.

23. $d=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **24**. $\vec{p}(4;1;-3)$. **25**. $\frac{x}{-10}=\frac{y-3,4}{13}=\frac{z-5,2}{19}$.
26. $45x+184y+482z-553=0$ і $96x-13y-4z-1106=0$. **27.** $2x+3y+z=0$.
28. $x-2y-2z+2=0$.

***До завдання* 2**

1. $(x-4)^2+y^2+z^2=16$. **2.** $y^2=2ax-x^2$. **4.** $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$.

5. $x^2+y^2-2z^2=2$. **7.** $2x-y+3z-7=0$. **8.** $C(\frac{10}{3},-\frac{14}{3},\frac{5}{3})$. $R=3$.

1**0.** $x=-1+2\cos t,\quad y=-1+2\sin t,\quad z=3-2\cos t-2\sin t$.

11. $\frac{x}{2}+\frac{z}{3}=\frac{y+2}{3},\quad \frac{x}{2}-\frac{z}{3}=-\frac{y-2}{\frac{1}{3}},\quad \frac{x}{2}+\frac{z}{3}=-\frac{y-2}{1},\quad \frac{x}{2}-\frac{z}{3}=\frac{y+2}{1}$.

***До завдання* 3. Прикладні задачі**

1. $r=4009$*км.*, $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6370^2, \\ z=4961,9. \end{cases}$ **2.** 36720*км* і 15930*км*. Рівняння тропіка $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6370^2, \\ z=2534,7. \end{cases}$ Рівняння полярного круга $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6370^2, \\ z=5844,5. \end{cases}$

3. $y-tg\alpha=\frac{g}{2v^2}(x^2+z^2)$. **4**. Параболоїд обертання.

5. $$\frac{x^2}{(6378,245)^2}+\frac{y^2}{(6378,245)^2}+\frac{z^2}{(6356,936)^2}=1.$$

***До завдання* 4.**

Розділ 5. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

§ 1. Функція. Основні елементарні функції

При вивченні закономірностей, які зустрічаються в природі, весь час доводиться мати справу з постійними та змінними величинами.

***Означення* 1.** *Постійною* називається величина, яка зберігає одне і те ж числове значення або взагалі, або в даному процесі.

***Означення* 2.** *Змінною* називають величину, яка може набувати різних числових значень.

***Означення* 3.** Змінна величина y називається *функцією* (однозначною) від змінної x, якщо вони пов'язані між собою так, що кожному значенню величини x відповідає *єдине* значення величини y.

Способи задання функції

1. *Аналітичний* (формулою): $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, наприклад, $y = \pi R^2$ – площа круга з радіусом R. Це найбільш вживаний спосіб задання функцій.
2. *Табличний* (таблиця). Задано перелік значень змінної x та відповідний перелік значень y, наприклад,

x_i	1	4	7	10	-4
y_i	2	3	5	9	7

Знаючи аналітичний вираз функції, наприклад $y = x^2$, можна перейти до табличного:

x_i	0	1	-1	2	-2	3
y_i	0	1	1	4	4	9

3. *Графічний* (графік). Наприклад, *барограма* – запис самопишучого пристрою барографа, що графічно показує зміну атмосферного тиску в часі, *кардіограма* – описує графічно ритмічну роботу серця і т. д.

Поняття неявної функції

***Означення* 5.** Функція y від аргументу x називається *неявною*, якщо вона задана рівнянням

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

наприклад, $x^2 e^y + y^2 x = 1$.

Поняття про обернену функцію

Нехай задана функція $y = f(x)$. Задаючи значення x, отримуємо відповідні значення y. Але можна вважати y аргументом, а x – функцією, задаючи значення y. У цьому випадку x визначається як неявна функція від y. Ця остання і називається *оберненою* відносно даної y.

Сукупність раціональних та ірраціональних функцій утворює клас *явних алгебраїчних* функцій.

У загальному випадку *алгебраїчною* називається неявна функція, яка визначається рівнянням

$$p_0(x) y^n + p_1(x) y^{n-1} + \dots + p_n(x) = 0,$$

де n – ціле додатне число, $p_i(x)$ – цілі раціональні функції і $p_0(x)$ не дорівнює тотожно нулю.

1. Всяка неалгебраїчна функція називається *трансцендентною*. Наприклад, $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$ – *елементарні трансцендентні* функції.

Алгебраїчні, елементарні трансцендентні функції та їх скінченні комбінації називаються *елементарними* функціями.

Означення 6. Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$, наприклад, $y = kx^2$, і *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$, наприклад, $y = kx^3$. Бувають функції ні парні, ні непарні, наприклад, $y = x^2 + \operatorname{tg} x$.

Слід зауважити, що графік парної функції симетричний відносно осі OY, а непарної – відносно початку координат.

Означення 7. Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою* (*неспадною*) на інтервалі $(a;b)$, якщо з того, що $x_2 > x_1$ ($x_1, x_2 \in (a;b)$), випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) \geq f(x_1)$). А якщо з того, що $x_2 > x_1$, випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $y = f(x)$ – *монотонно спадна* ($x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$ – то $y = f(x)$ – *незростаюча*).

***Означення* 8.** Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом T, якщо $f(x+T) = f(x)$ для довільного x з області визначення, T – найменше додатне число, для якого виконується ця рівність.

Наприклад, для функції $y = \sin x$, маємо $\sin(x+2\pi) = \sin x$, тому її період $T = 2\pi$; а для функції $y = \mathrm{tg} x$: $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}\, x$, отже, її період $T = \pi$.

Основні елементарні функції. Їх графіки

1. Степенева функція $y = x^n$ (n – ціле) визначена при $-\infty < x < \infty$, якщо $n \ge 0$; при $0 < |x| < \infty$, якщо $n < 0$. Якщо $n < 0$, то графіки степеневих функцій є гіперболами (рис. 35, 36).

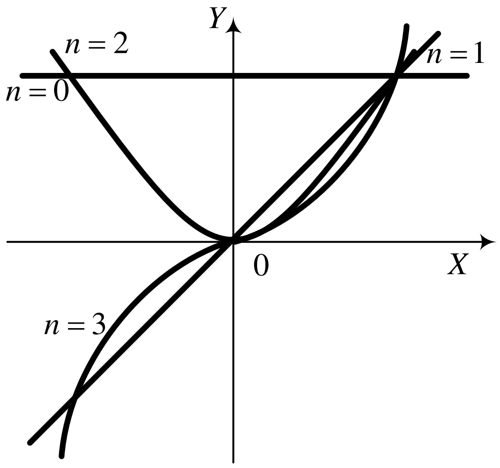


Рис. 35.

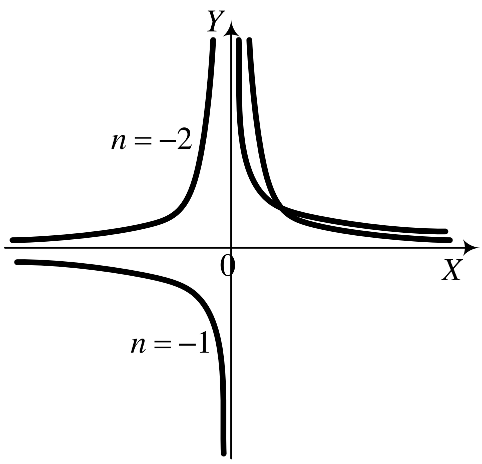


Рис. 36.

2. Радикал $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$ (натуральні числа), визначений при $-\infty < x < \infty$, якщо n – непарне; при $0 \le x < \infty$, якщо n – парне. Оскільки $x = y^n$, то функція $y = \sqrt[n]{x}$ є оберненою до степеневої. Легко бачити, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого і

третього координатних кутів. Наведемо графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 37).

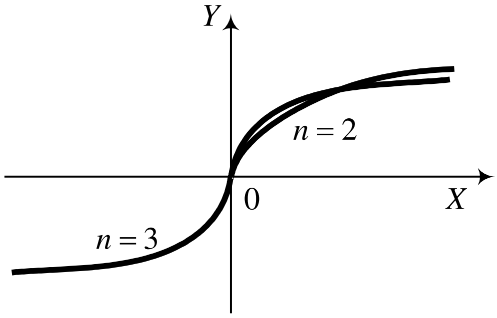


Рис. 37.

3. Показникова функція $y = a^x$,
   ($a > 0, a \neq 1$) (рис. 38).
4. Логарифмічна функція
   $y = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1$
   (рис. 39).

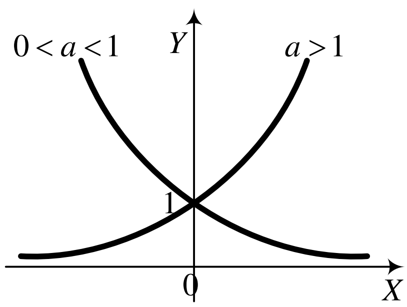


Рис. 38.

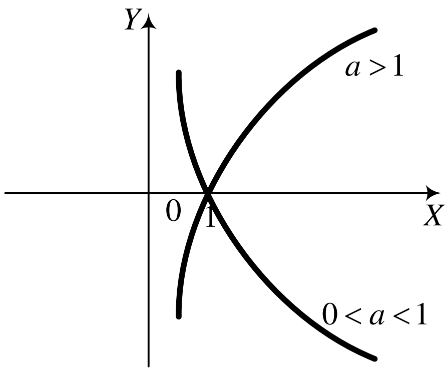


Рис. 39.

5. Тригонометричні функції (рис. 40, 41):
   а) $y = \sin x$ (графік – синусоїда);
   б) $y = \cos x$, враховуючи тотожність $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, графік функції $y = \cos x$ отримуємо зміщенням графіка $y = \sin x$ вліво вздовж осі OX на відрізок $\dfrac{\pi}{2}$;

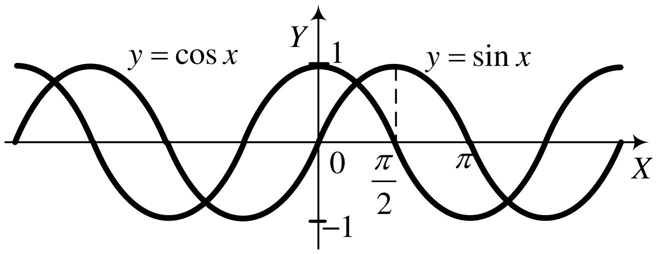


Рис. 40.

в) $y = \operatorname{tg} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} x$.

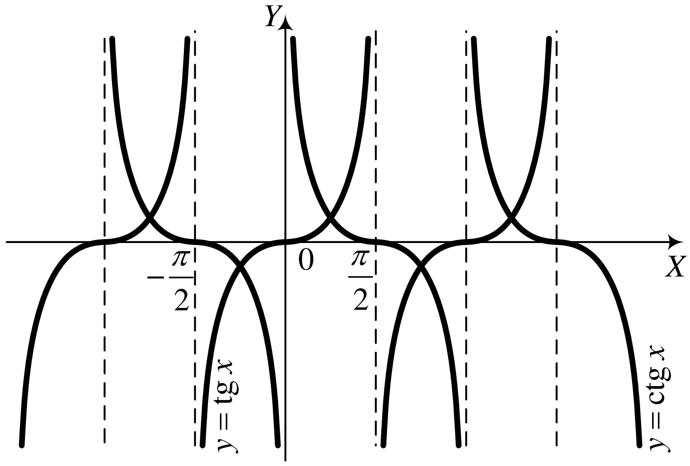


Рис. 41.

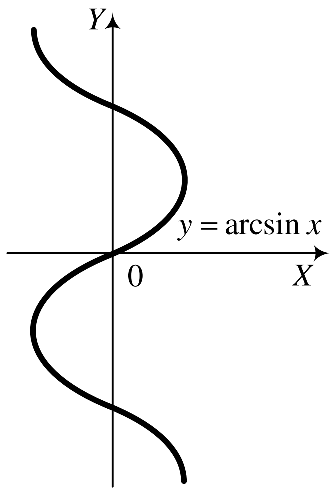


Рис. 42.

6. Обернені тригонометричні функції:

а) $y = \arcsin x$. *Оберненою тригонометричною* функцією $\arcsin x$ називається величина (дуга, кут, число) y, взята від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус якої дорівнює x, тобто

$$y = \arcsin x, \text{ якщо } \sin x = y \text{ і } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Якщо не накладати умови $y \in [-\pi/2; \pi/2]$, тобто знайти всі значення y, синус якого дорівнює x, то отримаємо *многозначну* функцію $y = \operatorname{Arc}\sin x$, графіком якої є синусоїда вздовж осі OY (див. рис. 42).

$\mathrm{Arc}\sin x = (-1)^k \arcsin x + k\pi,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

б) $y = \arccos x$. *Оберненою тригонометричною* функцією $\arccos x$ називається величина (дуга, кут, число) y, взята від 0 до π, косинус якої дорівнює x, тобто

$y = \arccos x$, якщо $\cos x = y$ і $0 \le y \le \pi$.

І аналогічно, функція $\arccos x$ називається *головним значенням* многозначної функції

$$\mathrm{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2\pi k,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

§ 2. Границя та неперервність функцій

***Означення* 1**. Точка a (a – скінченне) називається *граничною* точкою (точкою *скупчення*) множини *X*, якщо в довільному її δ-околі U_a міститься нескінченно багато елементів $x \in X$, тобто $\forall U_a : U_a \bigcap X \neq \varnothing$.

***Означення* 2.** Число A називається *границею* функції $f(x)$, при $x \to a$ (a – число), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий δ-окіл $U_a = \{x : 0 < | x - a | < \delta\}$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, що $| f(x) - A | < \varepsilon$ при $x \in U_a$.

За змістом означення границі функції числа ε, $\delta(\varepsilon)$ можна вважати достатньо малими. Не обов'язково, щоб δ-окіл був симетричним. Коротко границю функції записують так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ або } f(x) \to A, \text{ при } x \to a.$$

***Означення* 3.** Функція $f(x)$ називається *обмеженою* на даній множині X, якщо існує таке додатне число M, що $| f(x) | \le M$ при $x \in X$. Якщо такого числа немає, то функція – *необмежена*.

***Твердження* 1.** Якщо число A є границею функції $f(x)$ при $x \to a$, то вона є обмеженою в деякому околі точки a.

***Означення* 4.** Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл U_a точки a, що $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при $x \in U_a$; це записують $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ або $\alpha(x) \underset{x \to a}{\to} 0$.

***Означення* 5.** Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$, якщо для довільного $E > 0$ існує окіл U_a точки a, що $|f(x)| > E$ при

$x \in U_a$ для всіх допустимих значень аргументу x. Це записують $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$; якщо $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ ($\alpha(x) \neq 0$ для $x \neq a$), то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$.

Твердження **2.** Якщо в деякому околі U_a точки a $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ і $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Твердження **3.** Нехай функція $f(x)$ монотонна та обмежена при $x < a$ чи при $x > a$. Тоді існує відповідно ліва границя $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ чи права границя $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$.

Означення **6.** Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$, якщо функція визначена в точці x_1 і $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Означення **7.** Функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Означення **8.** Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $f(x)$, якщо існують скінченні односторонні границі і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, причому в самій точці x_0 функція не обов'язково визначена. Всі інші точки розриву називаються *точками розриву другого роду*, наприклад. Величина $\delta = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ називається стрибком функції в точці x_0.

Основні твердження про неперервні функції

1. Якщо функція неперервна на замкненому інтервалі $[a;b]$ і на кінцях приймає значення різних знаків, то знайдеться хоча б одна

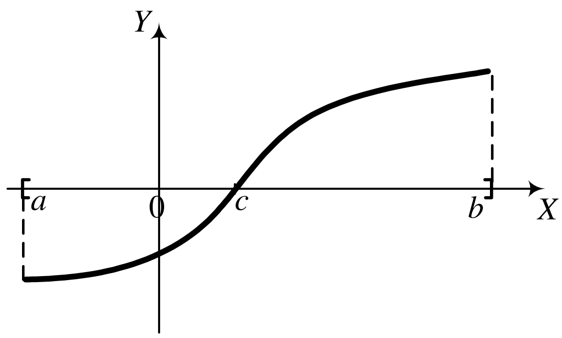


Рис. 43.

точка $x = c$ така, що $f(c) = 0$ (рис. 43).

Геометрично:

$f(a) < 0$,

$f(b) > 0$,

$f(c) = 0$.

2. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна в замкнутому проміжку $[a;b]$, то вона обмежена і зверху, і знизу, тобто існують такі сталі числа m і M, що $m \le f(x) \le M$ на $[a;b]$.

Основні теореми про границі

1. Границя сталої дорівнює самій сталій: $\lim\limits_{x\to a} C = C$.
2. Сталий множник можна винести за знак границі: $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
3. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь:
$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$
4. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь:
$$\lim_{x\to a}[u(x)\cdot v(x)] = \lim_{x\to a} u(x) \cdot \lim_{x\to a} v(x).$$
5. Границя частки дорівнює частці границь: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$.

§ 3. Основні типи границь

Спочатку розглянемо границі дробово-раціональних функцій $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де чисельник та знаменник дробу – многочлени.

До <u>*першого*</u> типу віднесемо найпростіші границі виду $[A], \left[\dfrac{0}{A}\right], \left[\dfrac{A}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{A}\right], \left[\dfrac{A}{\infty}\right]$ (немає жодної особливості). Наприклад,
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x-1} = 7;\ \lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty.$$

Серед наведених видів границь немає особливостей виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а також $[0\cdot\infty]$ і $[\infty-\infty]$, які називають *невизначеностями*.

До <u>*другого*</u> типу віднесемо границі виду $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$, де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени (a – скінченне число). Щоб розкрити цю невизначеність (знайти границю), треба чисельник і знаменник дробу поділити на $x-a$ (скоротити дріб), наприклад:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^2+2x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x+4}=\frac{7}{6}.$$

До <u>*третього*</u> типу віднесемо границі виду $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени або інші функції (можуть бути корені), що прямують до ∞, при $x\to a$. Щоб знайти цю границю, треба чисельник і знаменник поділити на x^n, де n – найвищий степінь x, який входить у дріб. Наприклад,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x\sqrt{x}+2}{x^3+x^2+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

До <u>*четвертого*</u> типу віднесемо границі з невизначеністю виду $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$, де $P(x), Q(x)$ – вирази, що містять корені, причому a – скінченне число. Для їх розкриття необхідно домножити чисельник і знаменник дробу на спряжені вирази, після чого скоротити дріб. Наприклад,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

До <u>*п'ятого*</u> типу віднесемо границі, в які входять тригонометричні чи обернені тригонометричні функції та які містять невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для знаходження таких границь необхідно використати *першу визначну границю*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}. \tag{1}$$

Приклади:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0;$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}=\left[\begin{array}{c}\text{заміна:}\\ \operatorname{arctg} 2x=t\\ x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} t\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg} t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos t}{\sin t}=\frac{1}{2}.$$

Друга визначна границя

До <u>шостого</u> типу віднесемо невизначеність виду $[1^\infty]$. *Друга визначна границя* має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \tag{2}$$

де e – основа натурального логарифма, $e\approx 2,718281828\ldots$ (трансцендентне число). Якщо границя має невизначеність $[1^\infty]$, то для її розкриття необхідно використати другу визначну границю, наприклад,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n-4}\right)^n=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-4+6}{5n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{5n-4}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n-4}{6}}\right)^{\frac{5n-4}{6}\cdot\frac{6}{5n-4}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{5n-4}}=e^{\frac{6}{5}}.$$

До <u>*сьомого*</u> типу віднесемо невизначеності виду $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$. Вони зводяться до попередніх, наприклад,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x})=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}}=-\frac{1}{2}.$$

Тут ми домножили чисельник і знаменник на спряжений вираз до чисельника і отримали границю третього типу.

Щоб знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\cdot\mathrm{tg}x=\left[0\cdot\infty\right]$ проведемо заміну $x-\frac{\pi}{2}=t$, матимемо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\cdot\mathrm{tg}x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{t\to0}t\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\lim_{t\to0}t\cdot\mathrm{ctg}t=-\lim_{t\to0}t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=-1.$$

Вправи

1. Знайти область визначення функцій:

   а) $y=\frac{3x-1}{5x-6}$, б) $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$, в) $y=\log_7(4x-x^2)$,

   г) $y=\sqrt{\frac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$, д) $y=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$.

2. Вказати, які з функцій парні, а які непарні:

   а) $y=\cos x+x\sin x$, б) $y=2x\sin^2 x-3x^3$,

   в) $y=\frac{x}{\sin x}$, г) $y=\log_2\frac{2-x}{2+x}$.

3. Знайти період функцій:

   а) $y=\sin 4x$, б) $y=\sin x+\cos 2x$, в) $y=|\sin x|$,

   г) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

4. Побудувати графіки функцій:

1) $y=4x+3$, 2) $y=x^2+2x-3$, 3) $y=2|x+1|$, 4) $y=|4-x^2|$,

5) $y=-\sqrt{2x-1}$.

5. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+4}{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$, 3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$,

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{x-2}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x+1}{14x^2+2x+3}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$, 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^3+1}-x}{3x+5}$,

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$, 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$, 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$, 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$, 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$,

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$, 18) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$,

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 15x}$, 20) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$, 21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$,

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, 23) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+4)-\ln n]$,

24) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln n-\ln(n+2)]$,

25) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$, 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{x}$, 27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$,

28) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^x-8}{\sin\pi x}$, 29) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}}$, 30) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x+\sin 6x+\sin 7x}{\sin 9x-\sin 4x}$,

31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$, 32) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

6. ***Задачі підвищеної трудності***:

1) До вузла електричного ланцюга підключено два струми: $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^0)$ і $i_2 = 14{,}1\sin(\omega t - 135^0)$. Знайти струм у нерозгалуженій частині ланцюга.

2) Динамічна самоіндукція антени при видовженні хвилі виражається формулою $L = L_0\frac{tg(\pi l/\lambda)}{2\pi l/\lambda}$, де $L-$динамічна самоіндукція; L_0-статична самоіндукція; $l-$діюча довжина антени; $\lambda-$довжина хвилі антени. Знайти граничне значення $\lim\limits_{\lambda\to\infty} L$.

3) В теорії лампових генераторів доведено, що коефіцієнт корисної дії генератора η виражається через кут відсічення струму за формулою $\eta = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4(\sin\theta - \theta\cos\theta)}\xi$, де $\xi-$коефіцієнт використання напруг. Знайти $\lim\limits_{\theta\to 0}\eta$.

4) Розрахунок робочих коліс турбіни приводить до рівняння $\ln y = -k^2x^2 + \ln y_a$, де $y-$товщина колеса на відстані x від осі обертання; $y = y_a$ при $x = 0$. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{y_a}$.

5) Бетонна колона, що має висоту h, підлягає стисненню силою $\vec{P}$ і власною вагою в напрямі своєї вертикальної осі. Розміри колони запроектовані так, що у всіх поперечних перерізах нормальні напруження сталі (колона рівного опору). Встановити закон зміни площі поперечного перерізу колони залежно від відстані перерізу від її верхнього краю.

Відповіді

1. а) $\left(-\infty,\frac{6}{5}\right)\cup\left(\frac{6}{5},\infty\right)$, б) $\left(0,\frac{2}{3}\right]$, в) $(0,4)$,

г) $(-\infty,\ -3)\cup[-2,\ 0)\cup(0,\ 3)\cup[5,\ \infty)$, д) $(0,\ 0{,}5]\cup(1,\ 2]$.

2. а) парна, б) непарна, в) парна, г) непарна.

3. а) $T=\frac{\pi}{2}$, б) $T=2\pi$, в) $T=\pi$, г) $T=\frac{\pi}{2}$.

5. 1) 5; 2) 10; 3) $\frac{1}{6}$; 4) -1; 5) -8; 6) 3, 7) $\frac{1}{2}$; 8) 0;

9) ∞, 10) 1; 11) $\sqrt{2}$; 12) 1; 13) 2; 14) $\frac{4}{5}$; 15) 0;

16) 2, 17) $\frac{1}{2}$, 18) $\frac{1}{2}$; 19) $\frac{4}{9}$; 20) $\frac{5}{3}$; 21) e^2; 22) e; 23) 4;

24) $-2{,}25\ \sqrt{e}$; 26) $\ln 2$; 27) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, 28) $-\frac{8\ln 2}{\pi}$,

29) $-2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, 30) $\frac{6}{13}$, 31) $\frac{1}{4}$, 32) $\frac{2}{\pi}$.

6. 1) $i_3=0$; 2) $\frac{L_0}{2}$; 3) ξ; 4) 0.

5) Нехай площа верхнього перерізу колони (F_0) визначимо із умови міцності: $\frac{P}{F_0}=\sigma$, звідси $F_0=\frac{P}{\sigma}$, де $\sigma-$допустиме напруження на стиск. Напруження у всіх інших перерізах також повинно дорівнювати σ. Щоб знайти закон зміни площ за висотою колони, проведемо, починаючи зверху, перерізи з площами $F_1,F_2,...,F_{n-1}$ і розглянемо ступінчасту фігуру складаних із циліндрів з площами основ $F_1,F_2,...,F_{n-1}$. В цій фігурі переріз F_1 отримує два навантаження – навантаження $P=\sigma F_0$ і вагу верхньої частини колони $Q=\gamma F_0$, де $\gamma-$питома вага матеріалу. Сумарне навантаження $P+Q=\sigma F_1$,

звідки $F_1 = \dfrac{P+Q}{\sigma} = F_0(1+\dfrac{\gamma}{\sigma})$. Аналогічно знаходимо $F_2 = F_1(1+\dfrac{\gamma}{\sigma}) = F_0\left(1+\dfrac{\gamma}{\sigma}\right)^2, \ldots, F_{n-1} = F_0\left(1+\dfrac{\gamma}{\sigma}\right)^{n-1}$, тобто перерізи $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ утворюють геометричну прогресію, загальний член якої $F_k = F_0\left(1+\dfrac{\gamma}{\sigma}\right)^k$.

При $k \to \infty$, маємо $F(x) = F_0 \exp(\gamma x / \sigma)$.

Розділ 6. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

§ 1. Похідна функції. Правила диференціювання

Нехай задана неперервна на проміжку $[a;b]$ функція $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x \in (a,b)$ та надамо їй приросту Δx. Знайдемо значення функції в точках x та Δx. Їх різниця, а саме $f(x+\Delta x) - f(x)$, є приростом функції в точці x, який позначаємо $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, вважаючи, що вона існує.

Означення. Границя відношення приросту функції до приросту аргументу в даній точці, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається *похідною* функції в точці і позначається

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Операція відшукання похідної функції називається *диференціюванням*.

Геометричний зміст похідної.

Похідна функції в точці x *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції, побудованої в точці* $(x; f(x))$*, з додатним напрямом осі* OX.

Фізичний зміст похідної. Нехай матеріальна точка за час t пройшла шлях $S(t)$, а за час $t + \Delta t$ пройде шлях $S + \Delta S$. Тоді $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = v(t)$ задає миттєву швидкість руху точки

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t), \ v_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad v_{\text{мит}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}.$$

Аналогічно прискорення руху точки $a = v'(t) = S''(t)$. Більш широко − похідна характеризує швидкість зміни функції.

Правила диференціювання

Виведемо шість найважливіших правил диференціювання.

I. Похідна від сталої дорівнює нулю ($C' = 0$).

II. Сталий множник можна винести за знак похідної $(Cu)' = Cu'$.

III. Похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

IV. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі двох добутків: похідної першої функції на другу функцію і першої функції на похідну другої $(uv)' = u'v + v'u$.

V. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого є квадратом даного знаменника, а чисельник – різниця двох добутків: похідної чисельника на знаменник і чисельника на похідну знаменника $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

VI. Нехай $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тоді похідна складеної функції дорівнює

$$y' = f'(u) \cdot u'(x), \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

§ 2. Таблиця похідних

1. $(x^m)' = mx^{m-1}$; $\quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a$; $\quad (e^x)' = e^x$;
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

§ 3. Поняття про похідні вищих порядків

Похідна $f'(x)$ в точці $x \in R$ від функції $f(x)$ називається похідною першого порядку і є деякою новою функцією. Можливо, що ця функція сама теж має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку називається похідною другого порядку, або другою похідною, і позначається $f''(x)$. Отже, $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$.

Аналогічно похідна від похідної другого порядку називається похідною третього порядку і т.д. Отже, похідна n–го порядку визначається за формулою

$$f^{(n)} = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}) = \frac{df^{(n-1)}}{dx} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Наприклад (у нас вже було), $v' = S''(t) = a(t)$ – прискорення.

***Приклад* 1.** Знайти похідну n-го порядку від функції $y = \sin x$.

Розв'язання. Візьмемо кілька похідних, щоб побачити закономірність: $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$; $y^{(IV)} = \sin x$.

Бачимо, що через похідну, кратну чотирьом, повертаємось до вихідної функції. Тому загальна формула для похідної n-го порядку цієї функції має вигляд

$$y^{(n)}=\sin(\frac{\pi}{2}n+x).$$

***Приклад* 2.** Знайти похідну другого порядку від функції, яка задана неявно: $\sqrt{4y+3} - x^2 + 2x - 5 = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини заданої рівності, памятаючи при цьому що y є функцією від x

$$\frac{4y'}{2\sqrt{4y+3}}-2x+2=0, \text{ звідси } y'=(x-1)\sqrt{4y+3}.$$

Знову диференціюємо отриману рівність, маємо:

$$y''=\sqrt{4y+3}+(x-1)\frac{4y'}{2\sqrt{4y+3}}.$$

Замінимо в правій частині y', вже вище знайденим виразом, отримаємо другу похідну $y''=\sqrt{4y+3}+2(x-1)^2$.

Приклад 3. Знайти похідну другого порядку від функції, яка задана параметрично: $x=2\cos^3 t;\ y=6\sin^3 t$.

Розв'язання. Щоб знайти похідну y', знайдемо спочатку диференціали dy і dx, а потім візьмемо їх відношення

$$dy=18\sin^2 t\cos t dt;\quad dx=-6\cos^2 t\sin t dt.$$

Тоді $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{18\sin^2 t\cos t dt}{-6\cos^2 t\sin t dt}=-3\operatorname{tg}t$.

Похідна другого порядку $y''=\dfrac{dy'}{dx}$. Отже, для знаходження y'' треба спочатку знайти диференціал dy':

$$dy'=-\frac{3dt}{\cos^2 t}.$$

Тоді $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{-\dfrac{3dt}{\cos^2 t}}{-6\cos^2 t\sin t dt}=\dfrac{1}{2\cos^4 t\sin t}=\dfrac{1}{\sin 2t\cos^3 t}$.

§ 4. Диференціал функції та його застосування

Виходячи з означення похідної $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ у точці $x\in R$, то можна записати наближену рівність $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\approx y'$, або

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha(x,\Delta x),$$

де $\alpha(x,\Delta x)$ – нескінченно мала величина, при $\Delta x\to 0$

Похідну часто позначають $\frac{dy}{dx}$. Отже, $dy \approx \Delta y,\ dx \approx \Delta x$, якщо вважати, що $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$.

Вираз вигляду $y'\Delta x$ або $y'dx$ називається *диференціалом функції*. Інакше кажучи, диференціал функції – це головна лінійна частина приросту функції.

Враховуючи, що $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, диференціал часто використовують для наближених обчислень. Наприклад, якщо $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, і маємо наближену рівність

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Приклад. Обчислити наближене значення $\sin 46^{\circ}$.

Розв'язання. Нехай $x = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$. Підставимо ці дані у (2), отримаємо:

$$\sin 46^{\circ} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0,7194.$$

Якщо у формулі (2) взяти $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ – мале, то маємо наближену рівність $\sin\alpha \approx \alpha$.

§ 5. Розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Правило Лопіталя

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$ задовольняють умови теореми Коші і дорівнюють нулю при $x = a$: $f(a) = \varphi(a) = 0$.

Відношення $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не визначене при $x = a$, проте є зміст говорити про його границю при $x \to a$.

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$ задовольняють умови теореми Коші і дорівнюють нулю при

$x=a$: $f(a)=\varphi(a)=0$. Тоді існує границя відношення $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to a$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

***Зауваження* 5.** Якщо $f'(a)=\varphi'(a)=0$, то, застосовуючи правило Лопіталя до $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, отримаємо: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ і т.д.

Правило Лопіталя справедливе і для розкриття невизначеностей $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклади:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=\dfrac{1}{1}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^3+x-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-4}{6x^2+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{12x}=\left[\dfrac{6}{\infty}\right]=0.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 6x}{3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}2\sin 6x=0.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}}{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}\sqrt{1-4x^2}}{2}=\dfrac{3}{2}.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{5^x-4^x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3-2^x\ln 2}{5^x\ln 5-4^x\ln 4}=\dfrac{\ln 3-\ln 2}{\ln 5-\ln 4}=\dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}25}.$

§ 6. Дослідження функцій

Зростання та спадання функції

***Теорема* 1.**

1. Якщо диференційована функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ зростає, то її похідна на $[a;b]$ невід'ємна, тобто $f'(x)\ge 0$;

2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на $(a;b)$, причому $f'(x) > 0$, при $a < x < b$, то ця функція зростає на $[a;b]$.

Аналогічно можна показати, що якщо $f(x)$ спадна, то $f'(x) \leq 0$. І навпаки, якщо $f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то $f(x)$ спадає на цьому відрізку.

Геометрично цей факт ми вже бачили, оскільки $y' = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Максимум і мінімум функцій

***Означення* 1**. Говорять, що при значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має *максимум* $f(x_1)$, якщо в деякому (можливо, досить малому) околі точки x_1 виконується нерівність

$$f(x_1) > f(x), \text{ причому } (x \neq x_1).$$

Аналогічно говорять, що при $x = x_2$ $f(x)$ має *мінімум* $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність

$$f(x_2) < f(x) \quad (x \neq x_2).$$

Теорема* 2*. Необхідна умова екстремуму. У точці екстремуму диференційована функція має похідну, яка дорівнює нулеві.

Геометрична ілюстрація. Геометрично, умова $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму дотична до графіка функції паралельна до осі OX.

Те, що $f'(x_0) = 0$, зовсім не означає, що $f(x)$ має екстремум у точці $x = x_0$. Наприклад, $y = x^3$; $y' = 3x^2$ і $y'(0) = 0$. Однак значення $y(0)$ не є екстремумом.

Теорема* 3*. Достатні умови екстремуму. Якщо для деякого значення x_0 похідна $f'(x)$ диференційованої функції $f(x)$ дорівнює нулю і змінює свій знак при переході через це значення, то число $f(x_0)$ є екстремумом функції $f(x)$. При цьому:

1) функція $f(x)$ досягає максимуму при $x = x_0$, якщо похідна в околі точки x_0 змінює свій знак з “+” на “-“;
2) функція $f(x)$ досягає мінімуму при $x = x_0$, якщо похідна в околі точки x_0 змінює свій знак з “-” на “+“.

***Теорема* 4.** Якщо перша похідна $f'(x)$ диференційованої функції $f(x)$ дорівнює нулю в точці x_0, а друга похідна $f''(x)$ існує і $f''(x_0) \neq 0$, то в цій точці функція має екстремум, причому: якщо $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ – мінімум функції; якщо $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ – максимум функції.

Вгнутість і випуклість графіка функції. Точки перегину

Означення 2. Графік диференційованої функції $y = f(x)$ називається *вгнутим вверх* (або *випуклим вниз*), якщо частина кривої $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, розміщена вище від дотичної, проведеної в довільній точці.

Теорема 5. Достатня умова вгнутості (випуклості). Якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;b)$, то графік функції є вгнутим вверх (випуклим вниз) на цьому проміжку. Якщо ж $f''(x) < 0$, $x \in (a;b)$, то графік функції є вгнутим вниз (випуклим вверх) на цьому проміжку (без доведення).

Означення 3. Точкою *перегину* графіка диференційованої функції $y = f(x)$ називається точка, при переході через яку крива змінює свою вгнутість на випуклість і навпаки.

Асимптоти

Означення 4. Пряма A називається *асимптотою* кривої, якщо відстань δ від змінної точки M кривої до цієї прямої, коли M віддаляється на нескінченність, прямує до нуля.

Вертикальні асимптоти. Із означення асимптот випливає, що якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ чи $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$, чи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, і навпаки, якщо пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою*, то виконується одна з виписаних рівностей.

Наприклад, для функції $y = \dfrac{2}{x-5}$ пряма $x = 5$ – вертикальна асимптота, оскільки $\lim\limits_{x \to 5-0} \dfrac{2}{x-5} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 5+0} \dfrac{2}{x-5} = +\infty$.

Похилі асимптоти. Якщо існують скінченні границі $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty}[f(x) - kx]$, то пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою*.

Наприклад, для функції $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$ знайдемо вказані границі $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1$, $b = \lim\limits_{x \to \infty}\left[\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right] = \lim\limits_{x \to \infty}\left[\dfrac{2x - 1}{x}\right] = 2$. Тому пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою графіка заданої функції.

Горизонтальні асимптоти. Якщо існує скінченна границя $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, то пряма $y=b$ є *горизонтальною асимптотою*.

Наприклад, для функції $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$, тому пряма $y=1$ є горизонтальною асимптотою графіка вказаної функції.

Найбільше і найменше значення функції на проміжку

Функція на відрізку $[a;b]$ досягає свого найбільшого значення або на одному з кінців цього відрізка, або у внутрішній точці, яка і є точкою максимуму.

Аналогічно найменше значення функції досягається або на одному з кінців даного відрізка, або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a;b]$, треба:

1) знайти всі точки максимуму (мінімуму) функції на відрізку та значення функції в цих точках;
2) визначити значення функції на кінцях інтервалу $[a;b]$, тобто $f(a)$ і $f(b)$; для напіввідкритого інтервалу $[a;b)$, або $(a;b]$ значення функції знаходимо лише у включеній точці; для відкритого $(a;b)$ інтервалу значення функції на кінцях інтервалу не знаходимо;
3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше (найменше) значення.

***Приклад* 1.** Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-3x+3$ на проміжку $x\in\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки.

$y'=3x^2-3$; $3(x^2-1)=0$; $x_1=1$, $x_2=-1$.

Знайдемо значення функції на кінцях заданого інтервалу та у критичних точках

$$y(-3)=-15,\ y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8},\ y(1)=1,\ y(-1)=5.$$

Серед знайдених значень функції виберемо найменше і найбільше значення $y_{\text{найм.}}=y(-3)=-15$, $y_{\text{найб.}}(-1)=5$.

Текстові задачі на екстремум

Інколи доводиться розв'язувати текстові задачі на знаходження екстремального значення функції, яка описує той чи інший процес.

***Приклад* 2**. Знайти розміри басейну з квадратним дном, який має об’єм $32\,м^3$, щоб на облицювання стін і дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.

Розв’язання. Нехай сторона квадрата дна дорівнює x. Тоді площа дна дорівнює $S_0 = x^2$. Враховуючи те, що об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює $V = S \cdot h$, знайдемо висоту паралелепіпеда $h = \dfrac{32}{x^2}$.
Тоді площа поверхні, яку треба облицювати, дорівнює

$$S = S_0 + 4x \cdot h = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Дослідимо цю функцію на максимум:

$$S' = 2x - \frac{128}{x^2}; \qquad 2x^3 - 128 = 0; \qquad x^3 = 64; \qquad x = 4.$$

У точці $x = 4$ похідна функції змінює знак із “-“ на “+”, це свідчення того, що у цій точці функція досягає мінімуму.

Шукані розміри басейну $4 \times 4 \times 2$.

Радіус та центр кривини кривої

Кривину плоскої кривої $y = f(x)$ обчислюють за формулою

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Якщо лінія задана параметрично $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, то

$$K = \frac{|x_t' y_{tt}'' - x_{tt}'' y_t'|}{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}.$$

У полярних координатах кривина лінії $\rho = f(\varphi)$ обчислюється

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Радіус кривини кривої в точці A визначається як величина обернена до кривини, тобто $R = \dfrac{1}{K}$. Координати центра кривини в точці A знаходяться відповідно за формулами

$$x_C = x_A - \frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''}\Big|_A; \qquad y_C = y_A + \frac{1 + (y')^2}{y''}\Big|_A.$$

***Приклад* 3.** Знайти радіус кривини і координати центра кривини кривої $y = \sqrt{4x+1}$ у точці $A(0;1)$.

Розв'язання. Диференціюємо задану функцію два рази:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}; \qquad y'' = -\frac{4}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці A: $y'(0) = 2$; $y''(0) = -4$.

Тоді радіус кривини $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{|-4|} \approx 2{,}8$. Знайдемо координати центра кривини $C(x_C; y_C)$: $x_C = 0 - \dfrac{2\cdot 5}{-4} = \dfrac{5}{2}$; $\quad y_C = 1 + \dfrac{5}{-4} = -\dfrac{1}{4}$.

Отже, точка $C(2{,}5; -0{,}25)$ – центр кривини заданої кривої у точці A.

§ 7. Загальна схема дослідження функцій. Побудова графіків

Дослідження та побудову графіка функції рекомендують проводити за схемою:

1) знайти область існування функції $D(f)$;
2) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву, якщо вони існують, і знайти односторонні границі в точках розриву;
3) з'ясувати, чи функція парна чи непарна, чи ні парна, ні непарна;
4) знайти точки екстремуму функції і записати інтервали зростання і спадання функції;
5) знайти точки перегину графіка функції і визначити інтервали випуклості та вгнутості графіка;
6) знайти асимптоти графіка функції, якщо вони існують;
7) побудувати графік функції, використовуючи отримані результати; за необхідності можна додатково знаходити точки графіка, надаючи аргументу x ряд значень, та отримати відповідні значення y.

Приклад. Дослідити засобами диференціального числення функцію $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Розглянемо всі пункти відповідно до загальної схеми:

1. Область існування функції $D(f)$:

x може набувати довільних значень, крім $x_1 = 1,\ x_2 = 4$, в яких функція не визначена; $D(f)$: $\quad x \in (-\infty;\infty) \setminus \{1;4\}$.

2. Дана функція є неперервною на всій області свого існування. Точки $x_1 = 1,\ x_2 = 4$ є точками розриву графіка функції. Знайдемо односторонні границі в цих точках:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{(x-1)(x-4)} = \left[\frac{1}{-3\cdot(-0)}\right] = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x}{(x-1)(x-4)} = \left[\frac{1}{-3\cdot(+0)}\right] = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{x}{(x-1)(x-4)} = \left[\frac{4}{3\cdot(-0)}\right] = \left[\frac{4}{-0}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0} \frac{x}{(x-1)(x-4)} = \left[\frac{4}{3\cdot 0}\right] = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty.$$

3. Дослідимо функцію на парність. Знайдемо

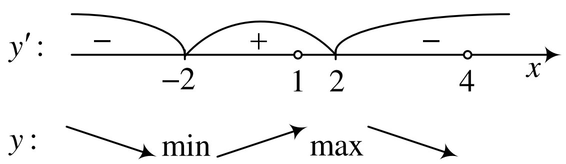
$$f(-x) = \frac{-x}{(-x-1)(-x-4)} = -\frac{x}{(x+1)(x+4)} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}.$$

Отже, функція ні парна, ні непарна.

4. Знайдемо екстремальні точки, тобто точки, де $f'(x) = 0$ і похідна функції змінює знак:

$$y' = \frac{(x-1)(x-4) - x(x^2-5x+4)'}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{x^2-5x+4-x(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+4}{(x-1)^2(x-4)^2}; \quad -x^2+4=0; \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$



При $x \in (-2;2) \setminus \{1\}$ функція зростає; при $x \in (-\infty;-2) \bigcup (2;\infty) \setminus \{4\}$ функція спадає; $y(-2) = \dfrac{-2}{-3\cdot(-6)} = -\dfrac{1}{9}$, $y(2) = \dfrac{2}{1\cdot(-2)} = -1$.

5. Знайдемо точки перегину графіка функції, це точки де $y''=0$, і визначимо інтервали випуклості та вгнутості графіка:

$$y''=\left(\frac{-x^2+4}{(x-1)^2(x-4)^2}\right)'=\frac{-2x(x-1)(x-4)-(4-x^2)[2(x-4)+2(x-1)]}{(x-1)^3(x-4)^3}=$$

$$=\frac{-2x(x^2-5x+4)-(4-x^2)(4x+10)}{(x-1)^3(x-4)^3}=\frac{-2x^3+10x^2-8x-4x+40+4x^3-10x^2}{(x-1)^3(x-4)^3}=$$

$$=\frac{2x^3-12x+40}{(x-1)^3(x-4)^3};$$

$2x^3-12x+40=0,\ x\approx-3,44$ – єдиний дійсний корінь. Крім того, в околі точок x = 1, x = 4 друга похідна змінює знаки, тому в цих точках є перегин графіка. Якщо $x\in(-\infty;-3,44)\bigcup(1;4)$ y''<0 функція є випуклою доверху (вгнутою донизу), якщо ж $x\in(-3,44;\ 1)\bigcup(4;\infty)$ y''> 0 функція є випуклою донизу (вгнутою доверху).

6. Прямі x = 1, x = 4 є вертикальними асимптотами;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-1)(x-4)}=0,\ b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

Отже, похилих асимптот немає, а $y=0$ – горизонтальна асимптота.

7. Побудуємо графік функції, використовуючи отримані дані (рис. 44).

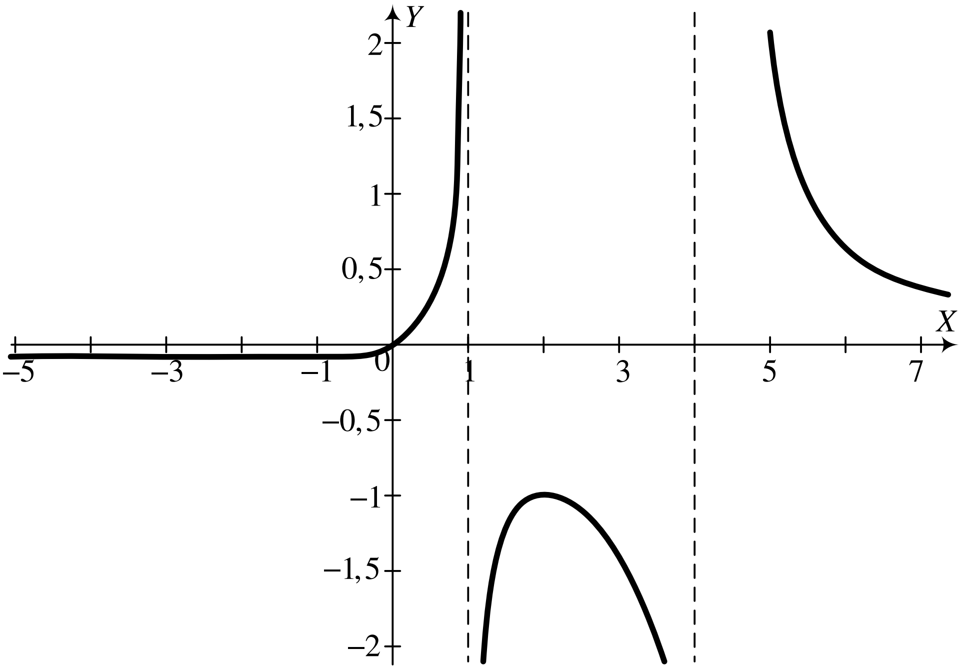


Рис. 44.

§ 8. Деяке застосування похідної в економіці

Наведемо приклади двох граничних показників в мікроекономіці – поняття собівартості та еластичності.

Під *еластичністю* функції $y = f(x)$ розуміємо границю відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$E_x(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \qquad (1)$$

1. Розглянемо залежність собівартості C виробленої продукції від її обсягу Q, тобто $C = f(Q)$. Так звана *гранична собівартість* характеризує приріст собівартості ΔC до приросту продукції ΔQ:

$$C_Г \approx \frac{\Delta C}{\Delta Q}.$$

Вважаючи залежність $\Delta\, C$ від $\Delta\, Q$ неперервною, отримаємо в границі

$$C_{\text{г}} = C'(Q). \qquad (2)$$

***Приклад* 1**. Нехай залежність витрат виробництва від обсягу випущеної продукції виражається формулою $C = 40Q - 0,03Q^3$. Визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції $Q = 15$ ден.од.

Розв'язання. Функція середніх витрат на одиницю продукції визначається за формулою $\overline{C} = C/Q$, або в нашому випадку $\overline{C} = 40 - 0,03Q^2$. Звідси $\overline{C}(15) = 40 - 0,03 \cdot 225 = 33,25$ ден. од.

Згідно з (2), граничні витрати визначаються $C' = 40 - 0,09Q^2$. Звідси $C'(15) = 19,75$ ден. од.

Іншими словами, при середніх витратах на виробництво одиниці продукції в 33,25 ден. од. додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції складуть 19,75 ден. од. і не перевищать середніх затрат.

2. В аналізі і прогнозах цінової політики використовується поняття *еластичності попиту*. Нехай $D = D(P)$ – функція попиту від ціни товару P. Тоді під еластичністю попиту розуміємо відносну зміну попиту при зміні ціни товару на один відсоток:

   $E = \dfrac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}$. При переході до границі, отримаємо:

$$E(D) = P\frac{D'(P)}{D(P)}. \qquad (3)$$

Аналогічне поняття можна ввести і для функції пропозиції $S(P)$. Нагадаємо, що функція $D(P)$ спадає, а функція $S(P)$ зростає із ростом P.

Формулу (3) можна записати так: $E(D) = P(\ln D(P))'$. Отже, функція $E(D)$ має властивості логарифма:

$$E(D_1D_2) = E(D_1) + E(D_2), \qquad E\left(\frac{D_1}{D_2}\right) = E(D_1) - E(D_2).$$

Зауважимо, що оскільки $D(P)$ спадна, то $D'(P) < 0$, а отже, $E(D) < 0$.

Розрізняють три види попиту залежно від величини $|E(D)|$:

а) якщо $|E(D)| > 1$ (або $E(D) < -1$), то попит вважається еластичним;

б) якщо $|E(D)| = 1$ ($E(D) = -1$), то попит нейтральний;

в) якщо $|E(D)| < 1$ ($E(D) > -1$), то попит нееластичний.

***Приклад* 2**. Нехай функція попиту задана формулою $D(P) = D_0 e^{-kP^2}$, де D_0, k – відомі величини.

Знайти, при яких значеннях ціни P попит буде еластичним.

Розв'язання. Згідно з формулою (3) маємо: $E(D) = -2kP^2$.

Щоб попит був еластичним, необхідно, щоб $2kP^2 > 1$. Звідси $P > \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$.

***Приклад* 3.** Знайти зміну виторгу із збільшенням ціни товару при різних варіантах еластичності попиту.

Розв'язання. Виторг $I(P)$ дорівнює добутку ціни товару P на величину попиту:

$$I(P) = P \cdot D(P).$$

Знайдемо похідну цієї функції:

$$I'(P) = D(P) + P \cdot D'(P). \tag{4}$$

Проаналізуємо всі варіанти еластичності попиту з врахуванням формули (3). Нехай:

а) $E(D) < -1$. Тоді, підставляючи (3) в цю нерівність, отримаємо, що права частина (4) від'ємна. Таким чином, при еластичному попиті підвищення ціни P призводить до зниження виторгу. Навпаки, при зниженні ціни на товар – збільшується виторг;

б) $E(D) = -1$. Із формули (3) випливає, що права частина виразу (4) дорівнює нулю. Тобто при нейтральному попиті зміна ціни на товар не впливає на виручку;

в) $E(D) > -1$. Тоді $I'(P) > 0$, тобто при нееластичному попиті підвищення ціни P на товар зумовлює зростання виторгу.

Поняття еластичності поширюється й на інші області економіки. Розглянемо один характерний приклад.

***Приклад* 4**. Нехай залежність між собівартістю продукції C і обсягом виробництва Q задається формулою $C = 50 - 0,4Q$. Визначити еластичність собівартості при випуску продукції $Q = 15$ од. на день.

Розв'язання. За формулою (2) знаходимо

$$E(C) = -\frac{0,4Q}{50-0,4Q}.$$

Звідси при $Q = 15$ маємо еластичність $E(C) \approx -0,14$. Тобто при даному обсязі випуску продукції збільшення його на 1% забезпечує зниження собівартості приблизно на $0,14\%$.

Отримання максимального прибутку

Нехай Q – кількість реалізованого товару, $R(Q)$ – функція доходу, $C(Q)$ – функція затрат на виробництво товару. Вигляд цих функції залежить від способу виробництва, організації інфраструктури і т. д. Прибуток від реалізації товару дорівнює

$$\varPi(Q) = R(Q) - C(Q). \quad (5)$$

У мікроекономіці відоме твердження: для того щоб прибуток від реалізації товару був максимальний, необхідно, щоб граничний дохід і граничні витрати були рівні. Цей принцип можна записати так:

$R'(Q) = C'(Q)$.

Дійсно, тоді $\varPi'(Q) = 0$, звідси й отримується основний принцип.

***Приклад* 5.** Знайти максимальний прибуток, якщо відома функція доходу $R(Q) = 100Q - Q^2$ та функція затрат $C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000$.

Розв'язання. Згідно з (5) прибуток дорівнює $\varPi(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000$. Прирівнюючи похідну до нуля, отримаємо рівняння $Q^2 - 24Q + 23 = 0$.

Корені цього рівняння $Q_1 = 1$, $Q_2 = 23$. Перевірка показує, що максимум функції $\varPi(Q)$ досягається при $Q_2 = 23$. Тоді $\varPi_{\max} = 1290$.

Оптимізація оподаткування підприємств

Нехай t – податок на одиницю випущеної продукції. Тоді загальний податок з Q одиниць продукції $T = t \cdot Q$. Функція прибутку має вигляд

$$\varPi(Q) = R(Q) - C(Q) - t \cdot Q. \quad (6)$$

Виникає питання: який має бути податок t, щоб сумарний податок T зі всієї продукції був найбільший?

***Приклад* 6**. Нехай $R(Q) = 16Q - Q^2$, $C(Q) = Q^2 + 1$. Тоді функція прибутку має такий вигляд:

$\varPi(Q) = 16Q - 2Q^2 - t \cdot Q - 1$.

Дослідимо функцію $\Pi(Q)$ на максимум. Знайдемо Q, при якому $\Pi'(Q)=0$. Маємо $\Pi'(Q)=16-4Q-t$.

З рівняння $16-4Q-t=0$ знаходимо $Q_{opt}=4-\frac{t}{4}$. Отже, $T=tQ=t\left(4-\frac{t}{4}\right)$. З рівняння $T'=0$ маємо критичну точку $t=8$, в якій функція T досягає максимуму. Остаточно $Q_{opt}=2, \quad \Pi_{\max}=7, \quad T_{opt}=16$.

Порівняємо отримані результати. При $t=0$ розв'язок задачі на максимальний прибуток дає $Q_{opt}=4, \quad \Pi_{\max}=31$.

Отже, зменшення оподаткування стимулює ріст випуску продукції і сприяє збільшенню прибутку від реалізації.

Тому, для отримання максимального прибутку, виробники прикладають різні зусилля, щоб знизити рівень податку.

Закон зменшення ефективності виробництва

Цей закон стверджує, що при збільшенні одного з основних чинників виробництва, наприклад капітальних затрат K, приріст виробництва, починаючи з деякого значення K_{opt}, є спадна функція. Іншими словами, обсяг виготовленої продукції V як функції від K описується графіком зі зміною випуклості вниз на випуклість вверх.

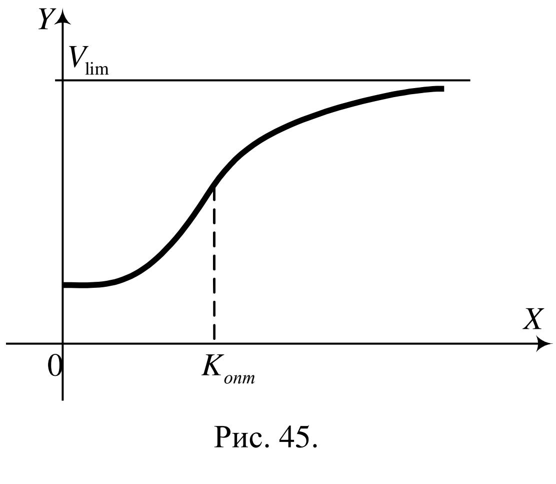


Рис. 45.

Характерний вигляд цієї функції

$$V(K)=\frac{V_{\lim}}{1+a\exp(-bk+c)}, \quad (7)$$

де a, b, c – відомі числа, що визначаються структурою організації виробництва.

З допомогою другої похідної визначають точку перегину графіка функції (7).

З умови $V''(K)=0$,

знаходимо $K_{opm} = \dfrac{c + \ln a}{b}$.

При $K > K_{opt}$ приріст обсягу виробленої продукції знижується, тобто $V''(K) < 0$, і ефективність капіталовкладень спадає (див. рис. 45).

Знаючи цей прогноз, можна постаратися вдосконалити структуру виробництва (регулюючи a, b, c в бік підвищення ефективності капіталовкладень).

Вправи

Завдання* 1. *Знайти похідні функцій:

1) $y = x^3 + x^2 + x - 1$;
2) $y = ax^3 + bx + c$;
3) $y = \dfrac{a}{x\sqrt{x}} + \dfrac{b}{x^5} - \dfrac{c}{x^2\sqrt{x}}$;
4) $y = \dfrac{3x}{\sin x}$;
5) $y = 4x^{12} - x^{-5}$;
6) $y = \dfrac{\ln a}{x^2}$;
7) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$;
8) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x^2}$;
9) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 7}$;
10) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$;
11) $y = \operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x$;
12) $y = (x^2 - 7x + 8)e^x$;
13) $y = \ln x^3 - \dfrac{9}{x} - \dfrac{27}{2x^2}$;
14) $y = (3x - 7)^{10}$;
15) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^{12}$;
16) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}}$;
17) $y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$;
18) $y = \operatorname{ctg} x^2 - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x$;
19) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$;
20) $y = \operatorname{arcctg} 2^x$;

21) $y=\log_{\frac{3}{2}}(2x+3)^2$; 22) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)$;

23) $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$; 24) $y=x^2\sqrt{a^2+x^4}+a^2\ln(x^2+\sqrt{a^2+x^4})$;

25) $y=\ln\ln\ln x^2$; 26) $y=\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos^2 x$;

27) $y=\operatorname{arctg}\ e^{x/2}-\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}$; 28) $y=\dfrac{1}{\sin^4 x+1}+\ln\dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x+1}$;

29) $y=x^{x^2}$; 30) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Завдання 2. Визначити інтервали зростання і спадання функцій:

1) $y=x^2-2x+3$; 2) $y=x^3+3x^2+3x$; 3) $y=x^3-3x+1$;

4) $y=-2x^3+15x^2-24x+1$; 5) $y=\dfrac{x}{x-2}$; 6) $y=2x^2-\ln x$; 7) $y=x+\sin x$;

8) $y=x^2\cdot e^{-x}$; 9) $y=1+\sqrt[3]{5-x}$; 10) $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

Завдання 3. Дослідити на екстремум функції:

1) $y=2x^2-4x+5$; 2) $y=x^3+\dfrac{9x^2}{2}-5$; 3) $y=3+2x^2-x^4$; 4) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$;

5) $y=3x-\dfrac{27}{2-x}$; 6) $y=\left(x^2-4\right)\sqrt[3]{x^2}$; 7) $y=\sqrt{e^{x^2}+8}$; 8) $y=2e^x+e^{-x}$; 9) $y=\dfrac{x}{\ln x}$;

10) $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$; 11) $y=x-\operatorname{arctg} x$; 12) $y=x-\operatorname{arctg} 2x$.

Завдання 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$:

1) $y=x^2-6x+5,$ на відрізку $[1;\ 6]$;

2) $y=x^3-9x^2+24x-10,$ на відрізку $[0;\ 3]$;

3) $y=x^5-5x^4+5x^3+3,$ на відрізку $[-1;\ 2]$;

4) $y=\dfrac{x+1}{x^2+3},$ на відрізку $[0;\ 3]$;

5) $y=\dfrac{x-3}{x^2+16}$, на відрізку $[-5;\ 5]$;

6) $y=x+\sqrt{x}$, на відрізку $[0;\ 4]$;

7) $y=\cos 2x+2x$, на відрізку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

8) $y=x-2\cdot\sin x$, на відрізку $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

9) $y=\operatorname{tg} x-x$, на відрізку $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right]$;

10) $y=e^{2x}-e^{-2x}$, на відрізку $[-2;\ 1]$.

Завдання 5. Текстові (прикладні) задачі на екстремум функції

1. Консервна банка має циліндричну форму. Знайти найзручніші розміри банки (визначити відношення діаметра основи до висоти циліндра), що має при заданій повній поверхні найбільший об'єм.
2. З круглого листа вирізають сектор і згортають його в конічну лійку. Яким має бути кут сектора, щоб лійка мала найбільший об'єм?
3. Потрібно загородити прямокутну ділянку землі площею 294 м^2 і потім поділити цю ділянку парканом на дві рівні частини. При яких лінійних розмірах ділянки довжина всього паркану виявиться найменшою?
4. Визначити довжини сторін прямокутника найбільшої площі, вписаного в прямокутну трапецію з довжинами основ 24 і 8 см і довжиною висоти 12см (дві вершини прямокутника лежать на бічних сторонах трапеції, а дві інші – на її більшій основі).
5. Вікно має форму прямокутника, який зверху закінчується півкругом. Яким має бути радіус R півкола, щоб при заданому периметрі p вікно мало найбільшу площу?
6. Напруга в деякому ланцюгу спадає рівномірно за лінійним законом. На початку досліду напруга була 16В, а через 5с знизилась до 10В. Знайти напругу U як функцію часу t. Через який проміжок часу напруга знизиться до 7,6 В?
7. Дві сторони трикутника відповідно рівні 5 і 8 см, а кут між ними x. Знайти площу трикутника як функцію кута x і те його значення, при якому площа трикутника буде найбільшою.

8. Визначити, яким має бути опір r електронагрівного приладу, ввімкненого в коло струму опору R, для того, щоб у ньому виділялась максимальна кількість теплоти, якщо $Q = \frac{rE^2}{(r+R)^2}$.
9. Витрати електропровідника на кілометр визначаються функцією $L = Ar + \frac{B}{r}$, де r – опір (ом); A і B – сталі. При якому опорі провідник буде найекономічнішим?
10. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?
11. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точку $A(1;2)$ і відтинає від першого координатного кута трикутник найменшої площі.
12. Завод A треба сполучити шосейною дорогою з прямолінійною залізничною колією, на якій розміщене селище B. Відстань AC від заводу до залізниці дорівнює a, а відстань BC залізницею – b. Вартість перевезення вантажів шосейною дорогою в k разів більша, ніж перевезення залізничною колією. У яку точку D відрізка BC треба провести шосейну дорогу від заводу, щоб вартість перевезення вантажів від заводу A до селища B була найменша?
13. Канал, ширина якого 27дм, під прямим кутом впадає в другий канал завширшки 64дм. Якої найбільшої ширини стовбур можна сплавити цією системою каналів?
14. Пішоходові треба дістатися з пункту A, розміщеного на шосе, до пункту B, розміщеного за 12км від шосе. Відстань $AB = 20$ км. На якому кілометрі шосе пішохід має звернути із шосе на цілину, щоб дійти найшвидше до пункту B, якщо його швидкість на шосе 6км/год, а на цілині 3км/год?
15. Об'єм газів, що виділяється з топки котла в димову трубу внаслідок тяги, можна виразити формулою $V = \sqrt{\frac{T_0}{T} - \frac{T_0^2}{T^2}}$, де T_0 – абсолютна температура повітря поза трубою; T – середня температура в трубі. За якого значення T тяга буде найбільшою?
16. Три пункти А, В, і С розміщені так, що $\angle ABC = 60^o$. Одночасно виїжджають з пункту А автомобіль і з пункту В – поїзд. Автомобіль

рухається до пункту B зі швидкістю 80км/год, поїзд – до пункту C зі швидкістю 50км/год. В який момент часу (від початку руху) відстань між поїздом і автомобілем буде найменшою, якщо відстань $AB = 200$ км?

17. Верхній кінець драбини, яка має довжину $6\,м$ ковзає по вертикальній стіні. Знайти відношення швидкостей верхнього і нижнього кінців драбини, коли вона утворює зі стіною кут 60^o.
18. Опір на згин балки прямокутного поперечного перерізу пропорціональний добутку ширини цього перерізу на квадрат його висоти. Які мають бути розміри перерізу балки, яка вирізана із круглої колоди з діаметром d, щоб її опір на згин був найбільший, тобто щоб балка була найміцнішою?
19. Балка прямокутного перерізу ($x, y -$ розміри перерізу) з вільно опертими кінцями рівномірно навантажена по всій довжині. Стріла її прогину обернено пропорційна моменту інерції $I = (xy^3)/12$ перерізу балки. Визначити розміри перерізу балки за найменшої стріли прогину (балка найбільшої жорсткості), якщо вона вирізана з круглої колоди, що має діаметр d.

Завдання 6. Дослідити вказані функції і побудувати їх графіки:

1) $y = \dfrac{x^3}{6} - 2x$; 2) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$; 3) $y = \dfrac{x}{9} \cdot \left(x-4\right)^3$; 4) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; 5) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$;

6) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 7) $y = \ln\left(x^2+1\right)$; 8) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 9) $y = x^2 \cdot e^{-x}$; 10) $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$;

11) $y = \dfrac{x-1}{(x-2)(x-5)}$; 12) $y = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$; 13) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; 14) $y = \dfrac{(x-2)^2}{2(x-1)}$.

Завдання 7. Знайти похідні функцій, які задані неявно або параметрично:

1) $xy + x + y = 1$; 2) $y = x\sin y$; 3) $\sin(x+y) = x$; 4); $x^2 + y^2 = xy$; 5) $xy = \sin y$;

6) $y^5 + y^3 + y - x = 0$; 7) $(2a-x)y^2 = x^3$; 8) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$; 11) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t^3+1} \end{cases}$; 12) $\begin{cases} x = \ln\sin\dfrac{t}{2} \\ y = \ln\sin t \end{cases}$.

Завдання 8. Знайти границі користуючись правилом Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^2 - x^5}{4x - x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x - 1}{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x - a^b}{x - b}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} + 3x^2 - 1}{3x - \mathrm{tg}^3 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}x - 1}{\sin 4x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+2x)}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{x^5 + 3x^2 - 2x - 2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2} - 1}{\sin^2 2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)\mathrm{tg}x$; 12*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)}{\ln\sin(1-x)}$; 14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\sin(x-1)}\right)$.

Завдання 9. Знайти кривини (або радіус кривини) ліній:

1) $y = x^4 - 8x^3 + 20x - 12$ в точці $(1;1)$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ у вершинах;

3) $x^2 - y^2 = 1$ у точці $(\sqrt{5}:2)$;

4) $y = \ln(1 + x^2)$;

5) $x = 6\cos t - 3\cos 2t,\quad y = 6\sin t - 3\sin 2t$ при $t = \dfrac{\pi}{3}$;

6) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ при $\varphi = 60^0$.

Завдання 10. Задачі підвищеної трудності

1. Втрати енергії за одиницю часу при нагріванні трансформатора $V \approx ri^2 + V_0\left(\dfrac{e}{e_0}\right)^{1,6}$, де r – внутрішній опір обмотки, V_0 – втрати в сердечнику при зовнішній напрузі e_0; e – внутрішня напруга. При якій напрузі потужність $P = f(e) = ei$, яку віддає трансформатор, найбільша?

2. Висота підйому y вантажу x людиною виражається співвідношенням $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$ де a і $b-$сталі. Знайти, при якій вазі вантажу x мускули людини виконують найбільшу роботу.
3. Маємо балку прямокутного перерізу, з основою a і висотою h. Яка сперта на кінцях і рівномірно навантажена. Граничне навантаження, яке вона витримує, пропорційне ah^2, а стріла прогину – обернено пропорційна ah^3. Потрібно із круглого бруса, діаметром d вирізати балку: 1)найбільшої міцності; 2) з найменшою стрілою прогину (найбільшої жорсткості).
4. Якщо до активного двополюсника під'єднати навантаження R, то через нього проходить струм $I=\frac{U_{вх}}{R+R_{вх}}$ і в ньому виділяється потужність $P=I^2R$. Яким має бути відношення між опором навантаження R і вхідним опором двополюсника $R_{вх}$, щоб в опорі навантаження виділялась максимальна потужність?

Відповіді

До завдання 1

1) $y'=3x^2+2x+1$; 2) $y'=3ax^2+b$; 3) $y'=\frac{5c}{2x^3\sqrt{x}}-\frac{3a}{2x^2\sqrt{x}}-\frac{5b}{x^6}$;

4) $y'=\frac{3(\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x}$; 5) $y'=48x^{11}-\frac{5}{x^6}$; 6) $y'=-\frac{2\ln a}{x^3}$; 7) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

8) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{7\sqrt[3]{x^5}}$; 9) $y'=\frac{6x^2+2x-41}{(x^2+x+7)^2}$; 10) $y'=\frac{2}{1-\sin 2x}$; 11) $y'=1$;

12) $y'=e^x(x^2-5x+1)$; 13) $y'=\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{27}{x^3}$; 14) $y'=30(3x-7)^9$;

15) $y'=6\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^{11}\cdot\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$; 16) $y'=\frac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$;

17) $y'=\frac{1+4\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 18) $y'=-2\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}\right)$;

19) $y'=-\cos 2x$; 20) $y'=-\frac{2^x\ln 2}{2^{2x}+1}$; 21) $y'=\frac{12}{\ln 2}\cdot\frac{\log_2^2(2x+3)^2}{2x+3}$; 22) $y'=\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$;

23) $y'=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$; 24) $y'=4x\sqrt{a^2+x^4}$; 25) $y'=\dfrac{2}{x\ln x^2\ln\ln x^2}, x>e$;

26) $y'=2\mathrm{tg}^3 x$; 27) $y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{0,5x}-1}{e^x+1}$; 28) $y'=\dfrac{4\mathrm{ctg}x}{(\sin^4 x+1)^2}$; 29) $y'=x^{1+x^2}(1+2\ln x)$;

30) $y'=\dfrac{20}{x^4+x^2-6}$.

До завдання 2

1) $\begin{matrix}(-\infty;\ 1)-\textit{спадає}\\ (1;\ +\infty)-\textit{зростає}\end{matrix}$; 2) $(-\infty;\ +\infty)-\textit{зростає}$;

3) $\begin{matrix}(-\infty;\ 1)\ \cup\ (1;\ +\infty)-\textit{зростає}\\ (-1;\ 1)-\textit{спадає}\end{matrix}$; 4) $\begin{matrix}(-1;\ 4)-\textit{зростає}\\ (-\infty;\ 1)\ \cup\ (4;\ +\infty)-\textit{спадає}\end{matrix}$;

5) $(-\infty;\ 2)\ \cup\ (2;\ +\infty)-\textit{спадає}$; 6) $\begin{matrix}(0;\ 0,5)-\textit{спадає}\\ (0,5;\ +\infty)-\textit{зростає}\end{matrix}$;

7) $(-\infty;\ +\infty)-\textit{зростає}$; 8) $\begin{matrix}(-\infty;\ 0)\ \cup\ (2;\ +\infty)-\textit{спадає}\\ (0;2)-\textit{зростає}\end{matrix}$;

9) $(-\infty;\ +\infty)-\textit{спадає}$; 10) $\begin{matrix}(0;\ 2)-\textit{спадає}\\ (-\infty;\ 0)\ \cup\ (2;\ +\infty)-\textit{зростає}.\end{matrix}$

До завдання 3

1) $y_{\min}=y(1)=3$;

2) $y_{\min}=y(0)=-5,\ y_{\max}=y(-3)=\dfrac{17}{2}$;

3) $y_{\min}=y(0)=3,\ y_{\max}=y(1)=y(-1)=4$;

4) $y_{\min}=y(-2)=-1,\ y_{\max}=y(2)=1$;

5) $y_{\min}=y(5)=24,\ y_{\max}=y(-1)=-12$;

6) $y_{\min}=y(\pm1)=-3,\ y_{\max}=y(0)=0$;

7) $y_{\min}=y(0)=3$;

8) $y_{\min}=2\sqrt{2}$ при $x=-\dfrac{\ln 2}{2}$;

9) $y_{\min} = y(e) = e$;

10) $y_{\min} = y(1) = 1$;

11) *екстремуму немає*;

12) $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2-\pi}{4}$, $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi-2}{4}$.

***До завдання* 4**

1) $y_{\text{найб.}} = y(6) = 5,\ y_{\text{найм.}} = y(3) = -4$;

2) $y_{\text{найб.}} = y(2) = 10,\ y_{\text{найм.}} = y(0) = -10$;

3) $y_{\text{найб.}} = y(1) = 4,\ y_{\text{найм.}} = y(-1) = -8$;

4) $y_{\text{найб.}} = y(1) = \frac{1}{2},\ y_{\text{найм.}} = y(0) = y(3) = \frac{1}{3}$;

5) $y_{\text{найб.}} = y(5) = \frac{2}{41},\ y_{\text{найм.}} = y(-2) = -\frac{1}{4}$;

6) $y_{\text{найб.}} = y(4) = 6,\ y_{\text{найм.}} = y(0) = 0$;

7) $y_{\text{найб.}} = y(\frac{\pi}{2}) = \pi - 1,\ y_{\text{найм.}} = y(-\frac{\pi}{2}) = -\pi - 1$;

8) $y_{\text{найб.}} = y(0) = 0,\ y_{\text{найм.}} = y(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$;

9) $y_{\text{найб.}} = y(\frac{\pi}{4}) = \frac{4-\pi}{4},\ y_{\text{найм.}} = y(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi-4}{4}$;

10) $y_{\text{найб.}} = y(1) = e^2 - e^{-2},\ y_{\text{найм.}} = y(-2) = e^{-4} - e^4$.

***До завдання* 5**

1) 1; 2) $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$; 3) 14×21 м; 4) 12 і 9 см; 5) $\frac{p}{\pi+4}$; 8) $R = r$;

10) $\alpha = 120^o$; 11) -2; 12) $BD = b - \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$, якщо $b > \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$; $BD = 0$, якщо $b \le \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$; 13) 125дм; 14) Приблизно на 9км; 15) $T = 2T_0$;

16) $1\dfrac{27}{43}$ год. 17) $\dfrac{x'_t}{y'_t}=-\sqrt{3}.$ 18) Ширина $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$, висота $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}d$. 19) Ширина $x=\dfrac{d}{2}$, висота $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}d.$

***До завдання* 6**

1) $y_{\max}=y(-2)=\dfrac{8}{3};\ y_{\min}=y(2)=-\dfrac{8}{3}, P(0;\ 0)-$ точка перегину;

2) $y_{\min}=y(-2)=(2)=-4;\ y_{\max}=y(0)=0, P_1\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};-\dfrac{20}{9}\right);$
і $P_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};-\dfrac{20}{9}\right)-$ точки перегину;

3) $y_{\min}=y(1)=-3; P_1\left(2;\ -\dfrac{16}{9}\right)$ і P_2 $(4;\ 0)-$ точки перегину;

4) $y_{\max}=y(1)=\dfrac{1}{2};\ y_{\min}=y(-1)=-\dfrac{1}{2};$

5) $y_{\min}=y(2\sqrt{3})=3\sqrt{3};\ y_{\max}=y(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}, P(0;\ 0)-$ точка перегину;
$x=-2;\ x=2;\ y=x-$ асимптоти;

6) Точок екстремуму нема, $P_1(0;\ 1),\ P_2(1;\ 0)$ –точки перегину;
$y=-x-$ асимптота;

7) $y_{\min}=y(0)=0, P_1(-1;\ \ln 2),\ P_2(1;\ \ln 2)-$ точки перегину;

8) $y_{\max}=y(e)=\dfrac{1}{e};\ y=0-$ асимптота, $P\left(e^{\frac{3}{2}};\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)-$ точка перегину;

9) $y_{\min}=y(0)=0;\ y_{\max}=y(2)=4e^{-2}, x=0-$ асимптота,
точка перегину при $x=2\pm\sqrt{2};$

10) $y_{\max}=y(-1);\ y_{\min}=y(1),\ P(0;\ 0)-$ точка перегину,
$y=x+\pi,\ y=x-\pi-$ асимптоти;

11) $y_{\min}=y(-1)=-\dfrac{1}{9}; y_{\max}=(3)=-1, x=2; x=5; y=0-$ асимптоти;

12) $y_{\min}=y(3)=0;\ y_{\max}=y(1)=2,\quad y=1-$ асимптота;

13) $y_{\min}=y(3)=\dfrac{27}{4};\quad x=1,\ y=x+2-$ асимптоти;

14) $y_{\min} = y(2) = 0; y_{\max} = y(0) = -2, \quad y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}; x = 1 -$ асимптоти.

***До завдання* 7**

1) $y' = -\frac{y+1}{x+1}$; 2) $y' = \frac{\sin y}{1 - x\cos y}$; 3) $y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$; 4) $y' = \frac{y-2x}{2y-x}$;

5) $y' = \frac{y}{\cos y - x}$; 6) $y' = \frac{1}{5y^4 + 3y^2 + 1}$; 7) $y' = \frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}$; 8) $y' = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$;

9) $y' = -\operatorname{tg} t$; 10) $y' = \operatorname{ctg}\frac{\mathrm{t}}{2}$; 11) $y' = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; 12) $y' = \frac{2\cos t}{1+\cos t}$.

***До завдання* 8**

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\ln 5$; 3) $a^b \ln a$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\ln 2$; 7) $\frac{1}{9}$; 8) $\frac{3}{4}$; 9) $\frac{a^2}{b^2}$;

10) $\frac{1}{2}$; 11) 2; 12) $e\sqrt{e}$; 13) 1; 14) 0.

***До завдання* 9**

1) 36; 2) $\frac{a}{b^2}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{2a}$.

***До завдання* 10**

1) $e = e_0\left(\frac{V}{1{,}8V_0}\right)^{\frac{5}{8}}$; 2) $x = 0{,}5a$; 3) 1. $a = d/\sqrt{3}$; 2. $a = 0{,}5d$.

4) $P = \frac{U_{вх}^2 R}{(R + R_{вх})^2}$; $P_{\max} = \frac{U_{вх}}{4R_{вх}}$, при $R = R_{вх}$.

Розділ 7. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. Частинні похідні першого порядку. Повний диференціал

Часто виникають ситуації, особливо у сфері виробництва, коли певна величина залежить від кількох параметрів (незалежних змінних). Тоді розглядають цю величину (функцію), як функцію кількох змінних.

***Означення* 1.** Якщо кожній парі чисел $(x;y)$ з площини XOY за деяким правилом (законом) ставиться у відповідність величина z, то кажуть, що z є функція незалежних змінних x і y з області визначення D:

$$z = f(x;y).$$

***Означення* 2.** Сукупність пар $(x;y)$, для яких визначена функція $z = f(x;y)$, називають *областю визначення* функції (множина D) (рис. 71).

***Приклад* 1.** Знайти область існування функції $z = \sqrt{x-y}$.

Розв'язання. Функція z приймає дійсні значення при $x - y \ge 0$, тобто при $x \ge y$. Точки площини XOY, які задовольняють умову $x = y$ лежать на бісектрисі координатного кута, а точки, які задовольняють умову $x > y$, лежать правіше від цієї бісектриси. Отже область існування функції – бісектриса координатного кута і та частина площини XOY, яка розміщена правіше від цієї бісектриси.

Функція $z = f(x;y)$ описує поверхню в просторі.

Можна розглядати функцію n змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причому всі змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ – незалежні між собою. Тоді областю визначення цієї функції буде $n-$мірна область у $n-$мірному просторі. Часто розглядають функцію трьох змінних $u = f(x,y,z)$. В цьому випадку областю визначення є множина точок тривимірного простору.

Число A є границею функції $f(x,y)$ при (x,y) прямуючих до точки (x_0, y_0), якщо кожній послідовності точок $\{(x_n, y_n)\}$, відмінних від (x_0, y_0) і прямуючих до точки (x_0, y_0) границя $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A$. Це позначають:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Якщо змінна x отримає приріст Δx, а змінна y приріст Δy, то різниця $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta z$ називається ***повним приростом функції*** z.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** $M_0(x_0, y_0)$, якщо нескінченно малим приростам аргументів Δx і Δy відповідає нескінченно малий приріст функції Δz.

Означення 3. *Частинною похідною* за змінною x від функції $z = f(x, y)$ в точці $(x, y) \in R$ називають границю відношення частинного приросту $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y)$ до приросту Δx, якщо вона існує, при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial f}{\partial x}$, або z'_x, f'_x.

Аналогічно, частинна похідна за змінною y від функції z в точці $(x, y) \in R$ визначається так:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$, якщо така границя існує.

Зауважимо, що $\Delta_x z$ визначається при сталому y, а $\Delta_y z$ – при сталому x. Тому означення частинних похідних можна сформулювати так: *частинною похідною* по x від функції $z = f(x; y)$ називається похідна по x у припущенні, що $y = \text{const}$; *частинною похідною* по y від функції $z = f(x; y)$ називається похідна по y в припущенні, що $x = \text{const}$.

Наприклад, для функції $z = x^2 \sin y$ частинні похідні дорівнюють

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y .$$

Якщо dx, dy – диференціали незалежних змінних, то для неперервно-диференційованої функції ***повний диференціал*** функції z двох змінних дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Аналогічно визначається повний диференціал функції довільної кількості змінних, наприклад, для трьох змінних $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Приклад 2. Знайти повний диференціал і повний приріст функції $z = xy$ в точці $A(2;3)$ при $\Delta x = 0,1;\ \Delta y = 0,2$.

Розв'язання. Знайдемо $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$.

Тоді $\Delta z \approx 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,3 + 0,4 = 0,7$.

Якщо, наприклад, x – врожайність культури, y – площа посіву, то $z = xy$ – валовий збір, ydx – площа на приріст врожайності, xdy – врожайність на приріст площі. Отже, $dz = xdy + ydx$ дає приріст валового збору врожаю.

Розглянемо застосування повного диференціала функції для наближених обчислень. Відомо, що повний приріст функції знаходимо за формулою

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо прирости Δx і Δy малі за абсолютною величиною, то $\Delta z \approx dz$. Отже

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz, \text{ або}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx dz + f(x, y).$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M_1(x_1, y_1)$. Тоді

$$f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) \approx f(x_1, y_1) + \left[dz\right]_{M_1}.$$

Нехай $x_2 = x_1 + \Delta x$, і $y_2 = y_1 + \Delta y$, то отримаємо формулу для наближеного обчислення значення функції в точці $M_2(x_2, y_2)$ знаючи її точне значення в близькій до неї точці $M_1(x_1, y_1)$ та значення повного диференціала

$$f(x_2, y_2) \approx f(x_1, y_1) + \left[dz\right]_{M_1}.$$

Приклад 3. У зрізаному конусі радіус нижньої основи $R = 20$ м, радіус верхньої основи $r = 10$ м, висота $h = 30$ м. Як зміниться об'єм конуса, якщо радіус R збільшити на 4 дм, радіус r зменшити на 2 дм, а висоту h зменшити на 3 дм?

Розв'язання. Відомо, що об'єм зрізаного конуса обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi\, h\,(R^2 + r^2 + Rr)\,.$$

Зміна об'єму конуса дорівнює повному приросту ΔV, який замінимо повним диференціалом dV

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\,.$$

$$dV = \frac{1}{3}\pi h(2R + r)\cdot\Delta R + \frac{1}{3}\pi h(2r + R)\cdot\Delta r + \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)\cdot\Delta h.$$

За умовою $\Delta R = 0,4$ м, $\Delta r = -0,2$ м, $\Delta h = -0,3$ м, отже

$$dV = \frac{1}{3}\pi\cdot 30(40 + 10)\cdot 0,4 + \frac{1}{3}\pi\cdot 30(20+20)\cdot(-0,2)+$$

$$+\frac{1}{3}\pi(400+100+200)\cdot(-0,3) = 50\pi \text{ м}^3.$$

Таким чином, об'єм конуса збільшиться приблизно на 50π м^3, тобто на 157м^3.

§ 2. Диференціювання складеної та неявно заданої функцій

Нехай $z = f(x; y)$ – функція двох змінних x та y, кожна із яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної t, тобто $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$. Тоді $z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ є складена функція від незалежної змінної t. Якщо функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ диференційовані в точці t, а функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці (x, y), то складена функція $z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ теж диференційована в точці t і її похідна $\frac{dz}{dt}$ знаходиться за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\,. \tag{1}$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,. \tag{2}$$

***Приклад* 1.** Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = \ln(x^2 + y^3) - 3z$, якщо $x = t^3$, $y = t^2$, $z = e^t$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (2), маємо:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^3} 3t^2 + \frac{3y^2}{x^2 + y^3} 2t - 3e^t .$$

Замінюючи x, y, z їх вирази через t, отримаємо:

$$\frac{du}{dt} = \frac{6t^5}{t^6 + t^6} + \frac{6t^5}{t^6 + t^6} - 3e^t = \frac{6}{t} - 3e^t .$$

Нехай змінні x та y пов'язані рівнянням

$$F(x, y) = 0. \qquad (3)$$

Візьмемо від обох частин (3) похідну, як від складеної функції $(t = x)$ в (1)

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Так як похідна правої частини (3) дорівнює нулю, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 .$$

Звідси маємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y} . \qquad (4)$$

Формула (4) виражає правило диференціювання неявної функції y за змінною x.

***Приклад* 2.** Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ неявно заданої функції

$$2x^2 + y^2 - xy + 6y - 3x + 1 = 0 .$$

Розв'язання. Згідно умови $F(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy + 6y - 3x + 1$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - y - 3; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x + 6 .$$

Тоді, згідно (4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x-y-3}{2y-x+6}$.

§ 3. Похідна за напрямом та градієнт функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в деякій області D, а вектор $\overrightarrow{MM_1} = \vec{l}$ утворює з віссю OX кут α, а з віссю OY кут β. Приріст $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ визначаються $\cos\alpha = \dfrac{\Delta x}{\Delta l}$, $\cos\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta l}$. Легко бачити, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Тоді ***похідна функції*** $z = f(x, y)$ ***за напрямом*** $\vec{l}$ визначається

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{1}$$

Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ похідна за напрямом $\vec{l}$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2}$$

Аналогічно тут $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

***Приклад* 1.** Задана функція $u = x^2 + y^2 + z^2$**.** Знайти похідну $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ в точці $A(1,2,3)$ у напрямку вектора $\overrightarrow{AB}$, де $B(2,4,1)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{l}$ та його напрямні косинуси $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

За формулою (2) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2x\cdot\cos\alpha + 2y\cdot\cos\beta + 2z\cdot\cos\gamma.$$

В точці A отримаємо похідну за напрямом $\vec{l}$:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right]_A = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 2\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}.$$

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називається вектор на площині XOY, який має проекції $\frac{\partial z}{\partial x}$ на осі OX і $\frac{\partial z}{\partial y}$ на осі OY. Градієнт функції в точці M_0 визначається

$$\overrightarrow{grad\ z} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\vec{j}. \qquad (2)$$

Градієнт функції в точці M_0 – це вектор $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\right)$ який вказує напрям найшвидшого зростання функції.

Градієнт функції трьох змінних має вигляд

$$\overrightarrow{grad\ u} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M}\vec{k}. \qquad (3)$$

Модуль градієнта дорівнює найбільшому можливому значенню похідної від функції u в даній точці у довільному напрямі.

Приклад 2. Знайти градієнт функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точці $M_0(2,1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції в точці

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 9, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = -3.$$

Тому маємо: $\overrightarrow{grad\ z} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\vec{j} = 9\vec{i} - 3\vec{j}$.

Варто зауважити, що найбільше значення похідної за напрямом в точці M_0 дорівнює модулю градієнта функції в цій точці.

§ 4. Дотична площина та нормаль до площини

Нехай задана поверхня рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій поверхні.

Дотичною площиною до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0 називається площина, яка проходить через точку M_0 і містить в собі всі дотичні, що проходять через точку M_0, до всеможливих кривих, які лежать на заданій поверхні і проходить через M_0.

Виходячи із скалярного добутку перпендикулярних векторів легко отримати рівняння дотичної площини

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}(x-x_0)+\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}(y-y_0)+\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}(z-z_0)=0\,. \qquad (1)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна до дотичної площині що проведена в цій точці.

Рівняння нормалі до поверхні записується як рівняння прямої що проходить через точку M_0 в заданому напрямі (нормалі до поверхні)

$$\frac{x-x_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}}. \qquad (2)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, то записавши її у виді $f(x,y)-z=0$, або $F(x,y,z)=f(x,y)-z$.

Тоді рівняння *дотичної площини* має вигляд

$$z-z_0=\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0}(x-x_0)+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0}(y-y_0)\,. \qquad (3)$$

А рівняння *нормалі* в цьому випадку

$$\frac{x-x_0}{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}\,. \qquad (4)$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до конуса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{9}=0$ в точці $M_0(2,-3,-6)$.

Розв'язання. За умовою $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{9}$. Знайдемо частинні похідні цієї функції в заданій точці

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{2},\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}=1; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{3},\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}=-2; \quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{-2z}{9}, \quad \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}=\frac{4}{3}.$$

Підставляючи знайдені значення частинних похідних у формулу (1), отримаємо рівняння дотичної площини

$$1\cdot(x-2)-2\cdot(y+3)+\frac{4}{3}(z+6)=0;\quad 3x-6y+4z=0\,.$$

Застосовуючи формулу (2), отримаємо рівняння нормалі до поверхні

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+6}{\frac{4}{3}},\ \text{або}\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z+6}{4}.$$

§ 5. Частинні похідні вищих порядків

Нехай маємо функцію $z=f(x;y)$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$ та $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$, взагалі кажучи, є функціями від x та y. Тому від них теж можна брати частинні похідні як по x, так і по y:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y)$ – друга похідна по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)$ – f диференціюємо спочатку по y, а потім отриману функцію диференціюємо по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$ – f диференціюємо спочатку по x, а потім отриману функцію диференціюємо по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)$ – друга похідна по y.

Запис $\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-p}\partial x^p}$ означає, що від z взята похідна p разів по x, а потім $n-p$ разів по y.

***Теорема* 1.** Якщо функція $z=f(x;y)$ і її частинні похідні f_x', f_y', f''_{yx}, f''_{xy} визначені і неперервні в точці $M(x;y)$, то в деякому околі цієї точки справедлива рівність $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ (без доведення).

Приклад. Знайти частинні похідні 2-го порядку від функції $z = x^2 y + y^3$.

Розв'язання. Згідно з правилами відшукання похідних

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3y^2) = 2x\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x\,.$$

§ 6. Максимум і мінімум функції двох змінних

Означення 1. Функція $z = f(x; y)$ має *максимум* у точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ для всіх точок $(x; y)$, достатньо близьких до точки $(x_0; y_0)$ і не рівних їй.

Означення 2. Функція $z = f(x; y)$ має *мінімум* у точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0; y_0) < f(x; y)$ для всіх точок $(x; y)$, достатньо близьких до точки $(x_0; y_0)$ і не рівних їй.

Максимум і мінімум називаються *екстремумами* функції. Ці означення можна переформулювати так. Нехай $x = x_0 + \Delta x;\ y = y_0 + \Delta y$. Тоді приріст функції

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f\,;$$

1) якщо $\Delta f < 0$ при достатньо малих приростах $\Delta x,\ \Delta y$, тоді функція $f(x; y)$ досягає *максимуму* в точці $M_0(x_0; y_0)$;
2) якщо $\Delta f > 0$ при достатньо малих приростах $\Delta x,\ \Delta y$, тоді функція $f(x; y)$ досягає *мінімуму* в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема 1. (Необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x; y)$ досягає екстремуму при $x = x_0,\ y = y_0$, то кожна частинна похідна першого порядку від z або перетворюється в нуль при цих значеннях аргументів, або не існує.

Теорема 2. (Достатня умова екстремуму). Нехай у деякій області, яка містить точку M_0, функція $f(x; y)$ має неперервні частинні похідні до третього порядку включно, і нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ є критичною, тобто

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 .$$

Тоді при $x = x_0$, $y = y_0$:

1) $f(x; y)$ має максимум, якщо $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$;
2) $f(x; y)$ має мінімум, якщо $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$;
3) $f(x; y)$ не має екстремуму, якщо $AC - B^2 < 0$;
4) якщо $AC - B^2 = 0$, то екстремум може бути, а може і не бути (у цьому випадку потрібні додаткові дослідження).

***Приклад* 1.** Дослідити на екстремум функцію двох змінних

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1 .$$

Розв'язання. Спочатку знаходимо критичні точки, тобто точки, де частинні похідні дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2; \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0; \end{cases} \qquad x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Потім знаходимо значення других похідних у критичній точці $M_0\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2; \; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -1; \; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2 .$$

Обчислимо $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0,$ причому $A > 0$.

Отже, в точці M_0 функція має *мінімум*;

$$z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 =$$

$$= \frac{16 + 4 - 36 + 9 + 1 - 6}{9} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} .$$

Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Нехай потрібно знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ в деякій замкненій області D. Цих значень функція може досягати або всередині області D, які є стаціонарними точками функції, або на краю області D. Тому, щоб знайти найбільше і найменше значення функції у замкненій області, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки, які лежать всередині області, і обчислити значення функції в цих точках; досліджувати на екстремум ці точки немає необхідності;

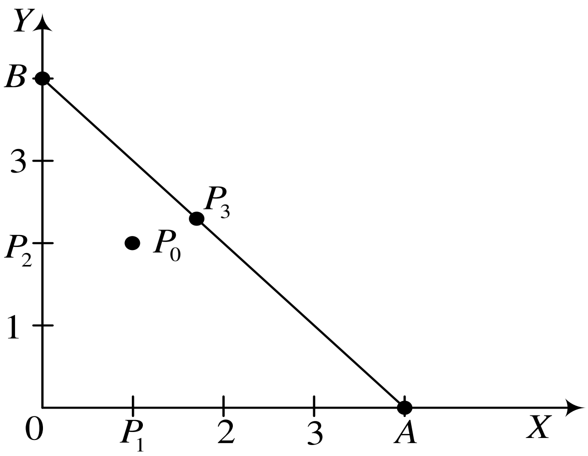


Рис. 46.

2) знайти найбільше і найменше значення функції на краю (на межі); якщо межа складається із кількох ланок, то дослідження проводиться на кожній ланці окремо;

3) порівняти всі знайдені значення функції і вибрати серед них найбільше і найменше.

***Приклад* 2.** Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в замкненому трикутнику AOB, який обмежений осями координат і прямою $x + y - 4 = 0$ (рис. 46)

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8, \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0. \end{cases}$$

Стаціонарна точка $P_0(1,2)$. Ця точка лежить всередині області. Значення функції в цій точці $z(P_0) = z(1,2) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = -4$.

Межа заданої області складається із відрізка OA на сої OX, відрізка OB осі OY і відрізка AB. Визначимо найбільше і найменше значення заданої функції на кожній із цих трьох ланок.

1) на ланці OA $y = 0$, а $0 \le x \le 4$. При $y = 0$ задана функція набуває вигляду $z = x^2 - 2x + 5$ і є функцією однієї змінної. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $[0,4]$.

$\frac{dz}{dx} = 2x - 2$; $2x - 2 = 0$; $x = 1$, точка $P_1(1,0)$ – стаціонарна точка, значення функції в цій точці $z(P_1) = z(1,0) = 4$.

2) на ланці OB $x=0$ і $0 \le y \le 4$. При $x=0$ функція має вигляд $z = 2y^2 - 8y + 5$. Знаходимо найбільше і найменше значення цієї функції

$\frac{dz}{dy} = 4y - 8;\quad 4y - 8 = 0;\quad y = 2$, точка $P_2(0,2)$ – стаціонарна точка і

3) на ланці AB $y = 4 - x$, підставивши його у задану функцію отримаємо функцію однієї змінної $z = 3x^2 - 10x + 5$. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $[0,4]$.

$\frac{dz}{dx} = 6x - 10;\quad 6x - 10 = 0;\quad x = \frac{5}{3}$; стаціонарна точка $P_3\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$. Значення функції в цій точці $z(P_3) = z\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right) = -\frac{10}{3}$.

Знайдемо значення функції в точках O, A і B:

$z(O) = z(0,0) = 5,\quad z(A) = z(4,0) = 13,\quad z(B) = z(0,4) = 5$.

Порівнюючи отримані результати, приходимо до висновку що найбільше значення функції досягається у точці $A(4,0)$, а найменше – у точці $P_0(1,2)$. Таким чином,

$$z_{найб} = z(4,0) = 13,\quad z_{найм} = z(1,2) = -4.$$

§ 7. Умовні екстремуми

У багатьох економічних задачах питання відшукання екстремуму функції кількох змінних (які, взагалі кажучи, не є незалежними) пов'язані з появою деяких додаткових умов. Наприклад, якщо функція описує валовий збір зерна, то засіяні площі, внесення добрив, витрати на паливо тощо вносять деякі обмеження на незалежні змінні.

Розглянемо питання про умовний екстремум функції двох змінних, якщо ці змінні зв'язані однією умовою.

Нехай потрібно знайти екстремум функції

$$z = f(x;y) \tag{1}$$

за умови, що x і y пов'язані рівнянням

$$\varphi(x,y) = 0. \tag{2}$$

Якщо б рівняння (2) розв'язувалось, наприклад, відносно y, то, підставивши його в (1), отримаємо функцію однієї змінної, яку досліджуємо відомими методами. Але можна розв'язати задачу, не знаходячи y з рівності (2). Із (1) знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}$, пам'ятаючи, що y є функцією від x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Тоді в точках екстремуму

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \tag{3}$$

Із рівності (2) знаходимо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \tag{4}$$

Помноживши (4) на поки що невідомий коефіцієнт λ і додавши його до (3), отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \tag{5}$$

Рівність (5) виконується у всіх точках екстремуму. Підберемо λ так, щоби для x і y, які відповідають екстремуму функції z, друга дужка дорівнювала нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

Тоді при цих значеннях

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0.$$

Таким чином, маємо, що в точках екстремуму задовольняються три рівняння з трьома невідомими:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Рівняння (6) є необхідною умовою екстремуму функції (1) за умови (2).

При розв'язуванні конкретних задач деколи вдається встановити характер критичної точки, виходячи із суті задачі. Зауважимо, що ліві частини рівнянь (6) є частинними похідними так званої *функції Лагранжа*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

за змінними x, y, λ.

Приклад. Знайти екстремум функції

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$, за умови $x_1 + x_2 = 7$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 7).$$

Знайдемо частинні похідні та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 7 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 4, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

$P(3;4)$ – критична точка. Визначимо її характер. Знайдемо $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 > 0,\ B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,\ C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 > 0.$

Оскільки $AC - B^2 = 4 - 0 > 0,$ точка $P(3;4)$ є точкою мінімуму.

$$f_{\min} = f(3,4) = (3-2)^2 + (4-3)^2 = 1 + 1 = 2.$$

§ 8. Застосування функцій багатьох змінних в економіці

Одним із базових понять економічної теорії є *функція корисності*, що виражає корисність придбання m різновидностей товарів. Часто вона використовується у формах:

$U = \sum_{i=1}^{m} a_i \ln(x_i - c_i),\ a_i > 0,\ x_i - c_i > 0,\ c_i \ge 0 -$ логарифмічна функція;

$U = \sum_{i=1}^{m} a_i (x_i - c_i)^{1-b_i} / (1-b_i),\ a_i > 0,\ 0 < b_i < 1,\ x_i - c_i > 0,\ c_i \ge 0$ - функція постійної еластичності.

Функція Кобба – Дугласа – виробнича функція, яка характеризує залежність обсягу випуску продукції Q від затрат капіталу K і трудових ресурсів. Для випадку двох змінних вона має вигляд

$$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

де $A > 0$ – параметр продуктивності конкретно взятої технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході.

***Приклад* 1.** Знайти швидкість зміни обсягу продукції Q при зміні одного з чинників: затрат капіталу K чи величини трудових ресурсів L за функцією Кобба – Дугласа.

Розв'язання. Частинні похідні функції $Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ дають розв'язок цієї задачі

$$Q'_K = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}; \quad Q'_L = A(1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}.$$

У функції Кобба – Дугласа показники α і $1-\alpha$ є коефіцієнтами еластичності $E_K(Q)$ і $E_L(Q)$ за кожним із аргументів.

***Приклад* 2.** За функцією Кобба – Дугласа встановити, на яку величину треба змінити обсяг вкладення капіталу K, щоб при зміні трудових ресурсів на ΔL випуск продукції не змінився.

Розв'язання. Оскільки $Q = \text{const}$ за умовою, то $dQ = 0$, або $\frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = 0$. Звідси $\Delta K = -\Delta L \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}$, або $\Delta K = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}\Delta L$.

Для відносних величин отримується таке відношення еластичностей:

$$\frac{\Delta K}{K} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\Delta L}{L}.$$

Звідси видно, що для компенсації зміни ресурсу праці на 1% потрібно змінити ресурс капіталу на $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ відсотків. Формула для ΔK містить важливе економічне поняття – *гранична норма* зміни трудових ресурсів L капіталом K.

Розглянемо деякі типові задачі знаходження екстремуму функції кількох змінних, які часто зустрічаються в економіці.

Прибуток від виробництва товарів різних видів

Нехай $x_1, x_2, ..., x_m$ – кількості вироблених m різновидів товарів, які реалізуються за цінами $p_1, p_2, ..., p_m$ (p_i – сталі) відповідно. Нехай затрати на виробництво цих товарів задаються функцією

$$C = S(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Тоді функція прибутку $\Pi = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_mx_m - S(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Максимум функції прибутку при $x_i \geq 0$ шукаємо з умови локального екстремуму $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$

Ці умови ведуть до розв'язування системи рівнянь

$$p_i - \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2, ..., m. \qquad (1)$$

Система (1) реалізує відоме правило економіки: *гранична вартість (ціна) товару дорівнює граничним затратам на виробництво цього товару.*

Розв'язавши систему (1), треба переконатись, чи отриманий розв'язок є дійсно точкою максимуму.

***Приклад* 3.** Нехай виготовляються два види товарів x та y. Їх ціни відповідно дорівнюють $p_1 = 8, \; p_2 = 10$ у.о., а функція витрат $C = x^2 + xy + y^2$. Знайти максимум прибутку.

Розв'язання. Функція прибутку $\Pi(x; y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$. З умови локального екстремуму отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases},$$

розв'язок якої є точка $M(2;4)$. Оскільки $A<0$, а $AC-B^2>0$ в точці M, то в ній функція досягає максимуму, який дорівнює

$\Pi_{\max}=\Pi(2;4)=28$ у.о.

Задача цінової дискримінації

Необхідно розподілити однорідний товар на різні ринки з різним попитом, щоб максимізувати загальний прибуток.

Оскільки еластичність попиту на різних ринках неоднакова, то на товар встановлюються різні ціни, що призводить до так званої *цінової дискримінації*.

Загальна постановка задачі. Нехай $x_1, x_2, ..., x_m$ – кількості однорідного товару, який продається на m ринках за цінами $p_i(x_i)$, тобто ціна на кожному ринку залежить від кількості пропонованого товару. Припустимо, що функція затрат залежить від загальної кількості товару

$$C=S(x_1+x_2+...+x_m).$$

Тоді загальний прибуток

$$\Pi=p_1x_1+p_2x_2+...+p_mx_m-S(x_1+x_2+...+x_m) \qquad (2)$$

Умова екстремуму $\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i}=0, \qquad i=1,2,...,m$

веде до системи рівнянь для визначення стаціонарних точок за умови $x_i \geq 0, \quad i=\overline{1;m}$

$$p_i(x_i)+x_ip_i'(x_i)-S'(x_1,x_2,...,x_m)=0, \quad i=\overline{1;m}. \qquad (3)$$

Проаналізуємо дохід $R_i=x_ip_i(x_i)$ на кожному ринку. Граничний дохід

$$R_i'=p_i+x_ip_i'=p_i\left(1+p_i'\frac{x_i}{p_i}\right)=p_i\left(1+\frac{1}{E_i}\right),$$

де E_i – еластичність попиту на i–тому ринку. Оскільки E_i – звичайно від'ємна величина, останню рівність можна переписати в зручній формі: $R_i'=p_i\left(1-\dfrac{1}{|E_i|}\right)$.

Якщо $|E_i| < 1$, то $R_i' < 0$, ринок нееластичний. Якщо $S' > 0$, то умова (3) вимагає вибору ринку з додатним граничним доходом, або з еластичним попитом, тобто $|E_i| > 1$.

З рівняння (3) маємо $p_1\left(1-\frac{1}{|E_1|}\right) = p_2\left(1-\frac{1}{|E_2|}\right) = ... = p_m\left(1-\frac{1}{|E_m|}\right) = S'$,

звідки й виводиться умова „цінової дискримінації”: *чим менша за абсолютною величиною еластичність даного ринку при даній кількості товару, тим вища має бути ціна на товар на цьому ринку за умови максимального прибутку*.

***Приклад* 4**. Нехай маємо три ринки з кількістю товару для продажу x_1, x_2, x_3 з цінами на товар відповідно $p_i = a_i - b_i x_i$, тоді дохід $R_i = x_i(a_i - b_i x_i)$. Нехай функція затрат виражається формулою

$$\Pi = x_1(a_1 - b_1x_1) + x_2(a_2 - b_2x_2) + x_3(a_3 - b_3x_3) - A - B(x_1 + x_2 + x_3).$$

Знайти максимальний прибуток.

Розв’язання. Умова локального екстремуму має вигляд

$$a_i - 2b_i x_i - B = 0, \quad i = 1,2,3.$$

З цієї системи знаходимо стаціонарну точку $x_i = \frac{a_i - B}{2b_i}, \qquad i = \overline{1;3}$.

Гессіан (визначник, складений із частинних похідних другого порядку) функції прибутку дорівнює

$$H_3 = \begin{vmatrix} -2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2b_3 \end{vmatrix}.$$

Оскільки $b_i > 0$, то за критерієм Сільвестра (проходить зміна знака в головних мінорах Δ_i ($\Delta_1 = A,\ \Delta_2 = A^2 - BC,\ \Delta_3 = H_3$), починаючи з мінуса) отримана точка є точкою мінімуму.

Для прикладу, візьмемо:

$a_1 = 25;\quad a_2 = 45;\quad a_3 = 85;\quad b_1 = 5;\quad b_2 = 4;\quad b_3 = 10;\quad A = 10;\quad B = 5$.

Отримаємо розподіл товарів за ринками $x_1 = 2;\quad x_2 = 5;\quad x_3 = 4$ при цінах відповідно $p_1 = 15;\quad p_2 = 25;\quad p_3 = 45$.

Неважко бачити, що відповідні еластичності $|E_1|=1,5;$ $|E_2|=1,25;$ $|E_3|=1,125$ задовольняють принцип „цінової дискримінації”: чим менша величина $|E_i|$ i–го ринку, тим вища має бути ціна товару на цьому ринку. Для взятого прикладу максимальний отриманий прибуток $\Pi_{\max}=270$.

Вправи

Завдання* 1. *Знайти області визначення функцій:

1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 2) $z=\sqrt{9-x^2}$; 3) $z=\dfrac{1}{x+y}$; 4) $z=\sqrt{x^2-y^2}$;

5) $z=\sqrt{2xy}$; 6) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$; 7) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-a^2}$; 8) $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}$;

9) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; 10) $z=\ln(x+y)$; 11) $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{xy}$; 12) $z=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-1}}$.

Завдання* 2. *Знайти частинні похідні та диференціали першого порядку від функцій

1) $z=xy$; 2) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; 3) $z=\sin xy^2$; 4) $z=\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$; 5) $z=\ln\left(x+5y^2\right)$;

6) $z=y^x$; 7) $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{\sqrt{x}}$; 8) $z=xy\cos xy$; 9) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 10) $z=\ln\mathrm{tg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

Завдання* 3. *Задана функція* $z=f(x,y)$ *і дві точки* $A(x_0,y_0)$ *і* $B(x_1,y_1)$. *Потрібно:

1) обчислити значення z_1 функції у точці B;
2) обчислити приблизне значення функції z_1 у точці B, виходячи із значення z_0 функції у точці A, замінивши приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом, і оцінити у відсотках відносну похибку, яка виникає при заміні приросту функції її диференціалом;
3) знайти дотичну площину та нормаль до поверхні в точці A.

1. $z=3x^2-xy+x+y;$ $A(1;3),$ $B(1,06;2,92)$.

2. $z = x^2 + 3xy - 6y;$ $A(4;3),$ $B(3,96;3,02)$.

3. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y;$ $A(2;3),$ $B(2,02;2,97)$.

4. $z = x^2 + 3xy + 2y^2;$ $A(2;1),$ $B(1,96;1,04)$.

5. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1;$ $A(2;4),$ $B(1,98;3,96)$.

Завдання* 4.1. *Прикладні задачі.

1) При надзвуковій швидкості v_1 в потоці газу виникає скачок тиску . При цьому густина скачка (ударна хвиля) має ту ж швидкість розповсюдження $v_1 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{k\rho_2}{\rho_1}}$. Тут відповідно P_1 і ρ_1 – тиск і густина газу до скачка, а P_2 і ρ_2 – після скачка. Обчислити швидкість розповсюдження легкої ударної хвилі, тобто в припущенні, що $\rho_2 \to \rho_1$, $P_2 \to P_1$.

2) Снаряд випущений із точки О з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Якби не було опору повітря, то снаряд описав би параболу, рівняння якої $y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \alpha}$. Приймаючи за параметр α знайти рівняння згинаючої парабол.

3) Річні витрати підприємства виражаються функцією $f(x_1; x_2) = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \frac{c_1}{x_1} + \frac{c_2}{x_2}$, де a, b_1, b_2, c_1, c_2 –постійні. Знати такі x_1, x_2 за яких витрати підприємства будуть найменшими.

4) Вартість будови 1м^2 фасаду дорівнює a гр. од., інших стін – b, даху – c. Визначити при яких співвідношеннях довжини фасаду x, ширини y і висоти z, із заданою кубатурою V, загальна вартість будови, яка описується формулою $S = a\frac{V}{y} + b\frac{V}{y} + 2b\frac{V}{x} + cxy$ (перевірити це), буде найменшою.

5) До двох пунктів P_1 і P_2 що розміщені на відстанях a_1 і b_1 та a_2 і b_2 від двох магістралей, які перетинаються під прямим кутом, треба провести газопровід. На магістралях побудувати два села Q_1 і Q_2 так

щоб вартість газопроводу, який сполучає P_1 із Q_1, Q_1 із Q_2, Q_2 із P_2 була найменшою.

6) Робота деформації рами виражається формулою

$A=\frac{l^3}{2EI}\left(\frac{4}{3}H^2-NH+\frac{1}{3}N^2+\frac{1}{3}PH-\frac{1}{4}PN+\frac{1}{10}P^2\right)$, де $P-$стале навантаження; $l-$довжина; $N,H-$вертикальна і горизонтальна реакції опор; $E-$модуль пружності; $I-$момент інерції. Визначити такі N,H, щоб робота A була найменшою.

7) В точках A_1 і A_2 є два джерела світла які мають інтенсивності E_1 і E_2 відповідно. Знайти найбільше освічену точку M на прямій $A_1A_2=l$, яка знаходиться між ними. (Якщо x та $y-$відстані джерел від екрану, то сила освітлення виражається формулою $f(x,y)=\frac{E_1}{x^2}+\frac{E_2}{y^2},\quad x+y=l$.)

Завдання 4.2. Знайти екстремуми функцій:

1) $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$; 2) $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$; 3) $z=xy(1-x-y)$;

4) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$; 5) $z=e^{x/2}(x+y^2)$; 6) $z=x^3-y^3-3xy$;

7) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$; 8) $z=\sin x+\cos x+\cos(x-y)$;

9) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$; 10) $u=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z$.

Завдання 4.3. Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області

1) $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в трикутнику, що обмежений прямими

$$x=0,\quad y=0,\quad x+y+3=0;$$

2) $z=x^2-y^2+4xy-6x-2y$ в трикутнику, що обмежений прямими

$$x=0,\quad y=0,\quad 2x+3y-6=0;$$

3) $z=x^2+y^2-4xy-4$ в квадраті, що обмежений осями координат і прямими

$$x=4 \text{ і } y=4;$$

4) $z=x^2+y^2-6x+4y+2$ в прямокутнику з вершинами $A(1,-3)$, $B(1,2)$,

$$C(4,2),\quad D(4,-3);$$

5) $z=2x^2-2y^2$ в крузі $x^2+y^2\le 9$.

Завдання 4.4. Знайти умовні екстремуми функцій:

1. $z=x^2+y^2-xy+x+y,\quad x+y+3=0$;

2. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ x+y=2$;

3. $z=\frac{x-y-4}{\sqrt{2}},\ x^2+y^2=1$;

4. $z=xy^2,\ x+2y=1$;

5. $z=2x+y,\ x^2+y^2=1$;

6. $u=2x+y-2z,\ x^2+y^2+z^2=36$;

7. $u=x^2+y^2+z^2,\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

8. $u=xy^2z^3,\ x+2y+3z=12,\quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$;

9. $u=xyz,\ \begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+xz=5 \end{cases}$;

10. $z=x^2+y^2,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$.

Завдання 5.Задачі підвищеної трудності

1.

Відповіді

***До завдання* 1**

1) $x^2+y^2\neq 0$; 2) $|x|\leq 3$; 3) $y\neq -x$; 4) $|y|\leq|x|$; 5) $x\geq 0,\ y\geq 0;\ x\leq 0,\ y\leq 0$; 6) $|x|<+\infty,\ |y|<+\infty$; 7) $x^2+y^2\neq a^2$; 8) $|y|\leq x^2,\ x\neq 0$; 9) $x^2+y^2\leq a^2$; 10) $x+y>0$; 11) $xy>0$; 12) $x^2+y^2\neq 1$.

***До завдання* 2**

1) $dz=ydx+xdy$; 2) $dz=\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 3) $dz=\left(y^2dx+2xydy\right)\cos xy^2$;

4) $dz=\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$; 5) $dz=\frac{dx+10ydy}{x+5y^2}$; 6) $dz=y^x\left(\ln ydx+\frac{x}{y}dy\right)$;

7) $dz=\dfrac{2xdy-ydx}{2\sqrt{x}\left(x+y^2\right)}$; 8) $dz=(ydx+xdy)(\cos xy-xy\sin xy)$; 9) $dz=\dfrac{y(ydx-xdy)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$;

10) $dz=\dfrac{4(xdy-ydx)}{\left(x-y\right)^2}\operatorname{cosec}\dfrac{2(x+y)}{x-y}$.

***До завдання* 4.1**

1) $v_1=\sqrt{k\dfrac{P_1}{\rho_1}}$. Швидкість розповсюдження ударної хвилі співпадає зі швидкістю звуку.

2) Нехай $\mathrm{tg}\alpha=z$, рівняння сім'ї парабол $y=xz-\dfrac{gx^2}{2v_0}(1+z^2)$. Тоді із $\dfrac{\partial y}{\partial z}=0$, отримаємо $x=\dfrac{v_0}{gz}$, підставимо в сім'ю. Маємо: $y=\dfrac{v_0}{2g}-\dfrac{gx^2}{2v_0}$. Ця огинаюча парабола в балістиці називається параболою безпеки, так як точки, що лежать вище цієї параболи не досягаються снарядами.

3) $x_1=\sqrt{c_1/b_1}$; $x_2=\sqrt{c_2/b_2}$.

4) $x=\sqrt[3]{\dfrac{4b^2V}{c(a+b)}}$; $y=\sqrt[3]{\dfrac{V(a+b)^2}{2bc}}$; $z=\sqrt[3]{\dfrac{Vc^2}{2b(a+b)}}$.

5) $x=\dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$; $y=\dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}$. 6) $N=\dfrac{3P}{7}$, $H=\dfrac{P}{28}$.

7) $x=\dfrac{l\sqrt[3]{E_1}}{\sqrt[3]{E_1}+\sqrt[3]{E_2}}$, $y=\dfrac{l\sqrt[3]{E_2}}{\sqrt[3]{E_1}+\sqrt[3]{E_2}}$.

***До завдання* 4.2**

1) $z_{\min}=z(1;\ 2)=-7$; 2)екстремумів немає;

3) $z_{\max}=z\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}$; 4) $z_{\max}=z(4;\ 4)=12$; 5) $z_{\min}=z(-2;\ 0)=-\dfrac{2}{e}$;

6) $z_{\max}=z(-1;\ 1)=1$; 7) $z_{\max}=z\left(\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$;

8) $z_{\max}=z\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)=1+\sqrt{2}$; $0\le x\le\frac{\pi}{2}$; $0\le y\le\frac{\pi}{2}$; 9) $z_{\min}=z(0;\ 0)=0$;

10) $u_{\min}=u(2;\ -3;\ 1)=-14$.

***До завдання* 4.3**

1) $z_{\text{найм.}}=-1,\ z_{\text{найб.}}=6$; 2) $z_{\text{найм.}}=-1,\ z_{\text{найб.}}=6$; 3) $z_{\text{найм.}}=-36,\ z_{\text{найб.}}=12$;

4) $z_{\text{найм.}}=-11,\ z_{\text{найб.}}=26$; 5) $z_{\text{найм.}}=-18,\ z_{\text{найб.}}=18$.

***До завдання* 4.4**

1) $z_{\min}=z\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$; 2) $z_{\min}=z(1;\ 1)=2$;

3) $z_{\min}=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1-2\sqrt{2}$; $z_{\max}=z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-2\sqrt{2}$;

4) $z_{\min}=z(1;\ 0)=0$; $z_{\max}=z\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$;

5) $z_{\min}=z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$; $z_{\max}=z\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$;

6) $u_{\min}=u(-4;\ -2;\ 4)=-18$; $u_{\max}=u(4;\ 2;\ -4)=18$;

7) $u_{\min}=u(0;\ 0;\ \pm2)=4$; $u_{\max}=u(\pm4;\ 0;\ 0)=16$;

при $y=\pm3$, $x=z=0$ екстремуму немає;

8) $u_{\max}=u(2;\ 2;\ 2)=64$;

9) $u_{\min}=u\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{5}{3}\right)=\frac{50}{27}$; $u_{\max}=u(2;\ 1;\ 1)=2$;

10) $z_{\min}=z\left(\frac{36}{25};\ \frac{48}{25}\right)=\frac{144}{25}$.

Розділ 8. НЕВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. Первісна та невизначений інтеграл

***Означення* 1.** Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, якщо у всіх точках цього проміжку виконується рівність

$$F'(x)=f(x).$$

***Приклад* 1.** Знайти первісну для функції $f(x)=x^2$.

Розв'язання. З означення випливає, що функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ буде первісною, оскільки $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$.

***Означення* 2.** Якщо функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називають *невизначеним інтегралом* для функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$, де C – довільна стала

З геометричної точки зору, невизначений інтеграл – це сім'я кривих, кожну з яких можна отримати шляхом зсуву однієї з кривих $F(x)$ паралельно сама собі вверх чи вниз вздовж осі OY.

З означення 2 випливають рівності:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x).$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$
3. $\int dF(x)=F(x)+C.$

§ 2. Таблиця інтегралів

Безпосередньо з означення 2 і таблиці похідних можна записати таблицю найпростіших інтегралів, які варто запам'ятати. Справедливість їх легко перевірити диференціюванням.

1. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$. ($C$ – довільна стала)

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

14. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

17. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

18. $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$.

§ 3. Властивості невизначеного інтеграла. Безпосереднє інтегрування

1. Інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \tag{1}$$

2. Сталий множник у підінтегральній функції можна винести за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \tag{2}$$

Найпростіші правила інтегрування

I. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C\,; \qquad (3)$$

II. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C\,; \qquad (4)$$

III. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,; \qquad (5)$$

IV. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C\,. \qquad (6)$$

Інтегрування функцій при якому використовується таблиця інтегралів, основні властивості невизначеного інтеграла, а також найпростіші тотожні перетворення підінтегральної функції, прийнято називати *безпосереднім інтегруванням*.

***Приклад* 1.** Знайти невизначений інтеграл $\int\left(4x^3 + x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)dx$.

Розв'язання. Перетворимо, попередньо, підінтегральну функцію а потім застосуємо властивості невизначеного інтеграла і табличний інтеграл

$$\int\left(4x^3 + x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(4x^3 + x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = 4\int x^3dx + \int x^{\frac{4}{3}}dx - 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = x^4 + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + C\,.$$

***Приклад* 2.** Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx$.

Розв'язання. Розкриємо дужки у чисельнику і почленно поділимо його на знаменник

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx = \int\frac{x^3-3x+2x^2-6}{x^3}dx = \int\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int dx - 3\int x^{-2}dx + 2\int \frac{dx}{x} - 6\int x^{-3}dx = x + \frac{3}{x} + 2\ln|x| + \frac{3}{x^2} + C .$$

***Приклад* 3.** Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Представимо чисельник підінтегральної функції як суму $\sin^2 x + \cos^2 x$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) і поділимо почленно її на знаменник

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C .$$

§ 4. Заміна змінної в невизначеному інтегралі

Нехай потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$, причому безпосередньо підібрати первісну для $f(x)$ неможливо, хоч знаємо, що вона існує.

Зробимо заміну (підстановку) $x = \varphi(t)$,

де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену.

Тоді $dx = \varphi'(t)dt$.

Маємо рівність

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\ \varphi'(t)\ dt .$$

Іноді замість підстановки $x = \varphi(t)$ зручно застосувати заміну $t = \varphi(x)$, тобто розглядати нову змінну t як функцію від x.

***Приклад* 1.** Знайти інтеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $t = \sin x$, тоді $dt = \cos x dx$.

Маємо $\int \sqrt{\sin x}\cos x\ dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C.$

***Приклад* 2**. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай $t = 1 + x^2$, тоді $dt = 2xdx,\quad xdx = \frac{1}{2}dt$. Маємо $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C.$

Приклад **3**. Знайти інтеграл $\int \frac{\ln^2 xdx}{x}$.

Розв'язання. Заміна $\ln x = t$ дає $dt = \frac{1}{x}dx$. Тоді маємо

$\int \frac{\ln^2 x \ dx}{x} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$

Часто, коли заміна змінної досить проста, використовують так званий метод загінки під знак диференціала.

Приклад **4.** Знайти інтеграл $\int \cos^3 x \ \sin x \ dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз і, тримаючи очевидну заміну в пам'яті, запишемо результат:

$$\int \cos^3 x \ \sin x \ dx = -\int \cos^3 x \ d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + C .$$

Метод заміни змінної є одним з основних методів обчислення інтегралів. Навіть у тих випадках, коли ми інтегруємо іншим методом, нам часто доводиться в допоміжних обчисленнях звертатися до заміни змінних.

§ 5. Інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен

У цьому параграфі розглянемо інтеграли чотирьох видів, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}dx$; 2) $I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx$;

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$; 4) $I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$.

1. В інтегралі I_1 виділимо повний квадрат x у знаменнику:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Заміни $x + \frac{b}{2a} = t$, $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ зводять цей інтеграл до табличного (залежно від знака "+" чи "–" він дорівнює арктангенсу або логарифму).

***Приклад* 1.** Знайти інтеграл $\int \frac{1}{4x^2-8x-5}dx$.

Розв'язання. Виділимо в знаменнику повний квадрат x, винісши попередньо сталий множник 4 за знак інтеграла у знаменнику, отримаємо інтеграл схожий до табличного:

$$\int \frac{1}{4x^2-8x-5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-2x-\frac{5}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2-1-\frac{5}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x-1-\frac{3}{2}}{x-1+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+1}\right| + C.$$

2. Інтеграл виду I_2 перетвореннями зводиться до логарифма знаменника та попереднього інтеграла I_1:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx +$$

$$+\int \frac{B}{ax^2+bx+c}dx == \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Отже, $I_2 = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$

***Приклад* 2.** Знайти інтеграл $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$.

Розв'язання. Простими перетвореннями зробимо в чисельнику похідну знаменника і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+6+2}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\frac{1}{2\cdot\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C.$$

3. Інтеграл виду $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ виділенням повного квадрата підкореневого виразу зводиться до видів: $\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ при $a>0$ ("довгий" логарифм), або $\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$ при $a<0$ (арксинус).

***Приклад* 3.** Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Розв'язання. Перетвореннями, зведемо інтеграл до табличного

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)\cdot 4}{5} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{(4x-3)}{5} + C.$$

4. Інтеграл виду $I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$ зводиться до суми двох: інтеграла від степеневої функції виду $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ та інтеграла I_3:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Перший інтеграл типу $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C,$ а другий є не що інше, як I_3 .

Запам'ятовувати наведені формули не має потреби, слід лише розуміти схему знаходження цих інтегралів.

***Приклад* 4.** Знайти інтеграл $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}$.

Розв'язання. Простими перетвореннями зробимо у чисельнику похідну підкореневого виразу знаменника та розіб'ємо інтеграл на суму двох, як сказано вище

$$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-10+6)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-10)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} +$$

$$+3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \sqrt{x^2-10x+29} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2+2^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2-10x+29} + 3\ln\left|x-5+\sqrt{x^2-10x+29}\right| + C.$$

§ 6. Інтегрування частинами

Нехай u і v – дві диференційовані функції від x. Тоді диференціал добутку дорівнює $d(uv) = udv + vdu$.

Інтегруючи цю рівність, отримаємо $uv = \int udv + \int vdu,$ або

$$\int udv = uv - \int vdu \quad . \qquad (1)$$

Формула (1) називається *формулою інтегрування частинами*.

Наведемо кілька видів (найбільш вживаних) інтегралів, які беруться частинами (цей список далеко не повний):

$$\int x^k \sin\alpha x dx, \quad \int x^k \cos\alpha x dx, \quad \int x^k e^{\alpha x} dx, \quad \int x^k a^{\alpha x} dx, \quad \int x^k \ln x dx, \quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$\int e^{\alpha x}\cos bx dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin bx dx, \quad \int x^k \arcsin x dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} x dx, \quad \ldots \ (k \in N).$$

***Приклад* 1**. Знайти інтеграл $\int x^2 e^x dx$ **.**

Розв'язання. Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\int x^2e^x dx\begin{pmatrix} u = x^2, dv = e^x dx, \\ du = 2xdx, v = e^x \end{pmatrix} = \quad x^2e^x - 2\int xe^x dx\begin{pmatrix} u = x, dv = e^x dx, \\ du = dx, v = e^x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C.$$

***Приклад* 2**. Знайти інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання. Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int x^3 \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x, & dv = x^3 dx, \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = \frac{x^4}{4} \end{pmatrix} = \quad \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C .$$

***Приклад* 3**. Знайти інтеграл $\int \sin(\ln x) dx$.

Розв'язання. Нехай $u = \sin(\ln x)$, а $dv = dx$. Тоді $du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$, а $v = x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int \sin(\ln x)dx = x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx .$$

Інтегруючи частинами, знайдемо окремо

$$\int \cos(\ln x)dx \begin{pmatrix} u = \cos(\ln x), & dv = dx, \\ du = -\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx, & v = x \end{pmatrix} = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx .$$

Таким чином

$$\int \sin(\ln x)dx = x \cdot \sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx + 2C .$$

Звідси знаходимо

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C .$$

§ 7. Інтегрування найпростіших раціональних дробів

Всяку раціональну функцію можна записати як раціональний дріб:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + ... + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n} .$$

Будемо вважати, що многочлени в чисельнику і знаменнику не мають спільних коренів, в іншому випадку дріб можна скоротити.

Якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника, то дріб називається *правильним*, у протилежному випадку – *неправильним*.

Якщо дріб неправильний, то можна поділити чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів), тобто представити його як суму цілої частини – многочлена та правильного дробу: $\dfrac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \dfrac{f(x)}{P(x)}$.

Наприклад, заданий неправильний дріб записується у вигляді

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{(4x - 6)}{x^2 + 2x + 1}.$$

Оскільки інтегрування многочленів $M(x)$ не викликає труднощів, то головне при інтегруванні раціональних дробів – навчитися інтегрувати правильні раціональні дроби.

Означення. Правильні раціональні дроби виду:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, ($k \geq 2$, k – ціле додатне число),

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+g}$ (корені знаменника комплексні $\dfrac{p^2}{4} - g < 0$, дискримінант $D < 0$),

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+g\right)^k}$, ($D < 0$, k – ціле додатне число, $k \geq 2$) –

називаються *найпростішими дробами* I, II, III і IV типів.

Відомо, що всякий правильний раціональний дріб можна подати через суму найпростіших дробів вищезгаданих типів.

Інтеграли I і II типів беруться безпосередньо, а інтеграл III типу ми вже розглядали раніше:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+g}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+g}dx =$

$$= \frac{A}{2}\ \ln\left|x^2+px+g\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(g-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+g\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{g-\frac{p^2}{4}}}\ \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{g-\frac{p^2}{4}}}+C =$$

$$= \frac{A}{2}\ \ln\left|x^2+px+g\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4g-p^2}}\ \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4g-p^2}}+C.$$

Для знаходження інтеграла четвертого типу спочатку розіб'ємо його на два інтеграли: перший інтеграл має у чисельнику похідну від квадратного тричлена знаменника, а другий знаходиться за рекурентним співвідношенням

IV. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+g\right)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+g\right)^k}dx =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+g\right)^k}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+g\right)^k}.$$

Перший інтеграл береться заміною $x^2+px+g=t$. Тому (при $k \ge 2$)

$$\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+g\right)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C = \frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+g\right)^{k-1}}+C\ .$$

Другий інтеграл (при виділенні повного квадрата), має вигляд

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{\left(t^2+m^2\right)-t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt.$$

Фактично маємо рекурентне співвідношення

$$J_k=\frac{1}{m^2}J_{k-1}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt.$$

Взявши частинами останній інтеграл, прийдемо до J_{k-1}:

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\int\frac{t\ \ t\ \ dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int t\frac{d\left(t^2+m^2\right)}{\left(t^2+m^2\right)^k}=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)}\int t\ \ d\left(\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right)=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right]$$

Остаточно, маємо:

$$J_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}.$$

Отже, у правій частині є інтеграл того ж типу, що J_k, але степінь знаменника підінтегральної функції на одиницю менший, тобто $k-1$.

Продовжуючи цей процес, врешті–решт отримаємо інтеграл

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

***Приклад* 1**. Знайти інтеграл $\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

Розв'язання. Послідовними перетвореннями отримаємо

$$\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\ dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\ dx\ \ -$$

$$-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=-\frac{1}{2}\ \frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)}-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\ ;$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+2\right)^2}=\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\ \int\frac{t^2+2-t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+2\right)^2}\ ;$$

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{t\ d\left(t^2+2\right)}{\left(t^2+2\right)^2}=-\frac{1}{2}\int t\ d\left(\frac{1}{t^2+2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+2}-\int\frac{dt}{t^2+2}\right]=-\frac{t}{2\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\displaystyle\int\frac{(x+1)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=-\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)}-$

$$-2\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]=$$

$$=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

§ 8. Розклад раціонального дробу на прості дроби та приклади їх інтегрування

Нехай маємо правильний дріб $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$. Запишемо без виведення наступний результат:

якщо $P(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots\left(x^2+px+g\right)^{\mu}\ldots\left(x^2+lx+s\right)^{k}$, то дріб $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ може бути записаний у вигляді

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+$$

$$+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+g\right)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+g\right)^{\mu-1}}+\ldots.+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+g}+\ldots+ \qquad (1)$$

$$+\frac{Rx+l}{\left(x^2+lx+s\right)^k}+\frac{R_1x+l_1}{\left(x^2+lx+s\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{R_{k-1}x+l_{k-1}}{x^2+lx+s}\ .$$

В (1) коефіцієнти $A_i, B_j, \ldots$ можна визначити з таких міркувань. Рівність (1) є тотожністю, тому, звівши дроби до спільного знаменника, отримаємо тотожні многочлени в чисельниках справа і зліва. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_i, B_j, \ldots$.

Зауваження. Для визначення невідомих коефіцієнтів можна використати такий підхід. Оскільки многочлени в правій і лівій частині рівності після зведення до спільного знаменника мають бути тотожно рівні, то їх значення рівні при довільних конкретних значеннях *x*. Надаючи *x* різні значення, отримаємо системи рівнянь для визначення коефіцієнтів.

***Приклад* 1**. Розкласти дріб $\dfrac{x^2-2}{\left(x+1\right)^2\left(x+2\right)}$ на прості дроби.

Розв'язання. Згідно з формулою (1), маємо

$$\frac{x^2-2}{\left(x+1\right)^2\left(x+2\right)}=\frac{A}{\left(x+1\right)^2}+\frac{A_1}{\left(x+1\right)}+\frac{B}{x+2}.$$

Звівши до спільного знаменника та прирівнявши чисельники, отримаємо

$$x^2-2=A\left(x+2\right)+A_1\left(x+1\right)\left(x+2\right)+B\left(x+1\right)^2,$$

або $$x^2-2=x^2\left(A_1+B\right)+x\left(A++3A_1+2B\right)+\left(2A+2A_1+B\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A_1+B=1, \\ A+3A_1+2B=0, \\ 2A+2A_1+B=-2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $A=-1, \quad A_1=-1, \quad B=2$.

Запишемо отриманий розклад:

$$\frac{x^2-2}{\left(x+1\right)^2\left(x+2\right)}=-\frac{1}{\left(x+1\right)^2}-\frac{1}{\left(x+1\right)}+\frac{2}{x+2}\,.$$

При знаходженні інтеграла $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ з підінтегральною функцією у формі неправильного дробу записуємо її як суму многочлена $M(x)$ і правильного раціонального дробу $\frac{R(x)}{P(x)}$. Останній представляємо за формулою (1) як суму найпростіших дробів. Таким чином, інтегрування всякого раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена та кількох найпростіших дробів.

Вид найпростіших дробів визначається коренями знаменника $P(x)$. Тут можливі такі випадки:

1) корені знаменника дійсні і різні, тоді многочлен можна записати $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)....(x-a_k)$, і підінтегральна функція розкладається на найпростіші дроби I типу:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_k}{x-a_k}.\text{ Тоді}$$

$$\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+...+\int\frac{A_k}{x-a_k}dx=$$
$$=A_1\ln|x-a_1|+A_2\ln|x-a_2|+...+A_k\ln|x-a_k|+C\ ;$$

2) корені знаменника дійсні, проте деякі з них кратні

$$P(x)=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ ...\ (x-a_k)^{m_k}.$$

У цьому випадку підінтегральна функція розкладається на найпростіші дроби I і II типів;

3) серед коренів знаменника є комплексно-спряжені, різні

$$P(x)=\left(x^2+p_1x+g_1\right)\left(x^2+p_2x+g_2\right)\ ...\ (x-a_1)^{m_1}\ ...\ (x-a_k)^{m_k},$$

тоді підінтегральна функція розкладається на простіші дроби I, II і III типів;

4) серед коренів знаменника є комплексні кратні, тобто

$$P(x)=\left(x^2+p_1x+g_1\right)^{\nu_1}\left(x^2+p_2x+g_2\right)^{\nu_2}\ ...\ (x-a_1)^{m_1}\ ...\ (x-a_k)^{m_k}.$$

У цьому випадку підінтегральна функція розкладається на прості дроби I-IV типів.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)}\ dx.$

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральну функцію на найпростіші дроби (підінтегральна функція – правильний раціональний дріб):

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2x+3\right)}+\frac{E}{x+1}.$$

Прирівняємо чисельники після зведення дробу справа до спільного знаменника, отримаємо

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$

$$=\left(Ax+B\right)\ \left(x+1\right)+\left(Cx+D\right)\ \left(x^2+2x+3\right)\ \left(x+1\right)+E\left(x^2+2x+3\right)^2.$$

Комбінуючи вказані вище методи визначення коефіцієнтів, маємо:

$A=1,\quad B=-1,\quad C=D=0,\quad E=1.$

Таким чином, отримуємо $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)}dx=$

$$=\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx+\int \frac{dx}{x+1}=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\ln\left|x+1\right|+C.$$

§ 9. Інтегрування тригонометричних і деяких трансцендентних функцій

У цьому параграфі розглянемо інтеграли від деяких класів тригонометричних функцій.

Розглянемо інтеграл виду $\int R\left(\sin x,\cos x\right)\ dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів. Заміна $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ завжди зводить інтеграл до інтеграла від дробово-раціональної функції змінної t.

Слід врахувати, що при такій заміні

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad x=2\operatorname{arctg}t;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отже, початковий інтеграл матиме вигляд

$$\int R\ \left(\sin x,\cos x\right)\ dx=\int R\ \left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\ \frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

Таку заміну називають універсальною тригонометричною підстановкою.

На практиці поряд з універсальною тригонометричною підстановкою корисно знати інші підстановки, які часом ведуть швидше до мети. Наприклад, якщо інтеграл має вигляд

$$\int R\ \left(\sin x\right)\cdot\ \cos x\ \ dx\ ,$$

то найзручніше зробити заміну $\sin x=t$, тоді $dt\ =\ \cos x\ \ dx$ і маємо $\int R\left(t\right)dt.$

Інтеграл $\int R\left(\cos x\right)\cdot\sin xdx$ легко взяти заміною $\cos x=t$, Тоді $\sin xdx=-dt.$

Якщо ж підінтегральна функція містить тільки $\operatorname{tg}x$, то виконується заміна $\operatorname{tg}x=t$ і маємо

$$\int R\ \left(\operatorname{tg}x\right)\ dx=\int R\left(t\right)\ \frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Така ж підстановка ($\operatorname{tg}x=t$) використовується, коли підінтегральна функція $R\left(\sin x,\cos x\right)$ містить $\sin x$ і $\cos x$ тільки у парних степенях, тоді

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2};\quad \sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Розглянемо ще один простий випадок:

$\int\sin^m x\cos^n xdx$, $m,\quad n$ – цілі числа.

Якщо:

1) m і n – парні одночасно, то використовуємо формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

2) m і n – такі, що хоча б одне з них непарне, наприклад $n=2p+1$

$$I=\int\sin^m x\ \ \cos^{2p+1}x\ \ dx=\int\sin^m x\ \ \cos^{2p}x\ \ \cos x\ \ dx,$$

то заміна $\sin x=t$ зводить інтеграл до інтеграла від раціональної функції

$$I=\int t^m\left(1-t^2\right)^p dt;$$

3) m і n – парні, причому хоча б одне з них від'ємне, тоді робимо заміну $\mathrm{tg}x=t$ (або $\mathrm{ctg}x=t$).

Інтеграли типів

$\int\sin mx\sin nx\ \ dx$, $\int\sin mx\cos nx\ \ dx$, $\int\cos mx\cos nx\ \ dx$, $(m\neq n)$

знаходяться за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin mx\ \ \sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right],$$

$$\sin mx\ \ \cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right],$$

$$\cos mx\ \ \cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right].$$

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад **1.** Інтеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$ береться, використовуючи універсальну тригонометричну підстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Приклад **2.** Інтеграл $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$ візьмемо методом загонки під знак диференціала, при цьому зроблену заміну можна пам'ятати

$$\int \sin^2 x \ \cos^3 x \ dx = \int \sin^2 x \ \cos^2 x \ \cos x \ dx = \int \sin^2 x \ \left(1-\sin^2 x\right) \ d\left(\sin x\right) =$$

$$= \int t^2 \ \left(1-t^2\right) \ dt = \int \left(t^2 - t^4\right) \ dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \ .$$

§ 10. Інтегрування бінома та деяких ірраціональних функцій

Вираз виду $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, де $m,n,p,a,b-$сталі числа, називається диференціальним біномом.

Теорема. Інтеграл від диференціального бінома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ зводиться до інтеграла від раціональної функції в наступних трьох випадках: 1) p є ціле число; 2) $\frac{m+1}{n}$ - ціле число; 3) $\frac{m+1}{n}+p$ - ціле число.

При інтегруванні у випадку:

1) інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції;
2) робимо заміну змінних $a+bx^n = t^s$;
3) скористаємось підстановкою $ax^{-n}+b=t^s$, де s - знаменник дробу p.

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, де R –раціональна функція, знаходяться підстановкою $ax+b=t^n$, а в інтегралі $\int \frac{Mx+N}{\left(x-\alpha\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ виконується підстановка $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

Для знаходження інтегралів виду $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ зручно застосувати тригонометричні підстановки $x=a\sin t$ і $x=a \ \mathrm{tg} \ t$.

***Приклад* 1.** Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x=2\sin t$, тоді $t=\arcsin\frac{x}{2}$; $dx=2\cos t \ dt$.Підставляючи в інтеграл, маємо:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=16\int \sin^2 t\cos^2 tdt=$$
$$=4\int \sin 2t\sin 2tdt=2\int(1-\cos 4t)dt=2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}2\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)+C=$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}-2\frac{x}{2}\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\left[\cos^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right]+C=$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\left[1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\right]+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}(2-x^2)+C.$$

***Приклад* 2.** Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x=\mathrm{tg}t$, тоді $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$, підставимо в інтеграл

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{(1+\mathrm{tg}^2x)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}=\int\cos tdt=\sin x+C.$$

Виразимо $\sin t$ через змінну x: $\sin t=\mathrm{tg}t\cos t=\frac{\mathrm{tg}t}{1+\mathrm{tg}^2t}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Отже, $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

Вправи

***Завдання* 1.** Обчислити інтеграли безпосереднім інтегруванням або методом підстановки (заміни):

1. $\int x^5dx$;
2. $\int(x^3+2x^2-x)dx$;
3. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;
4. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$;
5. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$;
6. $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$;

7. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

8. $\int \left(\frac{5}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$;

9. $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$;

10. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$;

11. $\int \cos 5x \ dx$;

12. $\int \frac{\ln x + 1}{x}dx$;

13. $\int \frac{dx}{2x+9}$;

14. $\int \operatorname{tg} 2x \ dx$;

15. $\int \cos^2 x \sin x \ dx$;

16. $\int \sqrt{x^2+1} \ x \ dx$;

17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

18. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x}dx$;

19. $\int \frac{\arcsin x \ dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

20. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}dx$;

21. $\int 2x \ \left(x^2+1\right)^4 dx$;

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$;

23. $\int e^{\sin x} \cos x \ dx$;

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$;

25. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$;

26. $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$;

27. $\int 3^{2-x^3} x^2 dx$;

28. $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$;

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

30. $\int x^2 \sqrt[3]{x^3+1} \ dx$.

***Завдання* 2.** Обчислити інтеграли $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

1. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;

2. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$;

3. $\int \frac{dx}{x^2+6x}$;

4. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$;

5.	$\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}dx$;	6.	$\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$;
7.	$\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$;	8.	$\int \frac{4x-5}{x^2+5}dx$;
9.	$\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;	10.	$\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$;
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$;
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$;	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$;
15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$;
17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$;	18.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$;
19.	$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$;	20.	$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$;
21.	$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$;	22.	$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$;
23.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;	24.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

***Завдання* 3.** Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int \ln x \; dx$;	2. $\int x\sin x \; dx$;	3. $\int x\ln x \; dx$;
4. $\int xe^x dx$;	5. $\int \arcsin x \; dx$;	6. $\int \ln(1-x)\, dx$;
7. $\int x^n \ln x \; dx$;	8. $\int x \; \mathrm{arctg}\, x \; dx$;	9. $\int x\arcsin x \; dx$;
10. $\int \ln(x^2+1) \; dx$;	11. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x} \; dx$;	12. $\int x\cos^2 x \; dx$;
13. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;	14. $\int \frac{x \; \mathrm{arctg} \; x}{(x^2+1)^2} \; dx$;	15. $\int e^x \sin x \; dx$.

***Завдання* 4**. Проінтегрувати раціональні дроби:

1. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$;

2. $\int \frac{2x-1}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}dx$;

3. $\int \frac{xdx}{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)}$;

4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

5. $\int \frac{x^4}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx$;

6. $\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)}$;

7. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$;

8. $\int \frac{3x+2}{x\left(x+1\right)^3}dx$;

9. $\int \frac{x^2dx}{\left(x+2\right)^2\left(x+4\right)^2}$;

10. $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

11. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$;

12. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$;

13. $\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$;

14. $\int \frac{4dx}{x^4+1}$;

15. $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$;

16. $\int \frac{(3x^2+1)dx}{(x^2-1)^3}$.

***Завдання* 5**. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int \sin x\cos^3 x \; dx$;

2. $\int \sin^2 x\cos^2 x \; dx$;

3. $\int \cos^4 x \; dx$;

4. $\int \sin^3 x \; dx$;

5. $\int \cos^4 x\sin^3 x \, dx$;

6. $\int \sin^4 x \; dx$;

7. $\int \sin^4 x\cos^4 x \; dx$;

8. $\int \mathrm{tg}^3 x \; dx$;

9. $\int \mathrm{ctg}^5 x \; dx$;

10. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

11. $\int \sin x\cos 3x \; dx$;

12. $\int \cos 4x\cos 7x \; dx$;

13. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$;

14. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

15. $\int \frac{\cos x \ dx}{1+\cos x}$;

16. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} dx$;

17. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$;

18. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$;

19. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$;

20. $\int \frac{dx}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1}$;

21. $\int \sin^2 x \ \sin 3x dx$;

22. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

***Завдання* 6.** Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

1. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx$;

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$;

3. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx$;

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$;

6. $\int \sqrt{2x-x^2} dx$;

7. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

8. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

10. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$;

11. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x+1})^2}$;

12. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3} dx$;

13. $\int \frac{dx}{x^3 \ \sqrt[3]{2-x^3}}$;

14. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$.

***Завдання* 7.** Змішані інтеграли від функцій (підвищена складність)

1.

Відповіді

***До завдання* 1**

1. $\frac{x^6}{6}+C$; 2. $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$; 3. $x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right)+C$;

4. $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C$; 5. $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$;

6. $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^{2}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$; 7. $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$;

8. $5\ \mathrm{arctg}\,x-2\arcsin x+C$; 9. $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$;

10. $x-\mathrm{arctg}\,x+C$; 11. $\frac{1}{5}\ \sin 5x+C$; 12. $\frac{1}{2}(\ln x+1)^2+C$;

13. $\frac{1}{2}\ln|2x+9|+C$; 14. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$; 15. $-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$;

16. $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C$; 17. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$; 18. $\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{tg}\,x+1)^3}+C$;

19. $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$; 20. $\frac{1}{2}\ \ln\left(x^2+2x+4\right)+C$; 21. $\frac{\left(x^2+1\right)^5}{5}+C$;

22. $\ln|\arcsin x|+C$; 23. $e^{\sin x}+C$; 24. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$;

25. $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$; 26. $\frac{5}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$; 27. $-\frac{3^{2-x^3}}{3\ln 3}+C$;

28. $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$; 29. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$; 30. $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^4}}{4}+C$.

***До завдання* 2**

1. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}+C$; 2. $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{5}+C$;

3. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right|+C$; 4. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$;

5. $\ln\left|3x^2-7x+11\right|+C$; 6. $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\mathrm{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$;

7. $\frac{2}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$; 8. $2\ln\left(x^2+5\right)-\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C$;

9. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{2}+C$; 10. $\frac{1}{5}\ln\left|5x^2-x+2\right|+\frac{8}{5\sqrt{39}}\mathrm{arctg}\,\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$;

11. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$; 12. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$;

13. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-3}\right|+C$; 14. $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$;

15. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; 16. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$;

17. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}\right|+C$; 18. $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$;

19. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$;

20. $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$; 21. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$;

22. $\frac{3}{8}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln\left(4x-1+\sqrt{8\left(2x^2-x\right)}\right)+C$;

23. $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C$; 24. $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$.

До завдання 3

1. $x(\ln x-1)+C$; 2. $\sin x-x\cos x+C$; 3. $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$;

4. $e^x(x-1)+C$; 5. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 6. $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$;

7. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$; 8. $\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}\,x-x\right]+C$;

9. $\frac{1}{4}\left[\left(2x^2-1\right)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right]+C$; 10. $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$;

11. $(x+1)\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$; 12. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$;

13. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; 14. $\frac{x}{4\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}+C$;

15. $\frac{1}{2}e^{x}\left(\sin x-\cos x\right)+C$.

***До завдання* 4**

1. $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$; 2. $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$; 3. $\frac{1}{8}\ln\frac{\left(x+3\right)^6}{\left(x+5\right)^5\left(x+1\right)}+C$;

4. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2\left(x-2\right)^5}{\left(x+2\right)^3}+C$; 5. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{\left(x+1\right)^3}+\frac{16}{3}\ln\left|x+2\right|+C$;

6. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{x-2}{x-1}+C$; 7. $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{\left(x-2\right)^2}{x^2}+C$;

8. $\frac{4x+3}{2\left(x+1\right)^2}+\ln\frac{x^2}{\left(x+1\right)^2}+C$; 9. $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$;

10. $\frac{1}{6}\ln\frac{\left(x+1\right)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

11. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;

12. $\ln\frac{x^2+4}{\left(x+1\right)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; 13. $\frac{1}{3}\left[x^3+\ln\left(x^3-1\right)\right]+C$;

14. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$;

15. $\frac{2-x}{4\left(x^2+2\right)}+\ln\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 16. $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$.

***До завдання* 5**

1. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$; 2. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 3. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

4. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$; 5. $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$;

6. $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$; 7. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$;

8. $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$; 9. $-\dfrac{1}{4}\mathrm{ctg}^4 x+\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x+\ln|\sin x|+C$;

10. $\mathrm{tg}\, x+\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+C$; 11. $-\dfrac{\cos 4x}{8}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C$;

12. $\dfrac{\sin 11x}{22}+\dfrac{\sin 3x}{6}+C$; 13. $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{tg\,\dfrac{x}{2}-2}{2tg\,\dfrac{x}{2}-1}\right)+C$; 14. $\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|2tg\,\dfrac{x}{2}\right|+C$;

15. $x-\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+C$; 16. $-\mathrm{arctg}\left(2\sin^2 x-1\right)+C$; 17. $\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{6}\mathrm{tg}^3\dfrac{x}{2}+C$;

18. $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)+C$;19. $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\, x+\ln|\mathrm{tg}\, x|\right)+C$; 20. $\dfrac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\mathrm{tg}\, 3x-\sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\mathrm{tg}\, 3x+\sqrt{\dfrac{2}{3}}}\right|+C$;

21. $-\dfrac{1}{6}\cos 3x+\dfrac{1}{20}\cos 5x+\dfrac{1}{4}\cos x+C$; 22. $\dfrac{1}{24}\cos 6x-\dfrac{1}{16}\cos 4x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$.

***До завдання* 6**

1. $\dfrac{2(44-15x)}{27}\sqrt{1-3x}+C$; 2. $\dfrac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right]+C$;

3. $\dfrac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\dfrac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$; 4. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$;

5. $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$; 6. $\dfrac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]+C$;

7. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; 8. $2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{3/2}+C$; 9. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+C}}$;

10. $\dfrac{5x^3-3}{40}\left(1+x^3\right)^{5/3}+C$; 11. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x+1}}+\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}\right)+C$;

12. $\dfrac{1}{10}\left(5\sqrt[3]{x^4}+3\right)^{\frac{3}{2}}+C$; 13. $-\left(2-x^3\right)^{\frac{2}{3}}/4x^2+C$;

14. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

Розділ 9. ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми

Поняття визначеного інтеграла легко зрозуміти на задачі про знаходження площі криволінійної трапеції обмеженої зверху кривою $y = f(x)$, з боків прямими $x = a,\ \ x = b$, а з низу віссю OX.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$.

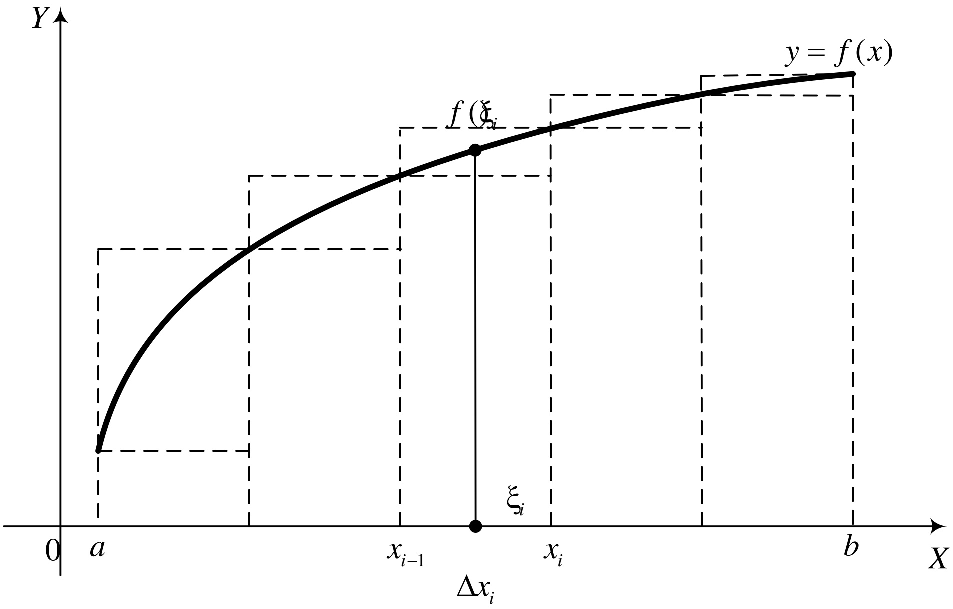


Рис. 47.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин (рис.47) точками x_i так, що $a = x_0; x_1; x_2;..., x_n = b$. Нехай $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Утворимо суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \tag{1}$$

Означення. Якщо при довільному розбитті відрізка $[a;b]$, такому що $\max \Delta x_i \to 0,$ і при довільному виборі ξ_i з i–го розбиття, сума $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta x$ прямує до однієї і тієї ж границі J, то цю границю J називають *визначеним інтегралом* і позначають $J = \int_a^b f(x)dx$. Тобто

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta x_i = \int_a^b f(x)\ dx,$$

a, b – верхня і нижня *межі інтегрування*.

Якщо $f(x) \geq 0$, то інтеграл $\int_a^b f(x)\ dx$ буде чисельно рівний площі *криволінійної трапеції*, яка обмежена графіком підінтегральної функції $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ і віссю OX.

§ 2. Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:
$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$
2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми кількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків:
$$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \tag{2}$$
3. Якщо на відрізку $[a;b]$, ($a < b$) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умову $f(x) \leq \varphi(x)$, то
$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b \varphi(x)\ dx. \tag{3}$$
4. Якщо m і M – найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і $a \leq b$, тоді справедлива нерівність
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{4}$$

5. ***Теорема про середнє***. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка ξ, що

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \tag{5}$$

6. Для довільних a, b, c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{6}$$

за умови, що всі ці інтеграли існують.

§ 3. Обчислення визначеного інтеграла

Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ нижня межа a зафіксована, а верхня межа b змінюється. Тоді буде змінюватися і значення інтеграла, тобто інтеграл стає функцією верхньої межі

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{1}$$

Якщо $f(t) \geq 0$, то величина $\Phi(x)$ чисельно рівна площі криволінійної трапеції.

***Теорема* 1.** Похідна від визначеного інтеграла за верхньою межею дорівнює підінтегральній функції на верхній межі (при умові, що підінтегральна функція неперервна), тобто якщо $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Теорема 2. Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо $F(x)$ є первісна від інтегральної функції $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Вона має назву *формули Ньютона-Лейбніца*.

Формула Ньютона-Лейбніца дає практично зручний метод знаходження визначених інтегралів у тому випадку, коли відома первісна.

Ця формула розширила область застосування визначеного інтеграла в прикладних задачах.

Часто замість $F(b)-F(a)$ пишуть $F(x)\Big|_a^b$. Знак $\Big|_a^b$ називають *знаком вставки*.

Приклад . Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{4}.$$

§ 4. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай дано інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a;b]$. Введемо змінну t за формулою $x=\varphi(t)$.

Твердження. Якщо:

1. $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b$;
2. $\varphi(t)$) і $\varphi'(t)$ неперервні на $[\alpha;\beta]$;
3. $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cdot\cos x\, dx$.

Розв'язання. Провівши заміну $\sin x = t$, отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cdot\cos x \;\; dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$.

Розв'язання. Провівши заміну $x^2+5=t$ отримаємо

$$\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\int_5^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_5^9 = 3-\sqrt{5}.$$

§ 5. Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Нехай U і V –диференційовані функції за змінною x, тоді

$$\int_a^b UdV = (UV)\Big|_a^b - \int_a^b VdU\ . \qquad (1)$$

***Приклад* 1.** Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/6} x\sin xdx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (1), маємо

$$\int_0^{\pi/6} x\sin xdx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6}\cos xdx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/6} + \sin x\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6-\sqrt{3}\pi}{12}\ .$$

***Приклад* 2.** Обчислити інтеграл $\int_1^2 x^3\ln xdx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (1), маємо:

$$\int_1^2 x^3\ln xdx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv = x^3dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v=\frac{x^4}{4}\end{vmatrix} = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3dx = 4\ln 2 - \frac{x^4}{16}\Big|_1^2 =$$

$$= 4\ln 2 - \frac{15}{16}.$$

§ 6. Невласні інтеграли

В цьому параграфі розглянемо інтеграли, коли інтервал інтегрування нескінченний, або підінтегральна функція має розрив на проміжку інтегрування. Такі інтеграли називають *невласними* (невластивими).

Інтеграл з нескінченними межами інтегрування

Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a;\infty)$.

Розглянемо інтеграл $I(b)=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то ця границя називається невласним інтегралом від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,+\infty)$ і позначається $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад **1.** Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. За означенням невласного інтеграла, маємо:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$$

Інтеграл від функції, яка має розрив

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна при $a\le x<c$, а при $x=c$ або невизначена, або має розрив.

Розглянемо границю $\lim\limits_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx$.

Якщо існує границя лівої частини, то інтеграл називають *невласним* збіжним інтегралом.

Приклад **2.** Обчислити $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Розв'язання. Виходячи з попереднього, можна записати

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{b\to1-0}\int\limits_0^b\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\lim_{b\to1-0}2\sqrt{1-x}\Big|_0^b=-\lim_{b\to1-0}2[\sqrt{1-b}-1]=2.$$

Наближені методи обчислення визначених інтегралів

Іноді, коли неможливо знайти первісну, при обчисленні визначених чи невласних інтегралів використовують наближені методи. Найчастіше використовуються такі:

1. Метод прямокутників (лівих, правих):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right).$$

Відрізок $[a;b]$ розбиваємо точками на n рівних частин, причому $x_0 = a$ (для лівих прямокутників), і обчислюємо значення функції в точках поділу $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1),..., y_{n-1} = y(x_{n-1})$.

2. Формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).$$

Для формули трапецій поділ відрізка $[a;b]$ на n рівних частин здійснено так: $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h,..., x_n = b$, причому $h = \frac{b-a}{n}$, а

$y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$.

3. Формула парабол (формула Сімпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}\right].$$

Тут точок поділу $2m$, причому

$$y_i = f(x_i) \text{ і } x_0 = a,\ x_i = x_0 + i \cdot h,\ h = (b-a)/(2m).$$

§ 7. Застосування визначеного інтеграла

1. ***Обчислення площ плоских фігур***

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x) \geq 0$, то, як відомо, площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю OX та прямими $x = a, x = b$, дорівнює

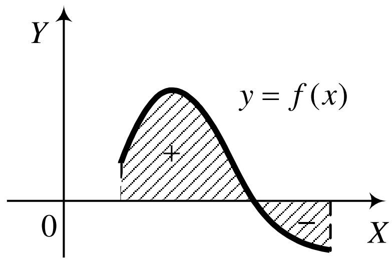


Рис. 48.

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Якщо ж $f(x) \le 0$ на $[a;b]$, то визначений інтеграл (1) дає $S \le 0$. За абсолютною величиною він дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції.

Інтеграл додатний на тому відрізку, де $f(x) \ge 0$, і від'ємний там, де $f(x) \le 0$. Інтеграл на такому проміжку дасть різницю площ, розміщених над і під віссю OX (див. рис.48).

Для того щоб отримати суму площ у звичайному розумінні, треба знайти суму абсолютних величин інтегралів, або обчислити інтеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$

Якщо потрібно обчислити площу, обмежену кривими $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$ і прямими $x = a,\ x = b$ за умови, що $f_2(x) \ge f_1(x)$, досить обчислити інтеграл

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (2)$$

Якщо крива, яка обмежує шукану площу, задана у полярній системі координат, то ця площа обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (2')$$

Якщо крива, яка обмежує шукану площу, задана параметрично, тоді

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \qquad (2'')$$

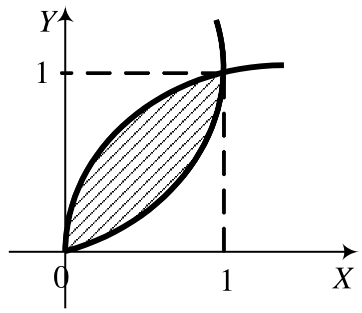


Рис. 49.

***Приклад* 1.** Знайти площу, обмежену кривими $y = \sqrt{x},\ y = x^2$.

Розв'язання. Знаходимо точки перетину кривих (рис.49), прирівнюючи функції $\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Отже, враховуючи (2), маємо $S=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

2. ***Довжина дуги кривої***

Нехай у прямокутній системі координат на площині задано криву $y=f(x)$ (рис. 50). Знайдемо довжину дуги AB кривої, яка розміщена між вертикальними прямими $x=a,\ x=b$.

Під довжиною дуги L розуміємо

$$L=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}\Delta l_i\ ,$$

де $\Delta l_i=\sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2+\left(\Delta y_i\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$.

За теоремою Лагранжа $\Delta l_i=\sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}\cdot\Delta x_i$.

Якщо $f(x)$ і $f'(x)$ є неперервні, то існує границя інтегральної суми

$$L=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}\cdot\Delta x_i=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx\ . \qquad (3)$$

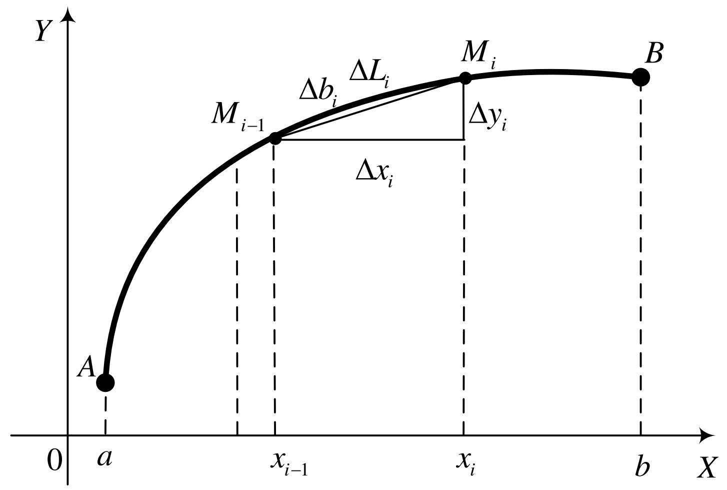


Рис. 50.

Отримали формулу для визначення довжини дуги кривої.

Якщо крива задана *в параметричній формі* $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$, причому $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ неперервні разом зі своїми похідними, тоді при $a=\varphi(\alpha), b=\psi(\beta)$, маємо

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\cdot\varphi'(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,. \qquad (4)$$

Зауважимо, що *довжина дуги просторової кривої* $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$ (якщо ці функції неперервні разом зі своїми похідними) визначається за формулою

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt\,. \qquad (5)$$

Нехай крива задана *в полярних координатах* $\rho=f(\theta)$, де ρ – полярний радіус, а θ – полярний кут.

Довжина дуги кривої, яка задана в полярних координатах, обчислюється за формулою

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\theta\,. \qquad (6)$$

Приклад 2. Знайти довжину кардіоїди $\rho=a(1+\cos\theta)$.

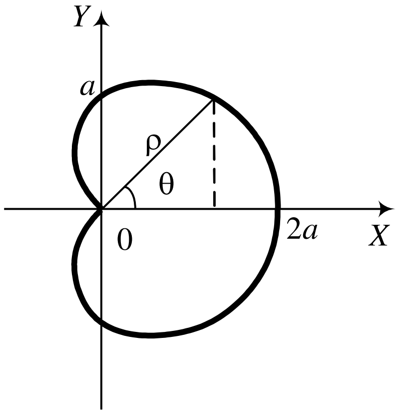


Рис. 51.

Розв'язання. Спочатку побудуємо кардіоїду, надаючи значення куту θ, враховуючи що

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}.$$

Знайдемо $\rho'=-a\sin\theta$. Змінюючи θ від 0 до π, отримаємо половину шуканої довжини кривої (рис. 51).

Отже, повна довжина кардіоїди, згідно з формулою (6), дорівнює:

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\;d\theta=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\;d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=$$

$$= 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

3. ***Об'єм тіла обертання***

Нехай задана неперервна функція $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$. Для зручності візьмемо $f(x) \geq 0$ і побудуємо вже відому криволінійну трапецію, заштриховану на рис. 52. Обертаючи її навколо осі OX, отримаємо тіло обертання. Розіб'ємо $[a;b]$ точками x_i на відрізки Δx_i.

Тоді елементарний об'єм дорівнює $\Delta V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$,

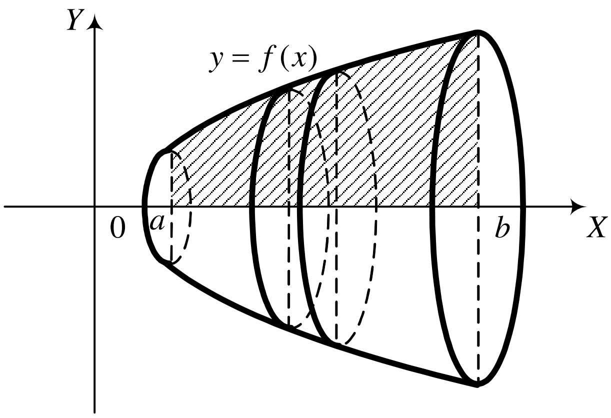


Рис. 52.

($\xi_i \in \Delta x_i$) де $S(\xi_i)$ – площа перерізу в точці ξ_i. Границя інтегральної суми дає об'єм тіла обертання

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i .$$

А отже, $V = \int_a^b S(x)dx$, де $S(x)$ – площа перерізу. Якщо функція $y = f(x)$ задана, то площа перерізу $S(x) = \pi \ y^2 = \pi \ [f(x)]^2$. Тоді об'єм тіла обертання навколо осі OX дорівнює

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx. \qquad (7)$$

Зауваження. Якщо обертання проходить навколо осі OY, тоді справедлива формула

$$V = \pi\int_c^d x^2 dx. \qquad (8)$$

де c і d межі зміни y.

***Приклад* 3.** Знайти об'єм тіла обертання, утвореного обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ навколо осі OX.

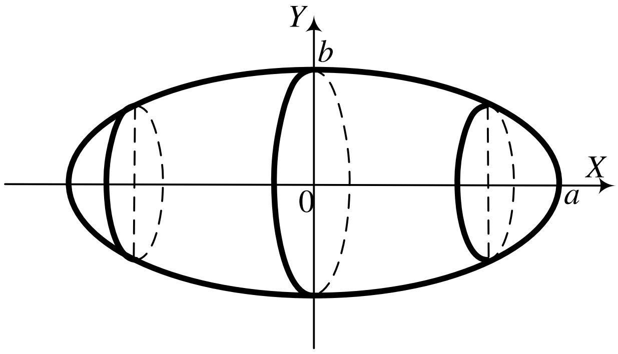


Рис. 53.

Розв'язання. Шуканий об'єм (див.рис. 53) визначається за формулою

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=2\pi\int_{0}^{a}y^2dx.$$

Знайдемо y^2 з рівняння еліпса $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$.

Враховуючи (7), об'єм тіла обертання дорівнює

$$V=2\pi\int_{0}^{a}(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)dx=2\pi\left(b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=2\pi(ab^2-\frac{ab^2}{3})=\frac{4\pi ab^2}{3}.$$

4. *Робота змінної сили*

Задача. Знайти роботу A неперервної зміни сили $F(x)$, прикладеної до матеріальної точки M, при переміщенні вздовж осі OX з точки $x=a$ в точку $x=b$, вважаючи, що напрям сили збігається з напрямом переміщення.

Розв'язання. Нехай точка M переміщається із точки x в точку $x+dx$. На цьому проміжку силу $F(x)$ наближено можна вважати сталою, тому елементарна робота сили дорівнює $dA=F(x)dx$. Інтегруючи цей вираз у межах від $x=a$ до $x=b$, отримаємо роботу

$$A=\int_{a}^{b}F(x)dx. \tag{9}$$

***Приклад* 4.** Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100Н розтягує її на 1см?

Розв'язання. Згідно із законом Гука пружна сила F, яка діє на пружину, зростає пропорційно розтягу x пружини, тобто $F = kx$. Для визначення коефіцієнта пропорційності, маємо

$F = 100$Н, $x = 0,01$м. Звідси $100 = k \cdot 0,01$, тобто $k = 10000$. Отже, $F = 10000x$. Тоді шукана робота, згідно з (9), дорівнює

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5(Дж).$$

§ 8. Просте застосування визначеного інтеграла в економіці

В економічних задачах змінні, як правило, змінюються дискретно. Застосування визначеного інтеграла вимагає ідеалізувати математичну модель задачі, вважаючи, що незалежні змінні і функція змінюються неперервно. Наведемо два прості приклади застосування визначеного інтеграла.

***Приклад* 1.** Знайти виробіток P за робочий день тривалістю 8 годин, якщо продуктивність праці протягом дня змінюється за емпіричною формулою

$$P = f(t) = P_0(-0,2t^2 / t_0^2 + 1,6t / t_0 + 3),$$

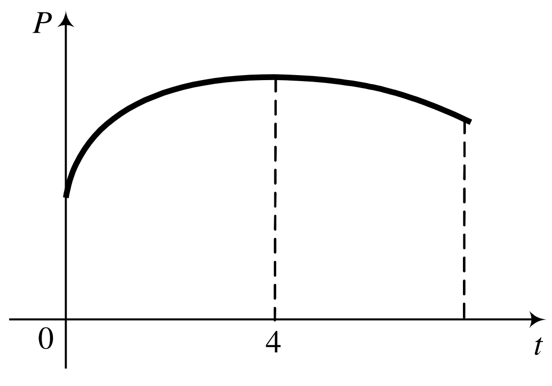


Рис. 54.

де t – час (год), P_0 – розмірність продуктивності (одиниць продукції за год), t_0 – розмірність часу (год). Розмірність t_0 вводиться для компенсації (скорочення) часу на виході. Ця формула відображає реальний процес роботи (рис. 54).

Розв'язання.

Продуктивність спочатку зростає, досягаючи свого максимального значення в середині робочого дня, при $t = 4$, а потім спадає.

При цьому денний виробіток становитиме

$$P = P_0 t_0 \int_0^8 (-0,2t^2 / t_0^2 + 1,6t / t_0 + 3)dt = 41,07 P_0 t_0 = 41,07 \text{ (од. пр.)}.$$

***Приклад* 2.** Виробництво деякого обладнання характеризується темпом росту його випуску

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{1}{y},$$

де Δy – приріст випуску цього обладнання за час Δt, а y – рівень його виробництва за одиницю часу на момент t. Знайти загальну кількість обладнання, виготовленого до моменту часу t, вважаючи що K – відома стала величина, одиниця часу – рік, а в початковий момент часу $t = 0$ рівень річного виробництва обладнання був y_0.

Розв'язання. Вважаючи, що y – неперервна функція від t, знайдемо границю

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y} = \frac{y'}{y} = (\ln y)'.$$

Інтегруючи останній вираз у межах від 0 до t, маємо:

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt, \qquad \text{або} \qquad y = y_0 e^{kt}.$$

Сумарна кількість обладнання, виготовленого за час t, дорівнюватиме визначеному інтегралу

$$Y(t) = \int_0^t y(t)dt = \frac{1}{k} y_0 e^{kt} \Big|_0^t = \frac{1}{k} y_0 (e^{kt} - 1).$$

Тоді, наприклад при $k = 0,05$ та 5% щорічному темпу росту (y_0), загальна кількість обладнання, виготовленого за 10 років,

$$Y(10) = 20 y_0 (e^{0,5} - 1) \approx 13 y_0,$$

причому рівень виробництва за вказаний період збільшився майже на 65 %.

Часто для визначення економічної ефективності капіталовкладень зустрічаються так звані *задачі дисконтування*: визначення початкової суми S_0 через час t за її кінцевою величиною S при відсотковій ставці p.

Вправи

***Завдання* 1.** Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_1^2 (x^2+1)dx$; 2. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$; 3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$; 4. $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$; 5. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$;

6. $\int_1^e \ln x dx$; 7. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 8. $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^5 x dx$; 9. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^3\varphi \, d\varphi$;

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi \, d\varphi$; 11. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin^3\varphi \, d\varphi$; 12. $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$; 13. $\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}dx$;

14. $\int_{-1}^{1} x^2e^{-x}dx$; 15. $\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\, x dx$; 16. $\int_0^R x^3\sqrt{R^2-x^2}dx, R>0,(R>x)$.

17. $\int_1^e \ln^2 x dx$; 18. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Прикладні задачі.

***Завдання* 2.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y=x^2, \quad y^2=x$; 2. $xy=a^2, y=0, \quad x=b, \quad x=2b \ (b>0)$;

3. $y=2x-x^2$ віссю OX; 4. $y^2=2(x-1), \quad x=3$;

5. $y=\frac{1}{x}, \quad x=1, \quad x=e, \quad y=0$; 6. $y=x^2, \quad y=2-x^2$;

7. $y=x^2-1, \quad x=2, \quad x\ge 1, \quad y=0$; 8. $y=\sin 3x, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=\frac{\pi}{3}$;

9. $y=\sin x, \quad y=\sin^3 x, \quad x=0, \quad x=\frac{\pi}{2}$; 10. $y=\arcsin 2x, \quad x=0, \quad y=-\frac{\pi}{2}$;

11. $y=\sin 2x, \quad y=1, \quad x=\frac{\pi}{4}, \quad x=\frac{\pi}{2}$; 12. $x^2-y^2=1, \quad x=2$;

13. $y=0,5\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right), \quad y=0, \quad x=\pm 1$; 14. $y=x(3-x), \quad y=x-3$;

15. $xy=5, \quad x+y=6$; 16. $y=x^3, \quad y=2x, \quad y=x$;

17. $\rho = a \cdot \cos 2\varphi$ (одна вітка); 18. $\rho = a \cdot e^{\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$.

***Завдання* 3**. Визначити довжину дуги кривої:

1. $y^2 = x^3$, яку відтинає пряма $x = 1$;
2. $y = \ln\cos x$, яку відтинають прямі $x = 0, \quad x = \frac{\pi}{6}$;
3. $y^2 = (x+1)^3$, яку відтинає пряма $x = 4$;
4. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, яку відтинає пряма $x = -1$;
5. $y = x^2 - 1$, яку відтинає вісь OX;
6. $y = \ln\sin x$, від $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$;
7. астроїди $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$;
8. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ від $x = 1$ до $x = e$;
9. арки циклоїди $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$;
10. кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos t)$.

***Завдання* 4.** Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням фігури, яка обмежена лініями:

1. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ x = 0\ (x \ge 0)$ навколо осі OX;
2. $y = x - x^2,\ y = 0$ навколо прямої $x = 2$;
3. $y = e^x,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 2$ навколо осі OX;
4. $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ навколо осі OY;
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,\ \ y = 0\ (y \ge 0)$ навколо осі OX;
6. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e$ навколо прямої $x = 1$;
7. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi$ навколо прямої $x = 2\pi$;
8. $y = 2x - x^2, \quad y = 0$ навколо прямої $y = 0$;
9. $y = \frac{4}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$ навколо осі OY;

10. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x=1,\ x=-1,\ y=0$ навколо осі OX.

Завдання **5.** Обчислити невласні інтеграли:

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$; 2. $\int\limits_6^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-4x}$; 3. $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arcctg} x dx$; 4. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x}dx$; 5. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$;

6. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 7. $\int\limits_2^{6} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 8. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$; 9. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2}$; 10. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{(x-1)^2}$.

Завдання **6.** Знайти обсяг виготовленої продукції за проміжок часу $(t_0,\ t_1)$, якщо продуктивність праці описується функцією $f(t)$:

1. $f(t)=2t+t^2$, $(0, 4)$;
2. $f(t)=7+\dfrac{2}{2t+1}$, $(2, 5)$;
3. $f(t)=4t+\dfrac{1}{t+1}$, $(5, 8)$.

Завдання **7.** Задачі підвищеної трудності

1. Балка призматичної форми лежить на двох опорах A і B, є під дією неперервно розподіленого навантаження з інтенсивністю $\eta=q(\xi)$. Визначити перерізаюче зусилля V_x і згинальний момент M_x балки в точці C з абсцисою $x=\xi$, якщо реакція балки в точці A з абсцисою $x=a$ дорівнює F. (Перерізаюче зусилля V_x відносно перерізу Q з абсцисою x називається алгебраїчна сума всіх сил і реакцій опор, які діють вліво від Q. Згинальним моментом M_x перерізу Q називається алгебраїчна сума статичних моментів всіх сил і реакцій опор, які лежать вліво від перерізу відносно його центра ваги. На елемент балки діє навантаження $q(\xi)d\xi$).

2. Тертя вала у підшипнику виражається формулою $F=A\mu\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} pd\alpha$, де $A=2rl-$площа горизонтального перерізу підшипника; $\mu-$коефіцієнт тертя і $p(\alpha)-$тиск. Визначити F, якщо $p(\alpha)=p_0\cos^2\alpha$.

3. Електровоз, який виїхав зі станції через t годин має прискорення $g = 3t^2 - 42t + 80$ (км/год^2). Знайти швидкість і відстань, яку пройшов електровоз від станції через 1 годину після відправлення.

4. Бомба, кинута з початковою швидкістю $v_0 = 0$, падає на землю зі швидкістю $100 м/с.$ З якої висоти скинута бомба, якщо знехтувати опором повітря?

5. Відро циліндричної форми, заповнене маслом, було нахилене так що було видно половину дна. Скільки при цьому вилилось масла, якщо радіус відра $1 дм$, а висота $3 дм.$

6. Безкінечна балка лежить на пружній основі, прогинається сконцентрованою силою $P.$ Сумістимо вісь ОХ з початковим положенням осі балки, а вісь ОУ проведемо через точку 0 прикладення сили і направимо вниз; тоді права частина зігнутої осі запишеться рівнянням $y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha x}(\sin \alpha x + \cos \alpha x)$, $x > 0$, де $\alpha, k -$ деякі сталі. Обчислити потенціальну енергію пружної деформації за формулою $W = EI \int\limits_0^{\infty} (y'')^2 dx$, де $E -$ модуль пружності; $I -$ момент інерції поперечного перерізу.

7. Опорна колона має форму однополого гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, відрізаного площинами $z = -c$ і $z = c$. Знайти об'єм колони.

Відповіді

***До завдання* 1**

1\. $\frac{10}{3}$; 2. $\frac{1}{3}$; 3. 2; 4. 0; 5. 5π; 6. 1; 7. $\operatorname{arctg} 2$; 8. $\frac{1}{4}\ln\frac{4}{e}$;
9\. $\frac{5}{6\sqrt{2}}$; 10. $\frac{2}{3}$; 11. $\frac{2}{15}$; 12. $\frac{3(e-1)}{e}$; 13. 0; 14. $\frac{e^2-5}{e}$;
15\. $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$; 16. $\frac{2}{15}R^5$; 17. $e-2$; 18. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

***До завдання* 2**

1. $\frac{1}{3}$; 2. $a^2\ln 2$; 3. $\frac{4}{3}$; 4. $\frac{16}{3}$; 5. 1; 6. $\frac{8}{3}$; 7. $\frac{4}{3}$; 8. $\frac{2}{3}$; 9. $\frac{1}{3}$; 10. $\frac{1}{2}$;

11. $\frac{\pi-2}{4}$; 12. $2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$; 13. $\frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}$; 14. $\frac{32}{3}$; 15. $12-5\ln 5$;

16. $\frac{3}{2}$; 17. $\frac{\pi a^2}{8}$; 18. $\frac{a^2(e^{4\pi}-1)}{4}$.

До завдання 3

1. $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$; 2. $\frac{1}{2}\ln 3$; 3. $\frac{670}{27}$; 4. $\frac{28}{3}$; 5. $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$;

6. $\ln 3$; 7. $6a$; 8. $\frac{e^2+1}{4}$; 9. $8a$; 10. 16.

До завдання 4

1. $\frac{256}{15}\pi$; 2. $\frac{\pi}{2}$; 3. $\frac{\pi(e^4-5)}{2}$; 4. $\frac{21\pi}{2}$; 5. $\frac{4\pi ac^2}{3}$; 6. $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$;

7. $6\pi^2$; 8. $\frac{16\pi}{15}$; 9. 24π; 10. $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$.

До завдання 5

1. 1; 2. $\frac{1}{4}\ln 3$; 3. розбіжний; 4. розбіжний; 5. розбіжний;

6. $\frac{\pi}{6}$; 7. $6\sqrt[3]{2}$; 8. $\frac{\pi-2}{8}$; 9. $\frac{\pi+2\ln 2}{4}$; 10. розбіжний.

До завдання 6

1. $37\frac{1}{3}$; 2. $21+\ln 2,2$; 3. $78+\ln 1,5$.

До завдання 7

1. $V_x = F-\int_0^x g(\xi)d\xi$; $M_x = F\cdot(x-a)-\int_0^x \xi g(\xi)$.

2. $F=0,25\pi\mu Ap_0$. 3. $v=60км/год$; $L=33,25км$. 4. $h=0,51км$.

5. $3\pi-2\approx 7,42дм^3$. 6. $W=\frac{1}{4k^2}IEP^2\alpha^5$. 7. Площа перерізу $S=\pi ab\left(1+z^2/c^2\right)$, об'єм $V=8\pi abc/3$.

Розділ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. Основні поняття та визначення

***Означення* 1.** *Диференціальним рівнянням* (ДР) називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, шукану функцію та її похідні.

У загальному випадку ДР відносно функції $y(x)$ і змінної x має вигляд

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Часто можна рівняння (1) розв'язати відносно найвищої похідної

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Його називають *рівнянням, розв'язаним відносно старшої похідної*.

Всі ДР можна поділити на два типи:

1) *звичайні диференціальні рівняння*. Це рівняння, які містять шукану функцію тільки одного аргументу, а отже, і похідні за цим аргументом. Саме такі рівняння ми будемо розглядати.

   Наприклад, $y'' - 5y' + 4 = \sin x$, де $y = y(x)$ – функція від x;

2) *диференціальні рівняння в частинних похідних*. У них функція залежить від кількох аргументів, тому вони містять частинні похідні.

   Наприклад, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x,t)$ - рівняння коливань струни.

***Означення* 2.** *Порядком ДР* називається порядок найвищої (старшої) похідної, яка входить у рівняння, наприклад,

$y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$ – ДР першого порядку, а

$y^{(IV)} + 2y'' + y = e^x$ – ДР четвертого порядку.

***Означення* 3.** *Лінійним* називається ДР виду

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = q(x), \tag{3}$$

що містить шукану функцію та її похідні лише в першому степені, як лінійну комбінацію цих величин. Коефіцієнти $p_0, p_1, ..., p_n$ – змінні, що залежать від x, або сталі, $q(x)$ – так звана права частина, яка залежить тільки від x.

Рівняння, які не зводяться до виду (3), називаються *нелінійними*, наприклад $y' + y = xy^3$, $y'' - 4yy' = 0$.

Під терміном «*розв'язок ДР*» розуміють функції, що задовольняють рівняння. Іноді замість виразу «*розв'язати рівняння*» кажуть проінтегрувати рівняння, або знайти загальний інтеграл.

***Означення* 4.** Довільна функція $y = y(x)$ називається *розв'язком рівняння* (2) на деякому проміжку $(a;b)$, якщо при підстановці в це рівняння вона перетворює його в тотожність для всіх $x \in (a;b)$.

Загальний розв'язок ДР (1) містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Щоб розв'язок диференціального рівняння мав конкретний зміст, необхідно задати деякі додаткові (*початкові*) умови:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \ ...\ \ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},\ \ a < x_0 < b. \qquad (4)$$

Задача про відшукання розв'язку ДР, що задовольняє початкові умови (4), називається *задачею Коші*. Інколи задають граничні (*крайові*) умови:

$$y\big|_{x=a} = y(a),\ \ y'\big|_{x=a} = y'(a),\ \ ...$$

$$y\big|_{x=b} = y(b),\ \ y'\big|_{x=b} = y'(b),\ \ ... \qquad (5)$$

***Означення* 5.** Функція виду

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (7)$$

яка залежить від аргументу x та n довільних сталих C_1, C_2 ... , C_n і n разів неперервно–диференційована за змінною x, називається *загальним розв'язком* диференціального рівняння (2), якщо:

1) вона задовольняє рівняння при довільних значеннях сталих C_i, $i = \overline{1,n}$;
2) для довільної сукупності початкових умов з області існування відповідних розв'язків знайдуться такі значення C_{i0}, $i = \overline{1,n}$, при яких $y = \varphi(x_1, C_{10}, ..., C_{n0})$ задовольняє початкові умови.

Загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, y_0, y_0', ... y_0^{(n-1)}), \qquad (8)$$

в якому роль довільних сталих відіграють початкові значення шуканої функції y і її похідних до $(n-1)$-го порядку включно, при $x = x_0$, називається *загальним розв'язком у формі Коші*.

***Означення* 6.** Всяка функція, яка отримується із загального розв'язку (7), при конкретних значеннях $C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}$ сталих інтегрування, називається *частинним розв'язком* відповідного диференціального рівняння.

§ 2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку може бути записане в неявному вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

або розв'язане відносно похідної

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Функція

$$y = \varphi(x, C) \tag{3}$$

називається загальним розв'язком ДР на проміжку $[a;b]$, якщо вона:

1) задовольняє на цьому проміжку рівняння (2) чи (1) при довільному значенні сталої C;

2) для довільної початкової умови $y(x_0) = y_0$ (якщо точка належить області існування розв'язку) можна знайти значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = y(x, C_0)$ задовольняє задану умову.

Під терміном «розв'язок ДР», часто розуміють не тільки певну функцію $y = \varphi(x, C)$, а й її графік (відповідну сім'ю інтегральних кривих).

Наприклад, для рівняння $y' = x$ сім'я інтегральних кривих $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ матиме вигляд (рис. 55).

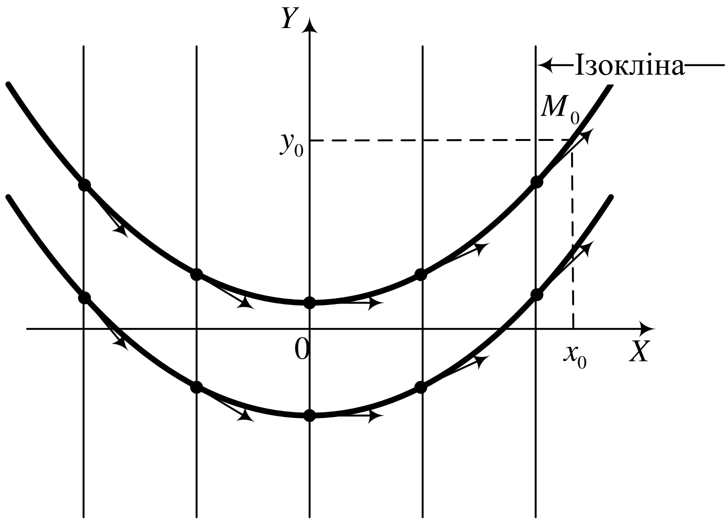


Рис. 55.

Саме ж диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ визначає деяке поле напрямів в області D існування його розв'язків, тому що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в точці $M(x, y)$ дорівнює $k = y'(M) = f(x, y)$.

Задачею Коші для диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ називається задача про відшукання частинного розв'язку цього рівняння, що задовольняє задану початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Теорема існування і єдності розв'язку. Якщо в диференціальному рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ неперервна в деякій плоскій області D і має в цій області обмежену частинну похідну $f_y'(x, y)$, то для довільної точки $(x_0, y_0) \in D$ в деякому інтервалі $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ існує і причому єдиний розв'язок $y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ можна представлене у вигляді $P(x)dx - Q(y)dy = 0$, то його називають *рівнянням з відокремлюваними змінними*, а диференціальне рівняння

$$P(x)dx = Q(y)dy, \tag{4}$$

називають *рівнянням з відокремленими змінними*, де $P(x)$ і $Q(y)$ – функції лише однієї змінної.

Інтегруючи обидві частини (4),

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy. \tag{5}$$

отримаємо загальний розв’язок (загальний інтеграл).

***Приклад* 1.** Розв’язати диференціальне рівняння $(e^x + 2)y' = ye^x$.

Розв’язання. Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, можна відокремити змінні в рівнянні $(e^x + 2)\ \dfrac{dy}{dx} = ye^x$; $\quad \dfrac{e^x}{e^x + 2}\ dx = \dfrac{dy}{y}$. Інтегруючи обидві частини, матимемо

$$\ln y = \int \frac{e^x dx}{e^x + 2}; \qquad \ln y = \ln|e^x + 2| + \ln C.$$

Звідси $y = C(e^x + 2)$ – загальний розв’язок заданого ДР.

Нехай Q – досліджуваний об’єкт (кількість речовини, енергії, живих організмів, молекул і т.д.); k_1 - відносна швидкість спадання даного об’єкта, k_2 - відносна швидкість його росту. Цей процес описується рівнянням

$$\frac{dQ}{dt} = (k_2 - k_1)Q. \tag{6}$$

Якщо Q_0 – початковий стан об’єкта дослідження, то стан об’єкта в довільний момент часу описується розв’язком рівняння (6)

$$Q = Q_0 e^{(k_2 - k_1)t}. \tag{7}$$

Цей результат свідчить про надзвичайно широке застосування в природі і суспільстві процесів експоненціального росту і розвитку, які описуються в простій постановці диференціальним рівнянням виду

$$y' = k\ y\ . \tag{8}$$

Однорідні диференціальні рівняння

Означення 1. Однорідним рівнянням називають рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{9}$$

права частина якого $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру відносно x та y.

Загальний вигляд однорідного диференціального рівняння першого порядку такий:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

При його інтегруванні вводиться нова змінна $u = \frac{y}{x}$. Звідси

$y = ux, \quad y' = u'x + u$. Підставимо це в (10). Отримаємо ДР $u'x + u = \varphi(u)$ в якому змінні відокремлюються таким чином

$$\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u), \quad \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u, \quad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо останнє рівняння а потім повернемося, через зроблену заміну, до "старих" змінних, отримаємо загальний розв'язок ДР рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\quad xy' = x + y.$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x, маємо $y' = 1 + \frac{y}{x}$. Перевіримо функцію на однорідність:

$$f(x, y) = 1 + \frac{y}{x}; \quad f(tx, ty) = 1 + \frac{ty}{tx} = 1 + t^0 \frac{y}{x}.$$

Отже, права частина рівняння є однорідна функція нульового виміру. Введемо нову змінну $u = \frac{y}{x}$, тоді $y = ux$; $y' = u'x + u$. Підставляючи це у вихідне рівняння, отримаємо

$$u'x + u = 1 + u; \quad u' = \frac{1}{x}; \quad u = \int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln C \ .$$

Отже, $u = \ln Cx.$ Повертаючись до "старих" змінних, запишемо загальний розв'язок $y = x \ln Cx.$

Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{11}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – деякі функції, що залежать лише від x, називається лінійним.

Нехай $y = u \cdot v.$ Тоді $y' = u'v + v'u,$ підставляємо це в (11), маємо

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x).$$

У цьому рівнянні в другому і третьому доданку лівої частини виносимо за дужки u і дужку прирівнюємо до нуля:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \tag{12}$$

$$v' + p(x)v = 0; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln v = -\int p(x)dx; \quad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Підставляємо функцію v в рівняння (12), отримаємо друге рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x), \text{ або } u' = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Тому *загальний розв'язок лінійного ДР* має вигляд

$$y = u \cdot v = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \tag{13}$$

***Приклад* 3.** Розв'язати лінійне рівняння $y' + xy = x.$

Розв'язання. Нехай $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + v'u$. Підставимо їх в початкове рівняння. Відповідно до попереднього, отримаємо

$$u'v + v'u + xuv = x; \quad u'v + u(v' + xv) = x;$$

$$\frac{dv}{dx} = -xv; \quad \frac{dv}{v} = -xdx; \quad \ln v = -\frac{x^2}{2}; \quad v = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$u' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x; \quad u' = xe^{\frac{x^2}{2}}; \quad u = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \int e^{\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

Загальний розв'язок початкового ДР дорівнює добутку функцій u та v:

$$y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{14}$$

де n – стала, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (при $n = 1$, (14) є лінійним однорідним рівнянням).

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного таким чином.

Поділимо (14) на y^n

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

та зробимо заміну $z = y^{1-n}$. Тоді $z' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$, або $\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$.

Підставляючи замість $\frac{y'}{y^n}$ в рівняння попередній вираз, маємо

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x), \text{ або } z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Отримане лінійне ДР розв'язується за наведеною раніше схемою. Знайшовши розв'язок z, через проведену заміну $z = y^{1-n}$., повертаємось до функції y.

***Приклад* 4.** Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z = y^{1-n}$ $(n = 2)$ та знайдемо похідні:

$$z = y^{1-2}; \quad z = \frac{1}{y}; \quad y = \frac{1}{z}; \quad y = z^{-1}; \quad y' = -1 \cdot z^{-2} \cdot z' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Перейдемо в початковому рівнянні до змінної z:

$$x\left(-\frac{z'}{z^2}\right) + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}\ln x; \qquad -xz' + z = \ln x.$$

Отже, отримали лінійне диференціальне рівняння, яке розв'язуємо за відомою схемою. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій, і наше рівняння розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}; \quad \text{де} \quad z = uv; \qquad z' = u'v + v'u,$$

$$u'v + v'u - \frac{1}{x}uv = -\frac{\ln x}{x}, \ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}; \qquad \ln v = \ln x; \qquad v = x;$$

$$u' \cdot x = -\frac{\ln x}{x}; \qquad u = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \text{(інтегруємо частинами)} = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C.$$

Тому $z = \ln x + 1 + Cx$.

Повертаючись до y, отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

§ 3. Диференціальні рівняння вищих порядків

Диференціальні рівняння вищих порядків (тобто ДР, що містять похідні вищих порядків $y^{(n)}$, $n \geq 2$) у деяких випадках допускають пониження порядку. Розглянемо найцікавіші випадки:

1. ***Рівняння, розв'язані відносно старшої похідної, права частина яких залежить лише від аргументу x*:**

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1}$$

Щоб розв'язати це рівняння, його потрібно n разів про інтегрувати праву частину.

***Приклад* 1.** Знайти загальний розв'язок ДР $y^{(IV)} = x$.

Розв'язання. Інтегруючи це рівняння послідовно чотири рази, матимемо

$$y''' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 ,$$

$$y'' = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 ,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 ,$$

$$y = \frac{x^5}{120} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 .$$

2. ***Рівняння, які не містять явно шукану функцію і кілька її послідовних похідних*:**

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)} \right) = 0. \tag{2}$$

Введемо нову функцію $p(x) = y^{(k)}$, тоді рівняння (2) матиме вигляд

$$\Phi\left(x, p, p', \ldots p^{(n-k)} \right) = 0. \tag{3}$$

Для рівняння другого порядку

$$F\left(x, y', y'' \right) = 0, \tag{4}$$

вводячи нову змінну $p = y'$, знайдемо $y'' = p'$. Отримаємо рівняння першого порядку

$$\Phi(x, p, p') = 0. \tag{5}$$

***Приклад* 2.** Знайти розв'язок рівняння $xy'' = 2x - y'$, що задовольняє початкові умови $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

Розв'язання. Заміна $y' = p$ зводить вихідне рівняння до такого: $xp' = 2x - p$, або $p' = 2 - \frac{p}{x}$. Це однорідне рівняння, яке розв'язуємо заміною $u = \frac{p}{x}$; $p = ux$; $p' = u'x + u$. Підставляючи це в рівняння, де проведена заміна, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = 2 - u; \quad u'x = 2(1-u); \quad \frac{du}{1-u} = \frac{2dx}{x}.$$

Інтегруючи останнє, матимемо розв'язок

$$\ln|u-1| = -2\ln x + \ln C_1, \; u - 1 = \frac{C_1}{x^2}.$$

Тобто $\frac{p}{x} = 1 + \frac{C_1}{x^2}$; $p = x + \frac{C_1}{x}$.

Враховуючи заміну, маємо рівняння $y' = x + \frac{C_1}{x}$. Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо загальний розв'язок вихідного ДР:

$$y = \int\left(x + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln x + C_2.$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови:

$$\left.\begin{aligned} y(1) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2 \\ y'(1) &= 1 = 1 + C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}.$$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, отримаємо $y = \frac{x^2}{2}$ – шуканий частинний розв'язок.

3. ***Рівняння, які не містять явно незалежну змінну*:**

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (6)$$

Розглянемо частинний випадок рівняння (6) $F\left(y, y', y''\right)=0.$ Введемо нову функцію $p(y)=y'$. Тоді $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'p.$

Аргументом виступає шукана функція, а про змінну x поки що «забуваємо». Підставляємо в рівняння замість y' функцію $p(y)$, а замість y'' функцію $p'(y)p(y)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції $p(y)$:

$$\Phi\left(y, p, p'\right)=0. \tag{7}$$

Розв'язавши рівняння (7), знаходимо загальний розв'язок $p(y)$ який містить одну довільну сталу C_1, а потім підставляючи у знайдений розв'язок замість $p(y)=\frac{dy}{dx}$ отримаємо ДР першого порядку з якого знаходимо шукану функцію $y(x)$.

***Приклад* 3.** Знайти загальний розв'язок ДР другого порядку

$$\left(y+1\right)^2 y''=\left(y'\right)^3$$

та частинний, що задовольняє початкові умови: $y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

Розв'язання. Зробимо заміну $y'=p,$ тоді $y''=pp'.$ Підставляючи в задане рівняння, після скорочення на p, отримаємо ДР першого порядку $\left(y+1\right)^2 p'=p^2$. Розділимо змінні та проінтегруємо:

$$\frac{dp}{p^2}=\frac{dy}{\left(y+1\right)^2}; \qquad \int\frac{dp}{p^2}=\int\frac{dy}{\left(y+1\right)^2}, \qquad -\frac{1}{p}=-\frac{1}{y+1}+C_1.$$

Звідси $p=\frac{y+1}{1-C_1(y+1)}$, а отже, маємо рівняння $y'=\frac{y+1}{1-C_1(y+1)}.$

Інтегруючи останнє рівняння, попередньо розділивши змінні, отримаємо:

$$\frac{1-C_1(y+1)}{y+1}dy=dx, \quad \int\frac{1-C_1(y+1)}{y+1}dy=\int dx\text{, або}$$

$\ln\left|y+1\right|-C_1 y=x+C_2$ – загальний інтеграл ДР.

Знайдемо частинний розв'язок:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = 0, \quad \ln 2 - C_1 \cdot 1 = 0 + C_2; \\ &y_0 = 1, \quad 1 = \frac{1+1}{1 - C_1(1+1)}; \\ &y_0' = 1, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &1 - 2C_1 = 2; \\ &C_1 = -\frac{1}{2}; \\ &C_2 = \ln 2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, частинний інтеграл $\ln\left|y+1\right| + \dfrac{y}{2} = x + \ln 2 + \dfrac{1}{2}.$

§ 4. Елементи загальної теорії лінійних ДР

Рівняння виду

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

яке містить невідому функцію y та її похідні до n-го порядку включно в першому степені, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням* n-го порядку. Коефіцієнти $p_k(x)$ і праву частину (1) $f(x)$ вважаємо неперервними функціями на деякому проміжку $(a;b)$.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння (1) називають *однорідним*.

***Означення* 1.** *Лінійною комбінацією функцій* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ називають функцію

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n. \tag{2}$$

Система функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ називається *лінійно залежною*, якщо можна підібрати числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, що не всі дорівнюють нулю, такі що лінійна комбінація $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0$ для всіх $x \in (a;b)$.

Лінійну *залежність* чи *незалежність* системи функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n-$раз диференційованих на $(a;b)$, можна встановити за допомогою спеціального визначника, який називається *визначником Вронського*:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \ldots\ldots & y_n{}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

***Теорема* 1.** Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні на $(a;b)$, то визначник Вронського (3) тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі. Якщо ж $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in (a;b)$, то система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежна на $(a;b)$. Доведення опускаємо.

Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ частинні розв'язки однорідного ДР (1) $\left(f(x)=0\right)$, тоді лінійна комбінація (2) є також розв'язком цього рівняння.

Довільна сукупність n лінійно незалежних на інтервалі $(a;b)$ частинних розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійного однорідного ДР n-го порядку називається *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння.

***Теорема* 2.** (про структуру загального розв'язку). Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного ДР n-го порядку з неперервними коефіцієнтами $p_k(x), \quad k = \overline{1,n}$, то функція

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k, \qquad a < x < b,$$

де C_k – довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння.

Розглянемо детальніше *лінійні* ДР *другого порядку*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \tag{4}$$

Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \tag{5}$$

Загальний розв'язок рівняння (5) записують у вигляді лінійної комбінації його частинних розв'язків

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{6}$$

де частинні розв'язки $y_1(x), y_2(x)$ мають бути лінійно незалежними, тобто утворювати фундаментальну систему. Для цього досить, щоб

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{або} \quad \frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4) складається із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (5), плюс довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Це записують таким чином:

$$y = \overline{y}_{\text{з.о.}} + \tilde{y}_{\text{ч.н.}} \quad \text{або} \quad y = \overline{y} + \tilde{y}$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ неоднорідного ДР можна шукати в тому ж виді, що й загальний розв'язок, вважаючи сталі інтегрування змінними величинами, тобто скористатись *методом Лагранжа варіації сталих*.

Відповідно до цього методу, частинний розв'язок записують у вигляді

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{7}$$

і складають відповідну систему для знаходження сталих

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}. \tag{8}$$

Розв'язавши систему (8), отримаємо

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix},$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Інтегруючи останні рівності, маємо

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx, C_2 = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx.$$

Підставляючи знайдені $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в (7), запишемо частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння (4).

§ 5. Лінійні однорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i, $i = \overline{1,n}$ дійсні числа, $f(x)$ – права частина, яка залежить лише від аргументу x.

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{2}$$

Для відшукання частинних розв'язків рівняння (2) необхідно встановити їх можливий вигляд, виходячи з того, що доданки в лівій частині повинні взаємно знищуватись. Властивість подібності зі своїми похідними має функція $y = e^{kx}$. Звідси $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}, ..., y^{(n)} = k^n e^{kx}$. Підставляючи їх у (2), отримаємо

$$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то необхідно, щоб другий співмножник дорівнював нулю.

Отримуємо так зване *характеристичне рівняння*:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0. \quad (3)$$

Якщо рівняння (3) має корені $k_1, k_2, ..., k_n$ дійсні і різні, то функції $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$ є лінійно незалежні і вони є частинними розв'язками рівняння (2), тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому загальний розв'язок рівняння (2) є їх лінійна комбінація:

$$Y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{k_n x}. \quad (4)$$

Якщо корені характеристичного рівняння (3) комплексно–спряжені і різні (немає кратних) та оскільки комплексно-значні функції $e^{(\alpha+\beta i)x}, e^{(\alpha-\beta i)x}$ є лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (2), то їх лінійні комбінації

$$\frac{1}{2}(e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

теж є розв'язками цього рівняння.

Отже, кожній парі комплексно–спряжених коренів відповідає пара лінійно незалежних частинних розв'язків, які утворюють фундаментальну систему, і загальний розв'язок записується як їх лінійна комбінація.

У випадку ν-кратних дійсних коренів характеристичного рівняння лінійно незалежною є система функцій – частинних розв'язків

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, ..., x^{\nu-1}e^{kx}$$

при $k_1 = k_2 = k_3 = ... = k_\nu = k$ (кратність кореня k дорівнює ν).

Якщо ν–кратним є комплексний корінь $k = a + bi$, то, скориставшись формулою Ейлера, можна записати системи лінійно незалежних дійсних розв'язків:

$$e^{ax}\cos bx, \ xe^{ax}\cos bx, \ x^2 e^{ax}\cos bx, ..., x^{\nu-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx, \ xe^{ax}\sin bx, \ x^2 e^{ax}\sin bx, ..., x^{\nu-1}e^{ax}\sin bx.$$

Тепер можна побудувати фундаментальну систему розв'язків і записати загальний розв'язок рівняння (2).

***Приклад* 1.** Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 3y' + 2y = 0$ та частинний, що задовольняє початкові умови $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені $k^2 - 3k + 2 = 0$. За теоремою Вієта корені $k_1 = 2, \ k_2 = 1$. Тоді загальний розв'язок буде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x .$$

Щоб знайти частинний розв'язок, необхідно знайти y' та підставити початкові умови $y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, \ \ C_2 = 1.$$

Підставляючи отримані C_1 і C_2 в загальний розв'язок, отримаємо шуканий частинний $y = e^{2x} + e^x$.

***Приклад* 2.** Знайти загальний розв'язок ДР $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$, $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i.$ Отриманим комплексно-спряженим кореням характеристичного рівняння відповідає фундаментальна система розв'язків $e^{-x} \cos 2x, \ e^{-x} \sin 2x$.

Тоді загальний розв'язок заданого ДР має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x .$$

§ 6. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо спочатку неоднорідні лінійні ДР другого порядку

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{1}$$

з правою частиною $f(x)$ спеціального виду.

Під правою частиною спеціального виду будемо розуміють функцію

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx), \tag{2}$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени n-го і m-го степеня відповідно.

Часткові випадки:

$f(x) = e^{ax} P_n(x), \ f(x) = A\cos bx + B\sin bx, \ f(x) = e^{ax}$ отримують із (2) при відповідній заміні параметрів a, b, n, m нулями.

Загальний розв'язок рівняння (1) складається із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння плюс довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

де $\bar{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $\tilde{y}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Розглянемо кілька часткових випадків правої частини.

I. Нехай права частина рівняння (1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{ax}, \tag{3}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня. Тоді можливі випадки:

а) Число a не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + a_1k + a_2 = 0$.

У цьому випадку частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$\tilde{y} = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{ax} = Q_n(x)\ e^{ax}. \tag{4}$$

Дійсно, підставляючи $\tilde{y}$ у рівняння (1), попередньо знайшовши похідні $\tilde{y}'$ та $\tilde{y}''$ і скорочуючи всі члени на множник e^{ax}, будемо мати

$$\tilde{y}' = Q_n'\left(x\right)e^{ax} + aQ_n(x)e^{ax};$$

$$\tilde{y}'' = Q_n''(x)e^{ax} + 2aQ_n'(x)e^{ax} + a^2Q_n(x)e^{ax};$$

$$Q_n''(x) + (2a + a_1)Q_n'(x) + (a^2 + aa_1 + a_2)Q_n(x) = P_n(x), \tag{5}$$

причому $Q_n(x)$ – многочлен степеня n, $Q_n'(x)$ – многочлен степеня $n-1$, $Q_n''(x)$ – многочлен степеня $n-2$.

Таким чином, зліва і справа від знака рівності є многочлени n-го степеня. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x (кількість невідомих $n+1$) отримаємо систему із $n+1$ рівнянь для обчислення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \ldots, A_n$;

б) число a є простий (однократний) корінь характеристичного рівняння.

Якщо б частинний розв'язок ми шукали, як раніше, у формі (4), то в рівності (5) зліва був би многочлен ($n-1$) – го степеня, оскільки коефіцієнт при $Q_n(x)$, ($a^2 + a_1a + a_2$) дорівнює нулю, а многочлени Q_n', Q_n'' мають степінь, менший від n. Отже, ні при яких $A_0, A_1, \ldots, A_n$ рівність (5) не буде тотожністю. Тому в цьому випадку частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді многочлена $(n+1)$ – го степеня, але без вільного члена (оскільки вільний член цього многочлена зникає при диференціюванні), тобто

$$\tilde{y}' = xQ_n(x)e^{ax};$$

в) число a є двократний корінь характеристичного рівняння.

Тоді в результаті підстановки в ДР функції $Q_n(x)e^{ax}$ степінь многочлена знижується на дві одиниці.

Дійсно, якщо a – корінь характеристичного рівняння, то $a^2 + a_1 a + a_2 = 0$, крім цього, оскільки a – двократний корінь, то $2a = -a_1$ (згідно з теоремою Вієта $a + a = -a_1$). Отже, $2a + a_1 = 0$.

Тоді в лівій частині (5) залишається $Q_n''(x)$, тобто многочлен $(n-2)$–го степеня. Для того щоб в результаті підстановки отримати многочлен степеня n, потрібно частинний розв'язок шукати у вигляді добутку e^{ax} на многочлен $(n+2)$–го степеня. При цьому вільний член цього многочлена та член у першому степені зникнуть при диференціюванні, тому їх не варто включати в частинний розв'язок.

Отже, частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{ax}.$$

***Приклад* 1.** Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + 9y = 0$. Корені його характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm 3i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння дорівнює

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Оскільки коефіцієнт 3 в показнику степеня не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді добутку загального квадратного тричлена та функції e^{3x}

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Підставляючи його в ДР, маємо

$$\left[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)\right]e^{3x} = (x^2+1)e^{3x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів

$$\begin{cases} 18A = 1, \\ 12A + 18B = 0, \\ 2A + 6B + 18C = 1. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $A = \frac{1}{18}; B = -\frac{1}{27}; C = \frac{5}{81}$. Тепер запишемо частинний розв'язок

$$\tilde{y} = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}.$$

Отже, загальний розв'язок ДР дорівнює

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}.$$

II. Нехай права частини рівняння (1) має вигляд (2):

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx).$$

Вид частинного розв'язку визначається:

а) якщо число $a + bi$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = U(x)e^{ax}\cos bx + V(x)e^{ax}\sin bx,$$

де $U(x)$ і $V(x)$ – многочлени, степінь яких дорівнює найвищому степеню многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$;

б) якщо число $a + bi$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = x\left[U(x)e^{ax}\cos bx + V(x)e^{ax}\sin bx \right].$$

Слід зауважити, що вказані в п. а) і п. б) вигляди частинних розв'язків залишаються такими ж і в тому випадку, коли права частина рівняння (1) має вигляд $P_n(x)e^{ax}\cos bx$ або $Q_m(x)e^{ax}\sin bx$.

Розглянемо важливий частинний випадок. Нехай права частина дорівнює

$$f(x) = M\cos bx + N\sin bx,$$

де M і N –сталі числа. Розглянемо випадки:

а) якщо bi не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = A\cos bx + B\sin bx;$$

б) якщо bi є коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$\tilde{y} = x(A\cos bx + B\sin bx).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$ має корені $k_1 = -1 + 2i,\ k_2 = -1 - 2i$. Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння дорівнює

$$\overline{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Визначимо коефіцієнти A і B, підставляючи $\tilde{y}$ в задане рівняння. Маємо

$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x,\ \tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x,$$

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A і B:

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 2 \\ -2A - B + 5B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 2 \\ -2A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/5, \\ B = 1/5. \end{cases}$$

Отже, $\tilde{y} = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x.$

Отримали загальний розв'язок ДР

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Для знаходження загального розв'язку ДР n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (6)$$

спочатку розв'язують відповідне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (7)$$

Загальний розв'язок ДР (6) складається із загального розв'язку рівняння (7), плюс будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6), тобто

$$y = \overline{y} + \tilde{y}.$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ шукають за виглядом функції $f(x)$, а саме:

1. Якщо в правій частині рівняння (6) функція $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, тоді можливі два випадки:

а) число a не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = Q_n(x)e^{ax},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що й $P_n(x)$, але з невизначеними поки що коефіцієнтами;

б) число a є коренем кратності ν характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок можна шукати у вигляді

$$\tilde{y} = x^{\nu}Q_n(x)e^{ax},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що й $P_n(x)$.

2. Якщо права частина рівняння (6) має вигляд

$$f(x) = M\cos bx + N\sin bx,$$

де M і N – сталі числа, тоді можливі випадки:

а) число bi не є коренем характеристичного рівняння, і частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = A\cos bx + B\sin bx,$$

де A і B – поки що невизначені коефіцієнти;

б) число bi є корінь характеристичного рівняння кратності ν, тоді частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = x^{\nu}(A\cos bx + B\sin bx).$$

III. Нехай $f(x) = P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_m(x)e^{ax}\sin bx$.

Тоді:

а) якщо число $a+bi$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = U(x)e^{ax}\cos bx + V(x)e^{ax}\sin bx,$$

де $U(x)$ і $V(x)$ – многочлени, степінь яких дорівнює найвищому із степенів многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$;

б) якщо число $a+bi$ є коренем кратності ν характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = x^{\nu}[U(x)e^{ax}\cos bx + V(x)e^{ax}\sin bx],$$

де $U(x)$ і $V(x)$ мають той самий зміст, що в п. **а)**.

***Приклад* 3**. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = -1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

оскільки $2+i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x).$$

Підставляючи його в задане рівняння, після зведення подібних членів, маємо

$$(2A+4B)e^{2x}\cos x + (-4A+2B)e^{2x}\sin x = 3e^{2x}\cos x.$$

Отримана система $\begin{cases} 2A+4B=3 \\ -4A+2B=0 \end{cases}$ має розв'язок $A = \dfrac{3}{10}$; $B = \dfrac{3}{5}$.

Запишемо частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$\tilde{y} = e^{2x}\left(0,3\cos x + 0,6\sin x\right).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння є сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x}(0,3\cos x + 0,6\sin x).$$

***Приклад* 5.** Розв'язати ДР рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язання. Розглянемо два допоміжні рівняння:

$y'' + y = x$, $y'' + y = -\sin 2x$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -\sin 2x$.

За коренями характеристичного рівняння $k^2 + 1 = 0$, $(k_{1,2} = \pm i)$ запишемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Безпосередньою підстановкою легко переконатись, що частинними розв'язками першого та другого допоміжних рівнянь є функції $\tilde{y}_1 = x$ та $\tilde{y}_2 = \dfrac{1}{3}\sin 2x$. Згідно зауваження 3, частинний розв'язок заданого ДР дорівнює $\tilde{y} = x + \dfrac{1}{3}\sin 2x$. Тоді загальний розв'язок дорівнює:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{3}\sin 2x .$$

§ 7. Найпростіші системи лінійних диференціальних рівнянь

Сукупність співвідношень

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ \quad .... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де x – незалежна змінна, $y_1, y_2, ..., y_n$ – невідомі функції від x, а $F_1, F_2, ..., F_n$ – відомі функції, називається *системою диференціальних рівнянь першого порядку*. Якщо систему (1) можна розв'язати відносно похідних, то така система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ ...., \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{cases} \qquad (2)$$

називається *нормальною*.

Позначимо незалежну змінну t і розглянемо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z), \end{cases} \qquad (3)$$

з розв'язками

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) . \qquad (4)$$

Тоді (4) є рівнянням траєкторії, яка записана у параметричній формі.

Систему (3) називають динамічною, а простір $x, y, z-$ фазовим. Якщо права частина (3) явно не залежить від t, то в довільний момент часу напрям швидкості у даній точці буде однаковий. У зв'язку з цим такі рівняння називають стаціонарними (автономними).

Нехай праві частини системи (2) є лінійні функції своїх аргументів, а також коефіцієнти при цих аргументах константи. Тоді матимемо лінійну *систему диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами*. Така система зводиться до одного рівняння $n-$го порядку.

Для систем диференціальних рівнянь справедлива також теорема Коші про існування та єдність розв'язку.

Розглянемо приклади розв'язування найпростіших систем.

***Приклад* 1.** Знайти загальний та частинний розв'язки системи ДР

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Розв'язання. Дана система є однорідною (права частина не містить t у явній формі). Іноді похідну за змінною t позначають $\dot{x}$. Тому наша система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t, тоді $\ddot{x} = 5\dot{x} + 4\dot{y}$. Підставимо сюди замість $\dot{y} = 2x + 3y$, та замість $y = \dfrac{\dot{x} - 5x}{4}$, таким чином виключимо $\dot{y}$ та y з рівняння. Розв'яжемо отримане ДР

$$\ddot{x} - 8\dot{x} + 7x = 0, \quad k^2 - 8k + 7 = 0, \quad k_1 = 1, \ k_2 = 7.$$

Загальний розв'язок цього рівняння $x = C_1e^t + C_2e^{7t}$. Звідси $\dot{x} = C_1e^t + 7C_2e^{7t}$ і тоді $y = -C_1e^t + \dfrac{1}{2}C_2e^{7t}$. Отже, маємо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{7t}, \\ y = -C_1e^t + \dfrac{1}{2}C_2e^{7t}. \end{cases}$$

Підставимо у загальний розв'язок початкові умови $x(0)=1, \quad y(0)=2$, отримаємо систему для знаходження сталих

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ -C_1+\dfrac{1}{2}C_2=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1, \\ C_2=2. \end{cases}$$

Знайдені сталі підставимо у загальний розв'язок, отримаємо частинний розв'язок

$$\begin{cases} x=-e^t+2e^{7t}, \\ y=e^t+e^{7t}. \end{cases}$$

***Приклад* 2.** Знайти загальний розв'язок системи ДР

$$\begin{cases} \dot{x}=x+y, \\ \dot{y}=x+y+t. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є неоднорідною (при виключенні однієї із функцій із системи отримаємо неоднорідне ДР другого порядку). Продиференціюємо перше рівняння системи та проведемо відповідні підстановки

$$\ddot{x}=\dot{x}+\dot{y}, \quad \ddot{x}=\dot{x}+x+y+t, \quad \ddot{x}=\dot{x}+\dot{x}+t, \quad \ddot{x}-2\dot{x}=t\,.$$

Характеристичне рівняння $k^2-2k=0$, останнього ДР, має корені $k_1=0, \quad k_2=2$. Отже, $\overline{x}=C_1+C_2e^{2x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $x=t\left(At+B\right)$. Тоді $\dot{x}=2At+B, \ddot{x}=2A$. Для знаходження коефіцієнтів A і B, підставимо знайдені похідні у неоднорідне рівняння та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t

$$2A-4At-2B=t, \quad -4A=1, \quad A=-\frac{1}{4}, \quad A=B=-\frac{1}{4}.$$

Таким чином, маємо $x=C_1+C_2e^{2x}-\dfrac{1}{4}x(x+1)$.

Знайдемо y із першого рівняння системи $y=\dot{x}-x$. Підставимо знайдене x та $\dot{x}=2C_2e^{2x}-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$, отримаємо $y=C_2e^{2x}-C_1+\dfrac{1}{4}x(x-1)-\dfrac{1}{4}$.

Остаточно запишемо розв'язок системи ДР

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{2x} - \dfrac{1}{4} x(x+1), \\ y = C_2 e^{2x} - C_1 + \dfrac{1}{4} x(x-1) - \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

§ 8. Електромагнітні коливання в контурі

У цьому параграфі розглянемо практичне застосування апарату диференціальних рівнянь при розв'язуванні задачі електротехніки.

Розглянемо електричний коливальний контур, який складається із конденсатора ємністю C, котушки індуктивності з коефіцієнтом самоіндукції L і активного опору R, які включені послідовно, та джерела постійного струму. У контурі проходить струм до тих пір, поки різниця потенціалів на конденсаторі не вирівняється з е.р.с. джерела струму і компенсує цю е.р.с. Якщо такий контур підключити до джерела змінного струму, то конденсатор буде неперервно підзаряджатися і в контурі неперервно буде проходити змінний струм. При цьому в котушці збуджується е.р.с. самоіндукції $E_S = -L\dfrac{dI}{dt}$, де $\dfrac{dI}{dt}$ – швидкість зміни струму в ланцюгу. Сумарна е.р.с. в контурі має дорівнювати сумі спадів потенціалів в ланцюгу контуру, яка дорівнює різниці потенціалів V на пластинах конденсатора і спаду потенціалу на активному опорі, тобто

$$V + IR = E - L\frac{dI}{dt}, \tag{1}$$

де E – е.р.с. зовнішнього джерела струму.

Заряд конденсатора дорівнює $Q = VC$, а струм $I = \dfrac{dQ}{dt} = C\dfrac{dV}{dt}$. Тому (1) можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E. \tag{2}$$

Рівняння (2) описує закон зміни заряду конденсатора в часі.

Якщо продиференціювати рівняння (2), то отримаємо аналогічне рівняння відносно струму в контурі

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E'. \tag{3}$$

Якщо конденсатор зарядити до деякої різниці потенціалів, а потім відключити зовнішнє джерело енергії і вимикачем замкнути коло, то в контурі потече струм. Зміна заряду конденсатора описується тоді однорідним диференціальним рівнянням власних коливань (права частина рівняння (2) дорівнює нулю).

Для більшості джерел змінного електричного струму характерним є те, що зовнішнє джерело дає гармонійний закон зміни е.р.с. $E = E_0 \sin \omega t$. Тому такі процеси описуються неоднорідними диференціальними рівняннями і маємо вимушені коливання в контурі.

При досить великому t розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{4}$$

де $I_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}$, φ_0 – початкова фаза вимушених коливань.

Величина $\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = Z$ називається повним або ефективним опором коливального контуру і включає R –активний, ємнісний $\dfrac{1}{\omega C}$ і індуктивний ωL опори.

§ 9. Застосування апарату диференціальних рівнянь в економіці

Розглянемо деякі приклади застосування теорії диференціальних рівнянь в неперервних моделях економіки, де незалежною змінною є час t. Вони і є предметом дослідження *економічної динаміки*.

Модель природного росту випуску продукції. *Нехай деяка продукція продається за фіксованою ціною* P, $Q(t)$ *– кількість продукції, реалізованої на момент* t. *Тоді дохід складає* $P \cdot Q(t)$. *Нехай частина доходу реалізується на інвестиції у виробництво реалізованої продукції, тобто*

$$J(t) = m \cdot P \cdot Q(t), \tag{1}$$

де m – норма інвестиції, стале число ($0 < m < 1$).

Якщо вважати, що ринок ненасичений (повна реалізація продукції), то в результаті розширеного виробництва отримаємо приріст доходу, частина якого знову піде на розширення випуску продукції. Це приведе до росту швидкості випуску продукції (акселерації), причому швидкість випуску продукції пропорційна збільшенню інвестицій

$$Q' = LJ(t), \tag{2}$$

де ${}^{1}\!/\!{}_{L}$ – норма акселерації. Підставляючи (2) в (1), отримаємо

$$Q' = kQ, \ (k = L \cdot m \cdot P). \tag{3}$$

Диференціальне рівняння (3) є рівнянням з відокремлюваними змінними, яке має загальний розв'язок

$$Q = Ce^{kt},$$

де C – довільна стала.

Якщо в початковий момент часу $t = t_0$ задано обсяг випуску продукції Q_0, то $Q_0 = Ce^{kt_0}$, звідки $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Отримали частинний розв'язок

$$Q = Q_0 \ e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

Зауважимо, що ця математична модель є загальною. Так, процес розмноження бактерій, у результаті біологічних дослідів, також описується рівнянням (3). Процес радіоактивного розпаду підпорядковується закономірності (4).

Ріст випуску продукції в умовах конкуренції. Будемо вважати, що ринок ненасичений. Нехай $P = P(Q)$ – спадна функція, тобто збільшення Q – обсягу випуску продукції – веде до спадання її ціни, тому $\dfrac{dP}{dQ} < 0$. Тепер із формул (1)–(3), отримуємо нелінійне ДР першого порядку з відокремлюваними змінними

$$Q' = \alpha \ P(Q) \ Q, \ \alpha = Lm. \tag{5}$$

Оскільки всі множники в правій частині (5) додатні, то $Q' > 0$, тобто $Q(t)$ – зростаюча функція. Характер зростаючої функції визначається її другою похідною. Із (5) маємо

$$Q'' = \alpha(Q'P(Q) + Q\frac{dP}{dQ}Q') = \alpha Q'(P + \frac{dP}{dQ}Q).$$

Ввівши еластичність попиту $E(p) = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$, ця рівність набуде вигляду $Q'' = \alpha Q' P(1 + \frac{dP}{dQ}\ \frac{Q}{P})$.

Оскільки $\frac{dP}{dQ} < 0$, а отже, $E < 0$, отримаємо

$$Q'' = \alpha\, Q' P \left(1 - \frac{1}{|E|}\right). \qquad (6)$$

Із рівняння (6) випливає, що при еластичному попиті, тобто коли $|E| > 1$, $Q'' > 0$ і графік функції $Q(t)$ опуклий вниз, спостерігається прогресивний ріст.

При нееластичному попиті $|E| < 1$, $Q'' < 0$ – графік функції $Q(t)$ випуклий вверх, це вказує на сповільнений ріст (насичення ринку).

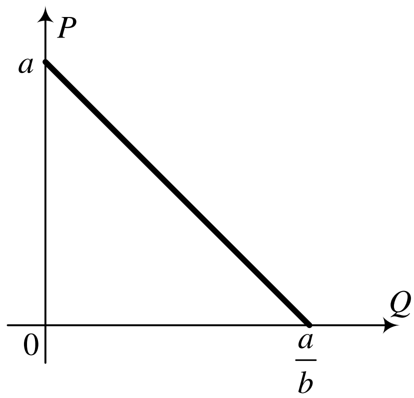


Рис. 56.

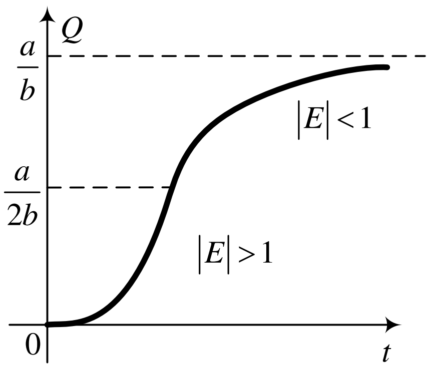


Рис. 57.

Для простоти залежність $P(Q)$ візьмемо лінійною (див. рис. 56).

$$P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, b > 0. \qquad (7)$$

Тоді рівняння (5) набуває вигляду

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q, \qquad (8)$$

звідки

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ). \qquad (9)$$

Із співвідношень (8) і (9) отримаємо $Q' = 0$ при $Q = 0$ і при $Q = \frac{a}{b}$, причому $Q'' > 0$ при $Q < \frac{a}{2b}$ і $Q'' < 0$ при $Q > \frac{a}{2b}$.

Отже, $Q = \frac{a}{2b}$ – точка перегину графіка функції $Q = Q(t)$.

Інтегральна крива (див. рис. 57) називається *логістичною кривою*.

Аналогічні криві характеризують і інші процеси. Наприклад, розмноження бактерій в обмеженому середовищі, динаміка епідемій всередині обмеженої системи біологічних організмів і т. д.

Динамічна модель Кейнса. Розглянемо найпростішу балансову модель, яка охоплює основні компоненти динаміки витратної і дохідної частин економіки.

Нехай $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $J(t)$ – відповідно:
$Y(t)$ – національний дохід; $E(t)$ – державні витрати; $S(t)$ – споживання; $J(t)$ – інвестиції. Усі ці величини розглядають як функції часу.

Тоді справедливі співвідношення:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + J(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ J(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \qquad (10)$$

де $a(t)$ – коефіцієнт схильності до споживання ($0 < a(t) < 1$); $b(t)$ – автономне (залишкове) споживання; $k(t)$ – норма акселерації.

Усі функції, що входять у (10), вважаються додатними. Пояснимо зміст цих рівнянь. Сума всіх витрат має дорівнювати національному доходу – перше рівняння. Загальне споживання складається з внутрішнього споживання частини національного доходу в народному господарстві плюс залишкове споживання – друге рівняння. Розмір інвестицій не може бути довільним. Він визначається добутком норми акселерації (*величина*, *якою характеризується рівень технології і інфраструктури певної держави*) на граничний національний дохід.

Будемо вважати, що функції $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ задані. Потрібно знайти динаміку національного доходу $Y(t)$.

Підставивши друге і третє рівняння системи (10) в перше, отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$Y'(t) = \frac{1-a(t)}{k(t)} \cdot Y(t) - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \qquad (11)$$

Якщо взяти a, b, k – сталими, то рівняння (11) спрощується до випадку лінійного диференціального рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$Y' = \frac{1-a}{k} Y - \frac{b+E}{k}. \qquad (12)$$

Частинний розв'язок рівняння (12) (так званий *рівноважний* розв'язок, коли $Y'=0$) такий:

$$Y_p = \frac{b+ \quad E}{1-a}. \qquad (13)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (12)

$$Y(t) = c \cdot e^{\frac{1-a}{k}t} + \frac{b+E}{1-a}. \qquad (14)$$

Інтегральні криві (14) зображені на рис. 58.

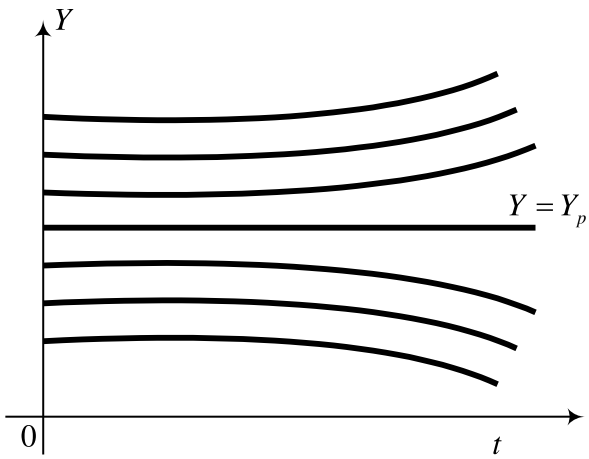


Рис. 58.

Інтегральні криві (див. рис. 58) характеризують еволюцію національного доходу.

Якщо в початковий момент часу $Y_0 < Y_p$, то $C = Y_0 - Y_p < 0$ і криві йдуть вниз від рівноважного розв'язку, то національний дохід з часом спадає.

Якщо ж $Y_0 > Y_p$, то $C > 0$ і інтегральні криві йдуть вверх від рівноважної прямої $Y = Y_p$, то національних дохід з часом зростає.

Вправи

***Завдання* 1**. Проінтегрувати ДР з відокремлюваними змінними:

1. $y^2dx - xdy = 0$;
2. $(1+x)ydx + (1-x)xdy = 0$;

3. $(1+x)dx-(1-x)dy=0$;

4. $(y-a)dx+x^2dy=0$;

5. $ydx-(x^2-a^2)dy=0$;

6. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1+x^2}{1+y^2}$;

7. $d\rho+\rho\operatorname{tg}\theta d\theta=0$;

8. $(1+x^2)dy-\sqrt{1-y^2}dx=0$;

9. $(x-y^2x)dx+(y-x^2y)dy=0$;

10. $\sin\theta\cos\varphi d\theta-\cos\theta\sin\varphi d\varphi=0$.

***Завдання* 2**. Знайти загальний розв’язок однорідних ДР:

1. $y'=\dfrac{8x+5y}{5x-2y}$;

2. $y'=\dfrac{y}{x}-\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

3. $xy'+y\ln\dfrac{y}{x}=0$;

4. $xy'-y-\sqrt{x^2+y^2}=0$;

5. $4xyy'-y^2-3x^2=0$;

6. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$;

7. $2x^2y'+x^2+y^2=0$;

8. $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$;

9. $xyy'=8x^2+y^2$;

10. $(t-s)dt+tds=0$;

11. $xy^2y'=x^3+y^3$;

12. $xy'=y+\sqrt{25x^2-y^2}$;

13. $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$;

14. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}$.

***Завдання* 3.** Проінтегрувати лінійні ДР та рівняння Бернуллі:

1. $xy'-y=x\sqrt{x}$;

2. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x}$;

3. $y'\sin x-y=\sin x\sin\dfrac{x}{2}$;

4. $\sqrt{1-x^2}(xy'+y)=1$;

5. $xy'+y=\ln x+1$;

6. $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$;

7. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

8. $y'-a\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}$;

9. $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$;

10. $y'\cos x+y\sin x=1$;

11. $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$;

12. $y'-\dfrac{n}{x}y=e^xx^n$;

13. $y' + y = \dfrac{1}{e^x}$;

14. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$;

15. $y' + xy = x^3y^3$;

16. $xy' + y + xy^2 = 0$;

17. $y' - xy + y^3e^{-x^2} = 0$;

18. $y' + xy = xy^3$;

19. $xy' + y = y^2\ln x$;

20. $(1-x^2)y' - xy - xy^2 = 0$.

Завдання **4.** Розв'язати ДР вищих порядків, які допускають пониження порядку:

1. $y^{(IV)} = x$;

2. $y'' = \ln x$;

3. $y'' = \sin 2x$;

4. $xy'' - 2y' = 0$;

5. $y'' + (y')^3e^y = 0$;

6. $y''(y-4) = (y')^2$;

7. $y''\cos x + y'\sin x = 1$;

8. $x^5y'' + x^4y' + 3 = 0$;

9. $y''\mathrm{tg}y = 2(y')^2$;

10. $xy'' - y' = x^2e^x$;

11. $xy'' - y'\ln\dfrac{y'}{x} = 0$;

12. $y''\mathrm{tg}x + y' = 1$;

13. $xy'' - y' = x^2$;

14. $xy'' = y' + 5$;

15. $y'' - y'e^y = 0$;

16. $y'' - 2y'\mathrm{ctg}x = \sin^3 x$.

Завдання **5.** Розв'язати однорідні та неоднорідні ДР другого і вищих порядків зі сталими коефіцієнтами:

1. $y'' = 9y$;

2. $y'' + y = 0$;

3. $y'' - 7y' + 12y = 0$;

4. $y'' + 2y' + 10y = 0$;

5. $y^{(IV)} - 5y'' + 4y = 0$;

6. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;

7. $y^{(IV)} + 2y'' - 8y = 0$;

8. $y^{(IV)} - 16y = 0$;

9. $y^{(IV)} - 8y'' + 16y = 0$;

10. $y'' + y' = e^x$;

11. $y'' - 4y' = 4e^{4x}$;

12. $y'' + y = \sin 5x$;

13. $y'' + y = \cos x$;

14. $y'' + y' - 2y = 2e^{-2x} + e^{2x}$;

15. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$;

16. $y'' - y' = 4 + x$;

17. $y'' - 2y' - 3y = x^2$;

18. $y'' + y = \cos x + \sin 5x$;

19. $y'' + 4y' = x - e^{-4x}$;

20. $y'' - y' - 2y = \sin x + x^2$;

21. $y'' + 9y = 4\sin 3x + x$;

22. $y'' + y = x\cos x$;

23. $y'' - y = xe^x$;   24. $y'' + y' = x\sin x$.

***Завдання* 6**. Знайти загальний та частинний розв'язки ДР:

1. $(2x+5)dy + ydx = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 1$;
2. $y' - (2x+2)\sqrt{1-y^2} = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 1$;
3. $y'(4+x^2) + y^2 = 0, \quad x_0 = 2, y_0 = \dfrac{8}{\pi}$;
4. $\sqrt{2+y}\,\mathrm{cosec}^2\, x - y'\cos^2 x = 0, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}, y_0 = 2$;
5. $xy'' - y' = x^2e^x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$;
6. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$;
7. $y'' + y'\,\mathrm{tg}\, x = \sin 2x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$;
8. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$;
9. $y^{(IV)} - 16y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -4, y'''(0) = 0$;
10. $x^2y' = 2xy - 3, \quad y(-1) = 1$;
11. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;
12. $(1-x^2)y' - xy = xy^2, \quad y(0) = 0{,}5$;
13. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;
14. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$;
15. $yy' + (y')^2 + yy'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(-1) = 0$;
16. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x, \quad y(\pi) = \pi e^{\pi}, \quad y'(\pi) = e^{\pi}$;
17. $y^{(IV)} - y = 8e^x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0$.

***Завдання* 7.** Розв'язати системи диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 3,\ y(0) = 1.$
3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + 7y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$

Завдання* 8. *Прикладні задачі.

1. Закон Ома при наявності самоіндукції приймає вигляд $E - L\dfrac{di}{dt} = Ri$, де $E-$електрорушійна сила джерела енергії; $L-$власна індуктивність; $R-$опір. Визначити $i(t)$.
2. Визначити повний магнітний потік котушки, яка рівномірно намотана на сердечник прямокутного перерізу, внутрішній радіус якого $R_1 = 4см$; зовнішній $R_2 = 6см$; висота $h = 2см; I = 1a$; число витків $\boldsymbol{\omega} = 1000$; $\mu = 80$ (сердечник із магнітодіалектрика). Величина потоку задовольняє рівняння $\dfrac{d\Phi}{dR} = \dfrac{\mu I \omega h}{2\pi R}$.
3. Температура повітря T залежно від висоти h змінюється за законом $\dfrac{dT}{dh} = -\alpha T_0$, де $T_0 -$температура повітря на поверхні Землі; $\alpha -$ стала. Визначити температуру повітря на висоті h.
4. Рух рідини в капілярному посуді описується рівнянням $\dfrac{d^2v}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{p_1 - p_2}{\eta}$, де $v-$швидкість течії рідини; $R-$ радіус капіляра; p_1 і p_2-перепад тиску на кінцях; $\eta-$коефіцієнт пропорційності. Визначити розподіл швидкостей по радіусу капіляра.
5. Літак рухається прямолінійно з постійною швидкістю v_1. Його переслідує інший літак з постійною швидкістю v_2, в початковий момент знаходиться на відстані a від першого перпендикулярно до його шляху. Переслідуваний літак постійно тримає курс на першого. Знайти рівняння лінії руху переслідуваного літака.

Відповіді

***До завдання* 1**

1. $y = \dfrac{1}{\ln\dfrac{C}{x}}$; 2. $y = \dfrac{C(x-1)^2}{x}$; 3. $y = -x - 2\ln|1-x| + C$;

4. $y=a+Ce^{\frac{1}{x}}$;   5. $y^{2a}=\dfrac{C(x-a)}{x+a}$;   6. $y=\dfrac{x+C}{1-Cx}$;

7. $\rho=C\cos\theta$;   8. $\arcsin y-\operatorname{arctg}x=C$;   9. $x^2+y^2=x^2y^2+C$;

10. $\cos\varphi=C\cos\theta$.

***До завдання* 2**

1. $\ln\dfrac{\sqrt{2y^2+8x^2}}{C}=\dfrac{5}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x}$;   2. $y=x\arcsin\dfrac{C}{x}$;   3. $y=xe^{\frac{C-x}{x}}$;

4. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$;   5. $y=\sqrt{C\sqrt{x}+x^2}$;   6. $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C$;

7. $y=x\left(\dfrac{1}{\ln\dfrac{\sqrt{x}}{C}}-1\right)$;   8. $y^2+2xy-x^2=C$;   9. $y=x\sqrt{2\ln Cx^8}$;

10. $te^{s/t}=C$; 11. $y=x\sqrt[3]{3\ln cx}$;   12. $y=5x\sin\ln Cx$; 13. $y=xe^{Cx}$;

14. $y=\dfrac{2x}{1-Cx^2}$.

***До завдання* 3**

1. $y=2x\sqrt{x}+Cx$;   2. $y=\dfrac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$;   3. $y=(2\sin\dfrac{x}{2}+C)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

4. $y=\dfrac{1}{x}\left(\arcsin x+C\right)$;   5. $y=\ln x+C/x$;   6. $y=1+\dfrac{\ln\left(C\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x}$;

7. $2y=\left(x+1\right)^4+C\left(x+1\right)^2$; 8. $y=Cx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}$;   9. $y=(x^3+C)\ln x$;

10. $y=\sin x+C\cos x$;   11. $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$;   12. $y=x^n(e^x+C)$;

13. $e^xy=x+C$;   14. $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$; 15. $y^2(x^2+1+Ce^{x^2})=1$;

16. $y=1/x\ln Cx$;   17. $y^2=\dfrac{e^{x^2}}{2x+C}$;   18. $y^2=\dfrac{1}{1+Ce^{x^2}}$;

19. $y(\ln x+1+Cx)=1$;   20. $(C\sqrt{1-x^2}-1)y=1$.

***До завдання* 4**

1. $y=\dfrac{x^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$; 2. $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$;

3. $y=-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2$; 4. $y=C_1x^3+C_2$; 5. $x=e^y+C_1y+C_2$;

6. $y=4+C_2e^{C_1x}$; 7. $y=-\cos x+C_1\sin x+C_2$; 8. $y=-\dfrac{1}{3x^3}+C_1\ln C_2x$;

9. $\operatorname{ctg} y=C_2-C_1x$; 10. $y=\left(x-1\right)e^x+C_1x^2+C_2$; 11. $y=\dfrac{C_1x-1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2$;

12. $y=x+C_1\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C_2$; 13. $y=\dfrac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$; 14. $y=C_1x^2-5x+C_2$;

15. $y-\ln\left(C_1+e^y\right)=C_1(x+C_2)$; 16. $y=\dfrac{C_1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)-\dfrac{\sin^3 x}{3}+C_2$.

***До завдання* 5**

1. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$; 2. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; 3. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$;

4. $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$; 5. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$;

6. $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+C_3e^{-x}$; 7. $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$;

8. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x$;

9. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3xe^{2x}+C_4xe^{-2x}$; 10. $y=C_1+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}e^x$;

11. $y=e^{4x}\left(C_1+x\right)+C_2$; 12. $y=C_1\sin x+C_2\cos x-\dfrac{1}{24}\sin 5x$;

13. $y=\left(C_1+\dfrac{x}{2}\right)\sin x+C_2\cos x$; 14. $y=\left(C_1-\dfrac{2}{3}x\right)e^{-2x}+C_2e^x+\dfrac{1}{4}e^{2x}$;

15. $y=e^{3x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{x^2}{2}\right)$; 16. $y=C_1+C_2e^x-\dfrac{x^2}{2}-5x$;

17. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{4}{9}x-\dfrac{14}{27}$; 18. $y=\left(C_1+\dfrac{x}{2}\right)\sin x+C_2\cos x-\dfrac{1}{24}\sin 5x$;

19. $y = e^{-4x}\left(C_1 + \frac{x}{4}\right) + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + C_2;$

20. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4};$

21. $y = C_1 \sin 3x + \left(C_2 - \frac{2}{3}x\right)\cos 3x + \frac{x}{9};$

22. $y = \left(C_1 + \frac{x^2}{4}\right)\sin x + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\cos x;$ 23. $y = C_1 e^{-x} + e^x\left(C_2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right);$

24. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{2}\right)\sin x - \frac{x+1}{2}\cos x.$

До завдання 6

1. $\left\{ y = \frac{C}{\sqrt{2x+5}}, \quad y = \sqrt{\frac{5}{2x+5}}; \right.$

2. $\begin{cases} y = \sin\left(x^2 + 2x + C\right), \\ y = \cos\left(x^2 + 2x\right); \end{cases}$

3. $\left\{ y = \frac{2}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C}, \quad y = \frac{2}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}; \right.$

4. $\begin{cases} \sqrt{2+y} = C - \operatorname{ctg} 2x, \\ \sqrt{2+y} = 2 - \operatorname{ctg} 2x; \end{cases};$

5. $y = e^x(x-1) + C_1 x^2 + C_2, \quad y = e^x(x-1);$

6. $y + C_1 \ln y = x + C_2, \quad y + \ln y = 1 + x;$

7. $y = C_2 + C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y = 2\sin x - \sin x \cos x - x - 1;$

8. $y = C_2 - a\cos\left(x + C_1\right), \quad y = a(1 - \cos x) - 1;$

9. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x, \qquad y = \cos 2x;$

10. $y = Cx^2 + \frac{1}{x}, \quad y = 2x^2 + \frac{1}{x};$

11. $y = xe^{Cx}, \quad y = xe^{-\frac{x}{2}};$

12. $y = \dfrac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1};$

13. $y = C_1e^x \cos 2x + C_2e^x \sin 2x + x^2, \quad y = e^x \sin 2x + x^2;$

14. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + \dfrac{3}{2}\cos x - \dfrac{5}{2}\sin x, \quad y = e^{4x} + \dfrac{3}{2}e^{-x} + \dfrac{3}{2}\cos x - \dfrac{5}{2}\sin x;$

15. $y = \sqrt{\dfrac{e-e^{-x}}{e-1}};$

16. $y = e^x((2x-\pi-1)\sin x - \pi\cos x);$

17. $y = \cos x + 2\sin x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x.$

До завдання 7

1. $x = C_1 + C_2e^{6t}, \quad y = -\dfrac{1}{4}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2e^{6t}.$

2. $x = 3C_1e^{2t} + C_2e^{4t}, \quad y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}, \quad x = 3e^{2t}, \quad y = e^{2t}.$

3. $x = (C_1\cos t + C_2\sin t - 1)e^t, \quad y = (C_1\sin t - C_2\cos t)e^t.$

4. $x = (C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)e^{5t}, \quad y = ((C_1 - C_2)\sin 2t - (C_1 + C_2)\cos 2t)e^{5t},$
$x = (\cos 2x - \sin 2x)e^{5t}, \quad y = 2e^{5x}\sin 2t.$

5. $x = C_1 + C_2t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{2} - 3e^t, \quad y = (C_1 - \dfrac{C_2}{3} + C_2t + \dfrac{t^3}{2} - 2e^t)e^{2t}.$

До завдання 8

1. $i(t) = \dfrac{1}{R}(E + Ce^{-\frac{Rt}{L}}).$ 2. $\varPhi = \dfrac{\mu I\omega h}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}; \quad \varPhi = 0{,}000131\,гн.$

3. $T = T_0(1-\alpha h).$ 4. $v = \dfrac{(p_1-p_2)(R^2-r^2)}{4\eta}.$ 5. Рівняння руху $x\dfrac{d^2y}{dx^2} = -k\sqrt{1+y'^2},$ де $k = \dfrac{v_1}{v_2},$ звідси

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^k x^{1-k}}{1-k} - \frac{x^{k+1}}{\alpha^k(k+1)}\right] + \frac{k\alpha}{1-k^2}, \quad k \prec 1.$$

Розділ 11. РЯДИ

§ 1. Основні поняття і визначення

У числових прикладних дослідженнях чільне місце займають методи, які базуються на застосуванні теорії рядів.

Рядом називають нескінченну суму виду:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} U_i, \qquad (1)$$

де $U_0, U_1, U_2, ...$ – члени ряду, U_n – загальний член ряду, $i = 0, 1, 2, 3, ...$, n – номер члена ряду (індекс сумування), $\sum$ (сігма) − знак сумування.

Якщо члени ряду – числа, то ряд називають *числовим*, якщо ж $U_0 = U_0(x)$, $U_1 = U_1(x), ..., U_n = U_n(x), ...$ – функції неперервного аргументу на деякій множині D, то ряд називають *функціональним*, а множина D – *область визначення цього ряду*.

Наближені обчислення за допомогою рядів схематично можна уявити так:

1) досліджувану функцію апроксимують функціональним рядом виду (1)

$$y(x) = U_0 + U_1 + ... + U_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} U_n ;$$

2) оскільки суму нескінченної кількості "всіх членів" ряду (1) вдається обчислити дуже рідко, то, як правило, її заміняють сумою скінченної кількості перших членів ряду (1), тобто вважають

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \approx \sum_{k=0}^{n} U_k(x) = S_n(x) . \qquad (2)$$

Суму $S_n(x)$ – називають *n-ю частинною сумою ряду.*

Користуючись формулою (2), можна (у певному наближенні) виконувати необхідні дослідження чи обчислення;

3) у процесі розв'язку конкретної задачі встановлюють умови, які забезпечують необхідну точність виконання наближених обчислень.

У прикладних і теоретичних дослідженнях широко застосовують функціональні ряди виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ , \tag{3}$$

які називають *степеневими* і ряди

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_k \cos kx + b_k \sin kx + ... = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \end{aligned} \tag{4}$$

які називають *тригонометричними рядами Фур'є*,
де a_k , b_k , ($k = 0,1,2,...$) – *коефіцієнти ряду.*

§ 2. Числові ряди

Означення 1. *Числовим рядом* називають нескінченну суму виду

$$c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \ , \tag{1}$$

де члени ряду c_k ($k = 1,2,...$) – фіксовані числа.

Ряд (1) вважають заданим, якщо відомо закон утворення його членів, тобто правило, згідно з яким за заданим номером k можна знайти відповідний член ряду. Найчастіше такий закон задається формулою загального члена, наприклад, якщо

$$c_k = \frac{1}{k\sqrt{k+1}} \ , \ k = 1,2, \ \ldots,$$

ряд матиме вигляд $\dfrac{1}{1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}}$.

У деяких випадках, зокрема при складанні вихідних рядів з використанням експериментальних даних, можуть виявитися заданими лише кілька перших членів ряду. Тоді за даними членами ряду потрібно визначити формулу загального члена ряду і записати ряд. Проте така задача в загальному випадку розв'язується, як правило, неоднозначно. Знайдена формула загального члена має бути, в певному розумінні, найпростішою.

Наприклад, якщо знайдені кілька членів ряду $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$, то $c_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$, $k = 1, 2, ...,$.

Розглянемо частинні суми

$$
\begin{aligned}
&S_1 = c_1,\\
&S_2 = c_1 + c_2,\\
&S_3 = c_1 + c_2 + c_3, \qquad\qquad (2)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&S_n = c_1 + c_2 + ... + c_n = \sum_{k=1}^{n} c_k.
\end{aligned}
$$

Вони утворюють нескінченну послідовність

$$S_1, S_2, ..., S_n, ... \qquad 3)$$

Якщо існує скінченна границя S числової послідовності (3), при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = S\,, \qquad (4)$$

то говорять, що ряд (1) *збіжний* і має суму, яка дорівнює S.

У протилежному випадку, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то говорять, що ряд *розбіжний***.**

***Приклад* 1.** Дослідити на збіжність геометричний ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{k-1} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}, \quad a \neq 0\,.$$

Розв'язання. Оскільки члени ряду утворюють геометричну прогресію, то сума перших n членів

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

1) якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = S\text{, ряд збіжний;}$$

2) якщо $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$, тоді

$\lim\limits_{n\to\infty}|S_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}\right| = \infty$, тобто границя S_n не існує. Отже, ряд розбіжний;

3) якщо $q = 1$, то маємо ряд $a + a + a + \ldots$; $S_n = na$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд розбіжний;

4) якщо $q = -1$, тоді маємо $a - a + a - a + \ldots$;

$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ a, & n = 2m+1 \end{cases}$. Отже,при $n \to \infty$ границі не існує. Ряд розбіжний.

Про суму числового ряду можна говорити тільки в тому випадку, коли ряд збіжний. При цьому символ приймає певний числовий зміст. Проте часто досить буває встановити лише факт збіжності ряду, не знаходячи його суми.

Представимо ряд (1) так: $\underbrace{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}_{S_n} + \underbrace{c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots}_{r_n}$.

Ряд

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k}\,, \tag{5}$$

який можна отримати із ряду (1) відкиданням n перших членів, називається *залишком ряду* (1). Сума (5) виражає похибку наближення суми S ряду (1) його частинною сумою S_n

$$r_n = S - S_n\,.$$

Теорема **1** (про залишок ряду). Якщо збіжний ряд (1), то збіжний і довільний його ряд-залишок (5) і його сума дорівнює $r_n = S - S_n$ (n – довільне фіксоване натуральне число). Навпаки, якщо збіжний ряд-залишок (5), то збіжний і вихідний ряд (1). (Доведення опускаємо).

Наслідок **1**. Якщо ряд (1) збіжний, то сума r_n ряду-залишку (5) прямує до нуля, при $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$.

***Наслідок* 2**. Збіжність ряду не зміниться, тобто збіжний ряд залишиться збіжним, а розбіжний – розбіжним, якщо від нього відкинути чи до нього додати скінченну кількість членів.

Необхідна ознака збіжності ряду

***Теорема* 2**. Якщо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ збіжний, то $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$.

Доведення. Знайдемо границю

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0 .$$

Умова $\lim_{k\to\infty} c_k \neq 0$ є достатньою умовою розбіжності досліджуваного ряду.

Умова $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ є необхідною умовою збіжності ряду, але не достатньою.

Поки що розглядатимемо ряди з невід’ємними членами.

Достатні ознаки збіжності ряду

1. ***I ознака порівняння***. Якщо задані два ряди з невід’ємними членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + ..., \qquad a_k \geq 0, \tag{A}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ..., \qquad b_k \geq 0, \tag{B}$$

причому починаючи з деякого N, $a_n \leq b_n$, $n > N$, то із збіжності ряду (B) (з більшими членами) випливає збіжність ряду (A) (з меншими членами); а із розбіжності ряду (A) (з меншими членами) випливає розбіжність ряду (B) (з більшими членами). Але із збіжності ряду (A) чи розбіжності ряду (B) нічого про характер збіжності іншого ряду сказати не можна.

Схема доведення. Нехай ряд (B) збіжний і має суму S^B. Отже, існує границя часткових сум $\lim_{n\to\infty} S_n^B = S^B$, причому для будь-якого n:

$$S_n^B \leq S^B .$$

Послідовність часткових сум S_n^A ряду (A) монотонно зростає із зростанням n і при цьому

$$S_n^A = a_1 + a_2 + ... + a_n \leq b_1 + b_2 + ... + b_n = S_n^B \leq S^B ,$$

тобто вона обмежена зверху числом S^B, а такі послідовності мають границю. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^A = S^A$, а отже, ряд (A) збіжний.

Друга половина ознаки доводиться від протилежного.

2. ***II (гранична) ознака порівняння***. Якщо маємо два ряди

$$a_1 + a_2 + ... + a_k + ..., \qquad a_k > 0, \qquad (A)$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_k = ..., \qquad b_k > 0, \qquad (B)$$

причому існує скінченна, відмінна від нуля границя відношення загальних членів даних рядів при $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lambda \neq 0, \qquad (6)$$

то обидва ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні. Якщо ж $\lambda = 0$, то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), а із розбіжності ряду (A) випливає розбіжність ряду (B). (Доведення опускаємо).

***Приклад* 2.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \sqrt{k}}$.

Розв'язання. Із першої ознаки порівняння випливає що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \sqrt{k}}$ збіжний, оскільки його члени не перевищують, відповідно, членів збіжного геометричного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, при $q = \frac{1}{2}$.

***Приклад* 3.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k - k}$.

Розв'язання. Оскільки 3^k зростає значно швидше, ніж k, при $k \to \infty$, то можна припустити, що збіжність ряду визначається збіжністю геометричної прогресії $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$. Порівняємо їх $\frac{1}{3^k - k} > \frac{1}{3^k}$, тому перша ознака не дає жодного результату.

Використаємо другу ознаку порівняння

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^k - k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k - k}{3^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{k}{3^k}\right) = 1 \neq 0 \ .$$

Відповідно до другої ознаки обидва ряди поводять себе однаково. Оскільки геометричний ряд збіжний, то заданий ряд також збіжний.

3. ***Ознака Д'Аламбера.*** Якщо для ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ з додатними членами існує границя $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=q,$ то:

1) ряд збіжний при $q<1$;
2) ряд розбіжний при $q>1$;
3) при $q=1$ нічого про збіжність ряду сказати не можна (треба скористатися іншими ознаками).

Доведення. Нехай $q<1$. Тоді, починаючи з деякого k

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}<q+\varepsilon; \qquad a_{k+1}<a_k(q+\varepsilon),$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}<q+\varepsilon; \qquad a_{k+2}<a_{k+1}(q+\varepsilon),$$

$$\frac{a_{k+3}}{a_{k+2}}<q+\varepsilon; \qquad a_{k+3}<a_{k+2}(q+\varepsilon),\ldots \quad .$$

Розглянемо ряд без перших $(k-1)$ членів

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots,$$

і допоміжний ряд

$$a_k+a_k(q+\varepsilon)+a_k(q+\varepsilon)^2+a_k(q+\varepsilon)^3+\ldots .$$

Останній ряд – це геометричний ряд із знаменником $q+\varepsilon<1$ при досить малому ε. Отже, він збіжний. Враховуючи першу ознаку збіжності, робимо висновок, що вихідний ряд теж збіжний.

Задача. Для випадку $q>1$ доведіть розбіжність самостійно.

4. ***Радикальна ознака Коші.*** Якщо для ряду (1) з додатними членами існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=q, \tag{7}$$

тоді:

1) ряд збіжний при $q<1$;

2) ряд розбіжний при $q>1$;

3) при $q=1$ нічого про збіжність сказати не можна.

Доведення аналогічне до наведеного для ознаки Д'Аламбера.

5. ***Інтегральна ознака Коші.*** Якщо ряд (1) з додатними членами такий, що, починаючи з деякого номера m, виконується нерівність $a_m \geq a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \ldots$ і існує така незростаюча при $x \geq m$ неперервна функція $y=f(x)$, що $f(m)=a_m$, $f(m+1)=a_{m+1},\ldots$, то ряд збіжний чи розбіжний разом із невласним інтегралом

$$\int_m^{\infty} f(x)dx\,. \qquad (8)$$

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою Д'Аламбера:

$$q=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0\,.$$

Оскільки $q<1$, то ряд збіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{k}{2^k}+\ldots\,.$$

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{2^k}}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}k^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}<1.$$

Переконаємось, що $k^{\frac{1}{k}}\to 1$ при $k\to\infty$. Розглянемо функцію $y=x^{\frac{1}{x}}$. Тоді

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ (за правилом Лопіталя).}$$

Тому $\ln y\to 0$ при $x\to\infty$. А отже, $y\to 1$ при $x\to\infty$.

Отже, досліджуваний ряд збіжний.

Приклад 6. Дослідити на збіжність *узагальнений гармонійний ряд*

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,. \qquad (9)$$

Розв'язання. Знайдемо інтеграл залежно від p

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\begin{cases} -\dfrac{x^{-p+1}}{p-1}\Big|_1^\infty=\dfrac{1}{p-1} \quad \text{при} \quad p>1; \\ \ln\ x\Big|_1^\infty=\infty \quad \text{при} \quad p=1; \\ \dfrac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^\infty=\infty \quad \text{при} \quad p<1\ . \end{cases}$$

Отже, ряд (9) збіжний при $p>1$ і розбіжний при $p\le 1$.

6. *Ознака Лейбніца збіжності знакопочергових рядів.*

Знакопочерговим називається ряд виду

$$c_1-c_2+c_3-c_4+...+c_{2m-1}-c_{2m}+...\,, \tag{10}$$

де знаки членів чергуються, а числа $c_k>0$, $k=\overline{1,\infty}$.

Ознака Лейбніца. Якщо для знакопочергового ряду (10) виконуються умови

1) $\quad c_1>c_2>c_3>...>c_k>...$ і $\quad$ 2) $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=0$,

то такий ряд збіжний. При цьому його сума S приймає значення $0<S<c_1$.

Доведення. Складемо частинну суму ряду, яка містить парну кількість доданків:

$$S_{2m}=(c_1-c_2)+(c_3-c_4)+...+(c_{2m-1}-c_{2m})\,.$$

У кожній дужці, згідно з умовою 1), є додатна величина. Отже, $S_{2m}>0$. Запишемо суму S_{2m} в іншому вигляді:

$$S_{2m}=c_1-\left[(c_2-c_3)+(c_4-c_5)+...+(c_{2m-2}-c_{2m-1})+c_{2m}\right].$$

Тут у квадратних дужках додатна величина і від c_1 віднімається деяке додатне число. Отже, $S_{2m}<c_1$. Послідовність частинних сум $\{S_{2m}\}$ зростаюча і обмежена зверху, а отже, вона збіжна, причому границя S така, що $0<S<c_1$.

Розглянемо тепер суми, які містять непарне число доданків:

$$S_{2m+1}=S_{2m}+c_{2m+1}\,.$$

Перейшовши до границі та використовуючи умову 2), маємо:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} c_{2m+1} = S + 0 .$$

З існування та рівності границь $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ і $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$ випливає, що $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Ознака доведена.

***Означення* 2.** Ряд, в якому члени зі знаками “плюс” і “мінус” розміщені в довільній послідовності, називається *знакозмінним.*

Особливий інтерес становлять знакозмінні ряди, які містять нескінченно багато як додатних, так і від’ємних членів, наприклад ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin k\alpha}{k^2} + \ldots .$$

***Означення* 3.** Знакозмінний ряд

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_k + \ldots \; . \tag{11}$$

називається *абсолютно* збіжним, якщо збіжний ряд складений із абсолютних величин його членів, тобто ряд

$$|c_1| + |c_2| + |c_3| + \ldots + |c_k| + \ldots . \tag{12}$$

Твердження. Якщо ряд (12) збіжний, то збіжний і ряд (11).

Доведення. Нехай ряд (12) збіжний. Тоді, склавши ряд

$$\left(|c_1| + c_1\right) + \left(|c_2| + c_2\right) + \ldots + \left(|c_k| + c_k\right) + \ldots , \tag{13}$$

можемо стверджувати, що він збіжний, як ряд з невід’ємними членами, причому $0 \le |c_k| + c_k \le 2|c_k|$.

Враховуючи те, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|$ збіжний, збіжним є ряд, утворений послідовним відніманням ряду (12) від ряду (13), тобто ряд (11).

Обернене твердження неправильне, тобто ряд (11) може бути збіжним, а ряд із абсолютних величин – розбіжним. У цьому випадку ряд (11) називають *умовно* збіжним.

***Приклад* 7.** Дослідити ряд на збіжність $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

Розв’язання. Даний ряд згідно з ознакою Лейбніца збіжний, оскільки: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$, а також 2) $\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Ряд, складений із абсолютних величин $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$, розбіжний, як гармонійний ряд.

Отже, заданий ряд умовно збіжний.

§ 3. Степеневі ряди

Означення 1. *Степеневим рядом* називають ряд виду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k+\dots \tag{1}$$

де $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ – коефіцієнти ряду. Ряди загального виду

$$a_0+a_1(U-U_0)+a_2(U-U_0)^2+\dots+a_k(U-U_0)^{\,k}+\dots \tag{2}$$

заміною $U-U_0=x$ можна звести до виду (1).

За даних конкретних значень x ряд (1) стає числовим рядом і може бути як збіжним, так і розбіжним. Множина тих значень x, при яких ряд (1) збіжний, утворює область збіжності степеневого ряду.

Теорема Абеля. 1) Якщо степеневий ряд (1) збіжний у деякій точці $x_0\neq 0$, то він збіжний абсолютно, у всіх точках *x*, де $|x|\le|x_0|$; 2) Якщо ж ряд (1) розбіжний у деякій точці x_0', то він розбіжний всюди, де $|x|>|x_0'|$.

Доведення.

1. При $x=x_0$ маємо числовий ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_kx_0^k+\dots, \tag{3}$$

який збіжний за умовою. Отже, його загальний член $a_kx_0^k\to 0$ при $k\to\infty$ і всі члени ряду обмежені за абсолютною величиною, тобто $\left|a_kx_0^k\right|\le M$.

Враховуючи, що $\left|\frac{x}{x_0}\right|=q<1$, маємо

$$|U_k(x)|=\left|a_kx^k\right|=\left|a_kx_0^k\,\frac{x^k}{x_0^k}\right|=\left|a_kx_0^k\right|\cdot\left|\frac{x^k}{x_0^k}\right|\le M\cdot q^k,$$

тобто загальний член ряду (1), взятий за абсолютною величиною, не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} Mq^k$ із знаменником $|q|<1$.

Отже, ряд (1) при довільних $|x|<|x_0|$ збіжний абсолютно.

2. Нехай ряд (1) розбіжний у деякій точці x_0'. Припустимо протилежне.

Нехай існує така точка x, причому $|x|>|x_0'|$, де ряд збіжний. Тоді за вже доведеним, він повинен бути збіжним у довільній точці, координата якої задовольняє умову $|x_0'<|x||$, зокрема і в точці x_0' , а це суперечить умові теореми. Теорема доведена.

Із теореми Абеля та інтуїтивних геометричних уявлень можна зробити висновок про те, що існує таке число R, що ряд (1) збіжний при $|x|<R$ і розбіжний при всіх $|x|>R$. Число R називається *радіусом збіжності* степеневого ряду (1), а інтервал $(-R;R)$ – *інтервалом збіжності.* Інтервал збіжності можна знайти, розглянувши ряд

$$|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x^2|+\ldots+|a_k|\cdot|x^k|+\ldots,$$

складений з абсолютних величин членів ряду (1).

Застосуємо до нього ознаку Д'Аламбера. Ряд збіжний, якщо

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_kx^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\cdot|x|<1, \text{ тобто}$$

$$|x|<\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|. \quad \text{Або } |x|<R,$$

де $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

При $|x|>R$ ряд розбіжний, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right|>1$.

Отже, радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулою

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \text{ або } R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \qquad (4)$$

Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=-R$ і $x=R$, розв'язується в кожному випадку окремо.

***Приклад* 1**. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k x^k}{\sqrt{k+1}}$ та дослідити збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

Розв'язання. Оскільки $a_k=\frac{2^k}{\sqrt{k+1}}$, $a_{k+1}=\frac{2^{k+1}}{\sqrt{k+2}}$, то за формулою (4)

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{a^k}{a^{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{\sqrt{k+2}}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Ряд збіжний в інтервалі $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. При $x=-\frac{1}{2}$ отримаємо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}},$$

який є збіжний за ознакою Лейбніца.

При $x=\frac{1}{2}$ отриманий ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ є розбіжний згідно з другою ознакою порівняння з узагальненим гармонійним рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$, який є розбіжний.

З аналізу збіжності степеневих рядів і загальних властивостей функціональних рядів випливають наступні твердження:

1. Степеневий ряд (1) збіжний абсолютно і рівномірно на довільному відрізку, який міститься в інтервалі збіжності ($[a,b]\in(-R;R)$).
2. Сума степеневого ряду (1) неперервна всередині інтервалу збіжності.
3. Суму степеневого ряду (1) $S(x)$ можна почленно інтегрувати на проміжку $[a;x]$, який належить інтервалу збіжності, та диференціювати довільну кількість разів в інтервалі $(-R;R)$. При цьому похідні всіх

порядків від $S(x)$ будуть неперервними функціями на інтервалі збіжності.

4. Степеневі ряди можна почленно додавати, перемножувати на число і один на одного (за правилами множення і ділення многочленів). У результаті вийде ряд, який буде збіжний на спільній частині інтервалів збіжності вихідних рядів.
5. При почленному диференціюванні та інтегруванні степеневого ряду його радіус збіжності не зміниться.

§ 4. Розклад функцій в ряди Тейлора і Маклорена

Часто, зокрема в наближених обчисленнях, функцію апроксимують (наближують) певним степеневим рядом, задану функцію розкладають в ряд. Необхідно знайти коефіцієнти ряду, сума якого рівна цій функції.

Припустимо, що деяка функція $y(x)$ розкладається в степеневий ряд

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_k(x - x_0)^k + ... \qquad (1)$$

в околі точки $x = x_0$.

Щоб визначити коефіцієнти a_k ряду, скористаємося послідовним диференціюванням ряду (1) і обчислимо суму отриманих рядів у точці x_0.

Знаходимо

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_k(x - x_0)^k + ... , \qquad y(x_0) = a_0;$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + ka_k(x - x_0)^{k-1} + ... , \qquad y'(x_0) = a_1;$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3(x - x_0) + ... + k(k-1)a_k(x - x_0)^{k-2} + ..., \qquad y''(x_0) = 2a_2;$$

$$y'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_4(x - x_0) + ..., \qquad y'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3;$$

....

$$y^{(k)}(x) = k! \cdot a_k + (k+1)! a_{k+1}(x - x_0) + ... , \qquad y^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k;$$

....

Звідси отримуємо коефіцієнти

$$a_0 = y(x_0), \qquad a_1 = \frac{y'(x_0)}{1!}, \qquad a_2 = \frac{y''(x_0)}{2!}, \quad ... \quad a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, ... \qquad (2)$$

Підставляючи їх у ряд (1), отримаємо ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots \qquad (3)$$

Поклавши x_0 рівним нулю в (3), отримаємо частинний випадок, а саме розклад функції в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \ . \qquad (4)$$

Можна довести, що розклади елементарних функцій в ряди Тейлора чи Маклорена справедливі в межах областей збіжності цих рядів. Розглянемо розклад функції $y = e^x$ в ряд Маклорена.

Враховуючи, що для $y = e^x$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(k)}(0) = \ldots = 1$, маємо розклад

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \ . \qquad (5)$$

Причому ряд збіжний при $|x| < \infty$, тому що радіус збіжності $R = \infty$.

Аналогічно можна отримати розклади елементарних функцій:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \qquad |x| < \infty; \qquad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \qquad |x| < \infty; \qquad (7)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \ldots \qquad -1 < x \le 1; \qquad (8)$$

$$(x+1)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots \qquad |x| < 1, \qquad (9)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots, \quad |x| < 1, \qquad (10)$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \quad |x| \le 1, \qquad (11)$$

а також багатьох інших.

§ 5. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень

Степеневі ряди мають найрізноманітніші застосування як в теоретичних, так і в прикладних дослідженнях, зокрема в наближених обчисленнях. Покажемо це на прикладах.

***Приклад* 1.** Обчислити наближене значення π.

Розв'язання. Підставивши $x = \frac{1}{2}$ в розклад (10) § 4, отримаємо

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{40}\cdot\frac{1}{2^5} + \ldots .$$

Враховуючи, що $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, знайдемо

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{40}\cdot\frac{1}{2^5} + \ldots .$$

Оскільки члени ряду спадають дуже швидко, візьмемо три перших члени ряду. Отримаємо:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 2^3} + \frac{3}{40\cdot 2^5}, \text{ звідси}$$

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{20\cdot 2^5} \approx 3 + 0{,}125 + 0{,}0141 \approx 3{,}14.$$

***Приклад* 2.** Обчислити з точністю до $0{,}001$ інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx.$

Розв'язання. Цей інтеграл не виражається через елементарні функції в скінченному виді, тому обчислимо його наближено, розкладаючи (розвиваючи) підінтегральну функцію в ряд

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \ .$$

Тоді

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!}dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!}dx - \int_0^1 \frac{x^6}{7!}dx + .. = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\Big|_0^1 + ... =$$

$$= 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + ... = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + ...$$

Для забезпечення заданої точності досить обмежитись трьома членами ряду, оскільки ряд знакочерговий і $\frac{1}{35280}$ значно менше від $0,001$, тому досить обмежитись трьома членами ряду

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 1 - 0,0556 + 0,0017 \approx 0,943.$$

***Приклад* 3.** Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$, що задовольняє початкову умову $x = 0,\ \ y = 1.$

Розв'язання. Нехай шукана функція допускає розклад в ряд Маклорена. Знайдемо значення її похідних при $x = 0,\ \ y = 1$:

$y'' = 2x + 2yy'$; $y''' = 2 + 2[(y')^2 + yy'']$ $y^{(IV)} = 2(3y'y'' + yy''')$ і т.д.

Тоді

$y'\big|_{x=0} = 0 + 1 = 1;$ $y''\big|_{x=0} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2;$ $y'''\big|_{x=0} = 2 + 2(1 + 1\cdot 2) = 8;$

$y^{(IV)}\big|_{x=0} = 2(3\cdot 1\cdot 2 + 8) = 28$ і т.д.

Підставляючи значення функції та її похідних при $x = 0$ в ряд Маклорена, отримаємо розв'язок

$$y = 1 + 1\cdot x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4}x^4 + ..., \text{ або}$$

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + ... \ .$$

Наближеним розв'язком задачі є функція $y \approx 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3.$

§ 6. Ряди Фур'є

Крім степеневих рядів, особливо важливе значення для прикладних задач має клас нескінченних рядів за тригонометричними функціями, а саме:

за косинусами та синусами дуг, кратних аргументу. Такими рядами описують періодичні процеси, як от: коливальний рух, поширення хвиль, сила і напруга змінного струму.

Найпростіший періодичний рух описується функцією гармонічних коливань (гармонікою)

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega x + \varphi), \tag{1}$$

де A – амплітуда, $\dfrac{2\pi}{\omega}$ – період коливання, φ – початкова фаза.

Суму простих гармонік називають *тригонометричним поліномом* n–го порядку

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x), \tag{2}$$

де $\dfrac{a_0}{2} = A_0 \sin \varphi_0$ – стала.

Тригонометричним рядом називають нескінченну суму

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x), \tag{3}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots,\ b_1, b_2, \ldots,$ – дійсні числа (коефіцієнти ряду).

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\omega = 1$, тобто $T = 2\pi$ (до цього завжди можна прийти, зробивши заміну $x' = \omega x$). Отже, права частина (3), при відповідній заміні, має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad n \in N. \tag{4}$$

Якщо тригонометричний ряд (4) збігається для будь-якого дійсного x, то його сума не залежить від x і є функцією $f(x)$, періодичною з періодом 2π:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{5}$$

У цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ розкладається на відрізку $[-\pi; \pi]$ в ряд Фур'є, причому коефіцієнти ряду обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \tag{6}$$

Їх можна отримати, інтегруючи почленно ряд (5) на проміжку $[-\pi;\pi]$.

Означення. Дві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ називаються *ортогональними* на проміжку $[a;b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)dx = 0 .$$

Система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ називається попарно-ортогональною на $[a;b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi_m(x)\cdot\varphi_n(x)dx = 0, \text{ при } m \neq n. \quad (7)$$

Легко бачити, що система функцій, які входять в ряд Фур'є, є попарно-ортогональною на проміжку $[-\pi;\pi]$, тому що виконуються рівності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Коефіцієнти (6) ряду Фур'є можна визначати і чисельними методами, якщо досліджувана функція задана таблицею або графічно. Коефіцієнти Фур'є тоді обчислюють наближено, наприклад за допомогою формул прямокутників чи трапецій. Тоді функціональну залежність отримують на основі експериментальних даних.

Проміжок $[-\pi;\pi]$ розбивають на n рівних частин точками $x_0, x_1, ..., x_n$. Нехай значення функції в цих точках відповідно дорівнюють $y_0, y_1, ..., y_n$. Тоді коефіцієнти Фур'є визначаються:

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,, \; a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos kx_i\,, \; b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin kx_i\ .$$

Слід зауважити, що розроблені прилади, так звані *гармонічні аналізатори*, які за графіком функції наближено обчислюють значення коефіцієнтів Фур'є.

Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є розглядається в розділі математики „Гармонічний аналіз", проте цей матеріал виходить за межі нашої програми.

Слід зауважити, що для кусково-неперервної на проміжку $[-\pi;\pi]$ функції коефіцієнти Фур'є прямують до нуля при $n\to\infty$.

***Приклад* 1**. Розкласти функцію в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ -\pi\le x<0,\\ x, & при\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2},\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2}, & при\ n=2k+1,\\ 0, & при\ n=2k.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=-\frac{\cos\pi n}{n}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & при\ n=2k+1,\\ -\dfrac{1}{n}, & при\ n=2k.\end{cases}$$

Запишемо розклад функції в ряд:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...\right)+\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\ .$$

Розклад функції f(x) в ряд Фур'є на проміжку $[-\pi;\pi]$

Легко показати, що парна функція розкладається в ряд Фур'є, в якому відсутні члени із синусами; непарна – не містить косинусів. Іншими словами, кажуть, що парна функція розкладається в ряд за косинусами, а непарна – за синусами.

Якщо ж функція ні парна, ні непарна, то розклад в ряд Фур'є містить і синуси, і косинуси. Однак, якщо функція $f(x)$ задана на проміжку $[0;\pi]$, то ми можемо продовжити її на проміжок $[-\pi;0)$ так, щоб вона на проміжку

$[-\pi;\pi]$ була парною (графік симетричний відносно осі OY). Для цього приймемо

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le\pi, \\ f(-x), & -\pi\le x<0. \end{cases}$$

Функцію $f(x)$ можна продовжити на $[-\pi;0)$ так, щоб на всьому проміжку $[-\pi;\pi]$ вона була непарною (графік симетричний відносно початку координат), а саме:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le\pi, \\ -f(x), & -\pi\le x<0. \end{cases}$$

Отже, для *парної* функції коефіцієнти Фур'є обчислюються

$$b_n=0, \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx; \tag{8}$$

для *непарної* –

$$a_0=0, \quad a_n=0, \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n\in N. \tag{9}$$

***Приклад* 2.** Розкласти функцію $f(x)=\pi-x$, задану на проміжку $[0;\pi]$, в ряд Фур'є за косинусами.

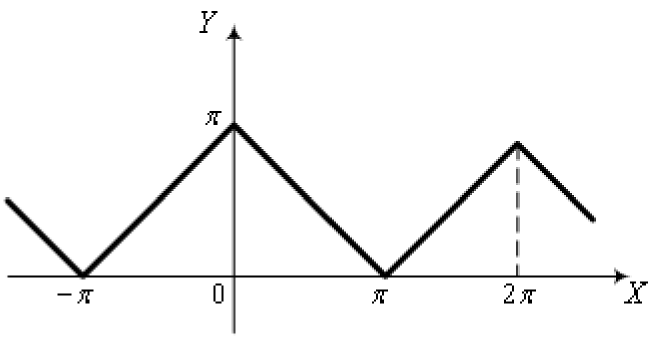


Рис. 85.

Розв'язання. Для розкладу функції за косинусами необхідно її продовжити на проміжок $[-\pi;0)$ парним чином (графік симетричний відносно осі OY).

Коефіцієнти Фур'є розкладу заданої функції (див.рис.85)

$$b_n=0, \quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx= =\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{2}{\pi}(\pi x-\frac{x^2}{2})\Bigg|_0^{\pi}=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n^2}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Тепер запишемо розклад функції

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$$

Ряд Фур'є для періодичних функцій з періодом 2l

Ряд Фур'є для $2l$ періодичних функцій ($l>0$) має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (10)$$

причому коефіцієнти Фур'є цього розкладу визначаються за формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n\in N.$$

Для парної функції ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n\in N; \qquad (11)$$

для непарної функції –

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l},\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad n\in N. \qquad (12)$$

Розклад у ряд Фур'є функції $f(x)$, заданої на проміжку $[0;l]$, проводиться за синусами чи косинусами залежно від завдання. При цьому необхідно продовжити функцію на проміжок $[-l;0)$ непарним чи парним чином відповідно.

***Приклад* 3.** Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, яка задана на півперіоді $[0;1]$ за косинусами.

Розв'язання. Оскільки ряд Фур'є має містити тільки косинуси, то функцію необхідно продовжити парним чином на проміжок $[-1;0)$ (рис.86).

Використовуючи формули (10) і (11), в яких взято $l=1$, знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

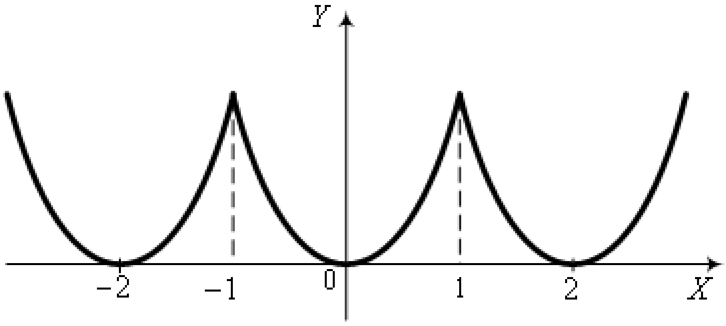


Рис. 86.

$$b_n = 0, \qquad a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \qquad a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx =$$

(інтегруючи частинами)

$$= 2\left(\frac{x^2}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x dx = \frac{4x}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{(-1)^n 4}{(\pi n)^2}.$$

Отримаємо розклад в ряд Фур’є:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \ldots \right).$$

Зауваження. Якщо потрібно розкласти функцію в ряд Фур’є, яка визначена на відрізку $[a;b]$, чинять так. Будують на проміжку $[\lambda;\lambda+2l]$ іншу періодичну з періодом $2l$ функцію, яка при $x \in [a;b]$ збігається із заданою $f(x)$. Це рівноцінно довизначенню функції на проміжок $[\lambda;\lambda+2l]$ (за межами $[a;b]$). Тоді досить отримати розклад в ряд Фур’є періодичної функції на проміжку $[\lambda;\lambda+2l]$, який буде одночасно розкладом заданої функції на проміжку $[a;b]$, що “вкладений” у відрізок $[\lambda;\lambda+2l]$.

Ряди Фур’є в комплексній формі

Якщо в розкладі функції в ряд Фур’є (10)

$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{\pi n x}{l} + b_n \sin\dfrac{\pi n x}{l}\right)$, скористатись формулою Ейлера

$$e^{i\frac{\pi n x}{l}} = \cos\frac{\pi n x}{l} + i\sin\frac{\pi n x}{l}\text{, або}$$

$$\cos\frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi n x}{l}} + e^{i\frac{\pi n x}{l}}\right),\quad \sin\frac{\pi n x}{l} = -\frac{i}{l}\left(e^{i\frac{\pi n x}{l}} - e^{-i\frac{\pi n x}{l}}\right),$$

отримаємо

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n\left(e^{i\frac{\pi n x}{l}} + e^{-i\frac{\pi n x}{l}}\right) - \frac{i}{2}b_n\left(e^{i\frac{\pi n x}{l}} - e^{-i\frac{\pi n x}{l}}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}} + c_{-n} e^{-i\frac{\pi n x}{l}}.$$

Тут через c_n та c_{-n} позначено: $c_n = \dfrac{1}{2}a_n - \dfrac{i}{2}b_n$, $c_{-n} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{i}{2}b_n$.

Враховуючи, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{\pi n x}{l}} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}$, остаточно отримаємо ряд Фур'є в комплексній формі:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{\pi k x}{l}}, \tag{13}$$

де коефіцієнти c_k обчислюються за формулами

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{-i\frac{\pi k x}{l}}\,dx,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{14}$$

Елементи ряду (13) називають гармоніками, c_k – комплексними амплітудами гармонік, числа $\dfrac{\pi k}{l} = \alpha_k$ – хвильовими числами функції $f(x)$. Сукупність цих чисел утворює спектр.

Інтеграл та перетворення Фур'є

Розглянемо функцію $f(x)$, яка є абсолютно інтегрована на всій числовій осі, тобто інтеграл

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx \tag{15}$$

збіжний (тобто $I<\infty$). Нехай підінтегральна функція розкладається в ряд (10) з відповідними коефіцієнтами Фур'є. Підставляючи ці коефіцієнти в (10), отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right)\cos\frac{\pi nx}{l}+\left(\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nt}{l}dt\right)\sin\frac{\pi nx}{l}=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi nt}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}-\sin\frac{\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n(t-x)}{l}dt\,.$$

Оцінимо останню суму. Перший доданок прямує до нуля при $l\to\infty$

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dt\right|\le\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(x)|dt<\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dt=\frac{1}{2l}\cdot I\to 0\,.$$

Другий доданок при $l\to\infty$ перетворюється в повторний інтеграл

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n(t-x)}{l}dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha\,.$$

Отже,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha\,. \tag{16}$$

Праву частину (16) називають *інтегралом Фур'є*. Рівність (16) справедлива у всіх точках неперервності функції $f(x)$. У точках розриву виконується рівність

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,. \tag{17}$$

Перетворимо праву частину (16):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x\right]dt\right)d\alpha=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \quad (18)$$

Якщо функція $f(x)$ − парна, то (18) набуває вигляду

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \quad (19)$$

Для непарної функції $f(x)$ формула (18) має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \quad (20)$$

Аналогічно до скінченного інтервалу $[0;\pi]$, для нескінченного $(0;\infty)$ функцію $f(x)$ можна продовжити на інтервал $(-\infty;0)$ парним чи непарним чином залежно від потреби і відповідно представляти формулою (19) або (20).

Якщо у формулі (18) позначити внутрішні інтеграли як функції α, то її можна записати таким чином:

$$f(x) = \int_0^\infty\left[u(\alpha)\cos\alpha x + v(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha, \quad (21)$$

де $u(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$, $v(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt$.

Формула (21) дає розклад функції на гармоніки з неперервно-змінюваною частотою α. Закон розподілу амплітуд і початкових фаз залежно від частоти α виражається через функції $u(\alpha)$ і $v(\alpha)$. Якщо у формулі (19) позначити

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt, \quad (22)$$

то вона прийме такий вигляд:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \quad (23)$$

Функція $F(\alpha)$ називається *косинус-перетворенням* Фур'є для $f(x)$. Якщо в (22) $F(\alpha)$ відома, а функція $f(t)$ невідома, то (22) можна вважати інтегральним рівнянням для $f(x)$, а функцію (23) – його розв'язком.

Аналогічно до (21) можна отримати *синус-перетворення* Фур'є:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt, \qquad (24)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\Phi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (25)$$

***Приклад* 4.** Визначити косинус та синус-перетворення Фур'є для функції $f(x)=e^{-x},(x>0)$.

Розв'язання. Запишемо косинус-перетворення для заданої функції:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\alpha t\,dt.$$

Інтегруючи праву сторону два рази частинами, отримаємо

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{e^{-t}}{\alpha}\sin\alpha t\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{e^{-t}}{\alpha}\cos\alpha t\Big|_0^{\infty}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-t}\cos\alpha t\,dt\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-t}}{\alpha^2}\cos\alpha t\Big|_0^{\infty}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\alpha)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha^2}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}F(\alpha).$$

З рівності $F(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{1}{\alpha^2}F(\alpha)$ маємо $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}$.

Аналогічно знаходиться синус-перетворення для функції $f(x)=e^{-x},(x>0)$: $\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

Згідно з формулами (23) та (25) можна записати такі рівності для $f(x)=e^{-x}$:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha,\quad (x\ge 0) \text{ або } e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha,\ (x>0).$$

Інтеграл Фур'є в комплексній формі

Оскільки в (16) підінтегральна функція у внутрішньому інтегралі парна, то (16) можна записати

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\ dt\right)d\alpha. \tag{26}$$

Для непарної функції такий інтеграл дорівнює нулю, зокрема

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\ dt\right)d\alpha=0. \tag{27}$$

Помножимо (27) на $\frac{i}{2\pi}$ і додамо до правої частини (26). Отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos\alpha(t-x)+i\sin\alpha(t-x)\right]dt\right)d\alpha. \tag{28}$$

Використавши формулу Ейлера, функцію (28) можна записати у такому вигляді:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{i\alpha(t-x)}dt\right)d\alpha. \tag{29}$$

Формулу (29) називають *інтегралом Фур'є в комплексній формі*. Іноді (29) записують у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{i\alpha x}dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{30}$$

Позначивши в (30)

$$F^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{i\alpha t}dt, \tag{31}$$

Отримаємо формулу (30) у такому вигляді:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha)\ e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{32}$$

Функція $F^*(\alpha)$ називається перетворенням Фур'є для $f(x)$, а функція визначена формулою (30), – оберненим перетворенням Фур'є для $F^*(\alpha)$.

Просте застосування перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є відповідно до його визначення застосовується при дослідженні нескінченних об'єктів. Розглянемо, для прикладу, розв'язок задачі про коливання нескінченної струни за допомогою перетворення Фур'є. Вважатимемо, що коливання струни є плоскі і описуються диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{33}$$

де $a^2 = \dfrac{T}{\mu}$, T – сила натягу струни, μ – лінійна густина.

Для простоти візьмемо початкові умови виду

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0. \tag{34}$$

Позначимо через $U(\alpha, t)$ перетворення Фур'є (образ) для розв'язку $u(x,t)$. Виконаємо перетворення Фур'є обох частин (33). Враховуючи те, що диференціювання функції u по x відповідає множенню образу U на $i\alpha$, маємо рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 (i\alpha)^2 U \text{ , або } \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -a^2\alpha^2 U \text{ .}$$

Останнє рівняння при довільному фіксованому α є звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, яке має розв'язок

$$U = C_1(\alpha)\, e^{-ia\alpha t} + C_2(\alpha)\, e^{ia\alpha t} \text{ .}$$

Перетворенням Фур'є початкових умов (34) знаходимо

$$U\Big|_{t=0} = U^*(\alpha), \; U_t'\Big|_{t=0} = 0 \text{ .}$$

Враховуючи початкові умови, запишемо розв'язок:

$$U = \frac{1}{2} U^*(\alpha)\; e^{-ia\alpha t} + \frac{1}{2} U^*(\alpha)\; e^{ia\alpha t} \text{ .} \tag{35}$$

Легко бачити, що множення образу на $e^{ia\alpha t}$ дає зсув прообразу на at. Тому повертаючись в (35) до прообразу, отримаємо шуканий розв'язок:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2}\varphi(x+at)\,. \qquad (36)$$

Розв'язок (36) описує дві біжучі в протилежних напрямках хвилі зі швидкістю a, які за час t переміщуються на відстань at, причому форма хвиль зберігається.

Часто при розв'язанні прикладних задач доводиться звертатись до рядів Фур'є. Так, при вивченні механічних та електричних коливних систем доводиться мати справу з періодичними сигналами. При аналізі складних сигналів часто сигнал представляють у вигляді суми складових:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}u_k(t)+r_n(t)\,,$$

де $u_k(t)$ − періодичні функції з певними частотами, $r_n(t)$ − неперіодична функція. При малих $r_n(t)$ функцію $f(t)$ називають *майже періодичною*.

Вправи

***Завдання* 1**. Дослідити ряди на збіжність, для збіжних рядів, де можливо знайти їх суму:

1. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots;$

2. $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\ldots;$

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots;$

4. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots;$

5. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots;$

6. $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\ldots;$

7. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9^2}+\frac{3}{9^3}+\frac{4}{9^4}+\ldots;$

8. $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots;$

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots;$

10. $\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\ldots;$

11. $\frac{1}{101}+\frac{2}{104}+\frac{3}{109}+\frac{4}{116}+\ldots;$

12. $\frac{1}{13}+\frac{2}{16}+\frac{3}{19}+\frac{4}{22}+\ldots;$

13. $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\frac{2^4\cdot 4!}{4^4}+\ldots;$

14. $\frac{\sqrt{1!}}{3}+\frac{\sqrt{2!}}{3^2}+\frac{\sqrt{3!}}{3^3}+\frac{\sqrt{4!}}{3^4}+\ldots;$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^3+5}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)^2}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^4+2}{n^4}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n-1}\right)^n$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{2n+5}$;

20. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots$;

21. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$;

22. $\frac{1\cdot 2}{5^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{5^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5^6}+\ldots+\frac{(n+1)!}{5^{2n}}+\ldots$;

23. $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}+\ldots$;

24. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$;

25. $\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{9!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$.

***Завдання* 2**. Знайти радіус збіжності (№1–6) та інтервал збіжності(№7–10) степеневих рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+10)x^n}{3^n n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n+3}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[5]{n}}\ x^n$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{\sqrt[6]{n}}\ x^n$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{\sqrt[3]{n^2}+3}\ x^n$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{\sqrt[3]{n+3}}\ x^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n^2+3)\cdot 3^n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n+2}$.

***Завдання* 3**. Розвинути у ряд Маклорена функції:

1. $\ln\frac{1+x}{1-x}$; 2. $\ln(2-3x+x^2)$; 3. $\ln(1-x+x^2)$; 4. $\cos(x-\alpha)$;

5. $\sin^2 x$; 6. xe^x; 7. 2^x; 8. $\cos\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)$; 9. $\sin\left(mx+\frac{\pi}{3}\right)$;

10. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

***Завдання* 4**. Розвинути в ряд Тейлора задані функції:

1. x^3-x за степенями $x+1$;
2. e^x за степенями $x+2$;
3. $\frac{1}{x}$ за степенями $x+3$;
4. $\sqrt{x}$ за степенями $x-4$;
5. $\sqrt[3]{x}$ за степенями $x+1$;
6. $\frac{1}{2-x-x^2}$ за степенями $x+3$;
7. $\frac{1}{x^2+3x+2}$ за степенями $x+4$;
8. $\ln x$ за степенями $x-1$;
9. $\sin 3x$ за степенями $x+\frac{\pi}{3}$;
10. $\sin\frac{\pi x}{4}$ за степенями $x-2$.

***Завдання* 5**. Провести наближені обчислення, використовуючи розвинення функцій у ряд:

1. $\sqrt{1,005}$; 2. $\sqrt[3]{0,997}$; 3. $\cos 12^\circ$; 4. $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$, з точністю $\varepsilon=0,001$; 5. $\int_0^{0,5}\cos\frac{x^2}{4}dx$, з точністю $\varepsilon=10^{-6}$; 6. $\sqrt{e}$;

7. $\int_0^{0,5} e^{x^2}dx$; 8. $\sqrt[5]{1,2}$; 9. $\int_0^{1/3}\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$; 10. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є функції, періодичні з періодом 2π ($2l$):

1. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ 2, & 0<x\le\pi,\end{cases}$;

2. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0\\ 3, & 0<x\le\pi,\end{cases}$;

3. $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi<x\le 0\\ \pi-x, & 0<x\le\pi,\end{cases}$;

4. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x^2, & 0\le x<\pi,\end{cases}$;

5. $f(x)=\sin\alpha x,\quad (-\pi;\pi),\quad \alpha\ne n,\quad \alpha-$ціле число;

6. $f(x)=\dfrac{x}{2},\quad (-\pi;\pi]$;

7. $f(x)=|\sin x|,\ (-\pi;\pi]$;

8. $f(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<0\\ 4, & 0\le x<2,\end{cases}$;

9. $f(x)=x^2+1,(-2;2]$;

10. $f(x)=-x^3,\quad [-1;1)$.

Завдання 7. Розвинути в ряд Фур'є функції, задані на півперіоді, за косинусами:

1. $f(x)=x\sin x,\quad [0;\pi)$;

2. $f(x)=-2x+\pi,\quad (0;\pi]$;

3. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2,\end{cases}$;

4. $f(x)=|\cos x|,\quad (0;\pi]$;

5. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2},\quad 0<x\le\pi$;

6. $f(x)=\pi-x,\quad (0;\pi]$.

Завдання 8. Розвинути в ряд Фур'є функції, задані на півперіоді, за синусами:

1. $f(x)=\dfrac{\pi}{4},\quad [0;\pi)$; 2. $f(x)=\sin\dfrac{x}{2},\quad [0;\pi)$; 3. $f(x)=\pi-2x,\quad (0;\pi]$;

4. $f(x)=e^x,\quad [0;1)$; 5. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-x,\quad [0;\pi)$; 6. $f(x)=1-x,\quad (0;1]$.

Відповіді

***До завдання* 1**

1. $\dfrac{3}{4}$; 2. $2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$; 3. 1; 4. $\dfrac{11}{18}$; 5. $\dfrac{1}{4}$; 6. $\dfrac{7}{36}$; 7. $\dfrac{9}{64}$;

8. збіжний; 9. розбіжний; 10. розбіжний; 11. розбіжний;

12. розбіжний; 13. збіжний; 14. розбіжний; 15. збіжний; 16. розбіжний; 17. збіжний; 18. збіжний; 19. розбіжний; 20. збіжний; 21. збіжний; 22. розбіжний; 23. розбіжний; 24. розбіжний; 25. абсолютно збіжний.

***До завдання* 2**

1. $\frac{3}{2}$; 2. $\frac{5}{3}$; 3. 1; 4. 1; 5. 1; 6. 1;

7. $[-2;4[$; 8. $[-2;8)$; 9. $[-2;4)$; 10. $[-1;0)$.

***До завдання* 3**

1. $2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right]$; 2. $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+2^{-n}\right)\frac{x^n}{n!}$;

3. $-\left[x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{2x^6}{6}+...\right]$;

4. $\sin\alpha\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)+\cos\alpha\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)$;

5. $\frac{2\cdot x^2}{2!}-\frac{2^3\cdot x^4}{4!}+\frac{2^5\cdot x^6}{6!}-...$; 6. $x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+...$;

7. $1+\frac{x\ln 2}{1!}+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+...$; 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{mx}{1!}-\frac{m^2x^2}{2!}+...\right]$;

9. $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^4x^4}{4!}-...\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mx}{1}-\frac{m^3x^3}{3!}+\frac{m^5x^5}{5!}-...\right)$;

10. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+....$

***До завдання* 4**

1. $2(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3$; 2. $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$; 3. $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}$;

4. $2+\frac{x-4}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot}{2^{3n-1}\cdot n}$; 5. $-1+\frac{x+1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot ...(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^n$;

6. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}-1\right)(x+3)^n$; 7. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$;

9. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$; 10. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}\left(x-2\right)^{2n}$.

***До завдання* 5**

1. $1{,}0025$; 2. $0{,}999$; 3. $0{,}9781$; 4. $0{,}508$; 5. $0{,}499805$;
6. $1{,}6476$; 7. $0{,}5449$; 8. $1{,}037$; 9. $0{,}051$; 10. $0{,}747$.

***До завдання* 6**

1. $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right)$;

2. $f(x)=\frac{6-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$

$+\frac{\pi+6}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)-\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\ldots\right)$;

3. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)$;

5. $f(x)=\frac{2\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-\alpha^2}$;

6. $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots$;

7. $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$;

8. $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{1}+\frac{\sin\frac{3\pi x}{2}}{3}+\frac{\sin\frac{5\pi x}{2}}{5}+\ldots\right)$;

9. $f(x)=\frac{7}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi n x}{2}}{n^2}$;

10. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\pi n x}{n}\left(1-\frac{6}{(\pi n)^2}\right)$.

***До завдання* 7**

1. $f(x)=1-\frac{\cos x}{2}-2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}-\frac{\cos 3x}{2\cdot 4}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}-...\right)$;

2. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;

3. $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$;

4. $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}-\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}-...\right)$;

5. $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos nx}{4n^2-1}$;

6. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

***До завдання* 8**

1. $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...$;

2. $f(x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1\cdot 3}-\frac{2\sin 2x}{3\cdot 5}+\frac{3\sin 3x}{5\cdot 7}-...\right)$;

3. $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$;

4. $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n\left(1+(-1)^{n+1}e\right)}{1+(\pi n)^2}\sin \pi nx$;

5. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$;

6. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi nx}{n}$.

Розділ 12. КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. Подвійний інтеграл

Досі ми розглядали визначені інтеграли виду $\int_a^b f(x)dx$ як границю інтегральної суми, коли функція задана на відрізку $[a;b]$ осі OX. Тобто областю інтегрування був деякий прямолінійний відрізок.

Зараз ми узагальнимо поняття про інтеграл на той випадок, коли область інтегрування є плоска область або деяка інша область у просторі.

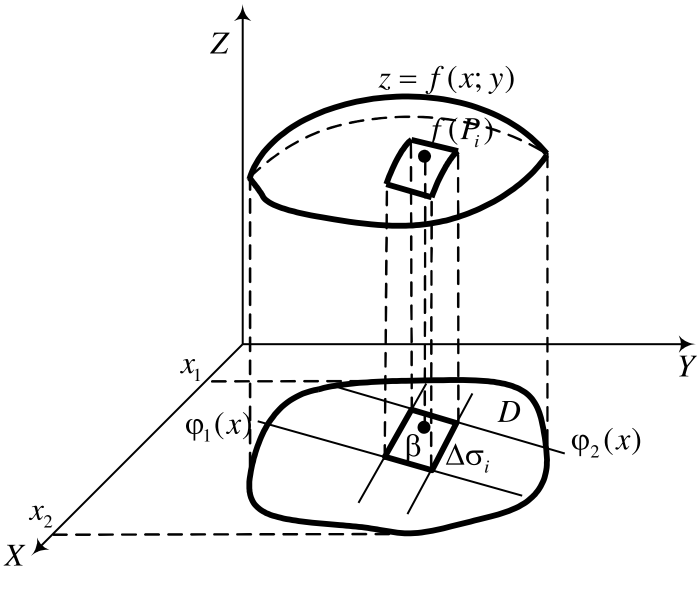


Рис. 59.

Розглянемо задачу про знаходження об'єму тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x;y)$, з боків – циліндричною поверхнею та знизу областю D в площині XOY, яка є проекцією поверхні $z = f(x;y)$ на площину XOY.

Розіб'ємо область D (рис. 59) рівносторонньою сіткою на елементарні площинки $\Delta\sigma_i$, площею $\Delta\sigma_i$. Інколи, залежно від змісту, $\Delta\sigma_i$ буде фігурувати як назва площинки, а інколи – як площа цієї площинки.

Елементарний об'єм наближено дорівнює $\Delta V_i \approx f(P_i)\Delta\sigma_i$, де P_i – точка, вибрана довільним чином на елементарній площинці $\Delta\sigma_i$. Якщо сітку розбиття області D необмежено зменшувати, то елементарна площа $\Delta\sigma_i \to 0$, при $n \to \infty$,

де n – кількість елементарних площинок.

Сумуючи всі елементарні об'єми, отримаємо, наближено, об'єм усього тіла:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i . \quad (1)$$

Переходячи в (1) до границі, коли *max* $\Delta\sigma_i \to 0$, отримаємо точний об'єм тіла:

$$V = \lim_{\max \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i . \quad (2)$$

Границя інтегральної суми (2) називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x;y)$ за областю D і позначається

$$\iint_{(D)} f(x,y)d\sigma . \quad (3)$$

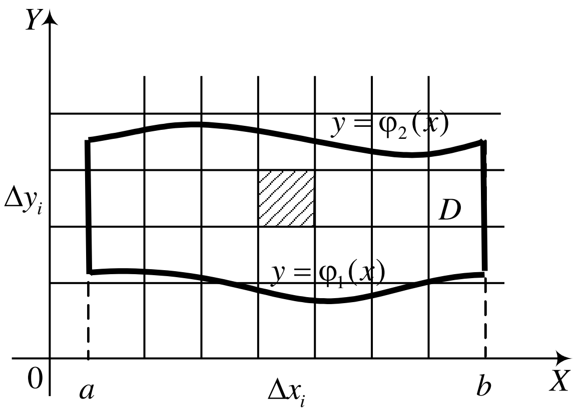


Рис. 60.

Зауваження. Нехай d_i – максимальна відстань між двома точками частинної області з площею $\Delta\sigma_i$. Якщо $\Delta\sigma_i$ рівномірно стискати в точку, то це можливе тоді, коли $d_i \to 0$ і навпаки. Часто $d = \max\limits_i d_i$ називають *діаметром розбиття* області D.

Обчислення подвійного інтеграла (3) зводиться до повторного інтегрування. Нехай елемент площі $\Delta\sigma$ отримується розбиттям області D на прямокутники зі сторонами $\Delta x,\ \Delta y$. Тоді $f(P_i) = f(x_i;y_i)$, $\Delta\sigma = \Delta x\Delta y$, $d\sigma = dxdy$. Отже, інтеграл (3) набуває вигляду

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy . \quad (4)$$

Нехай область D (див. рис. 60) обмежена кривими: зверху $y=\varphi_2(x)$, знизу $y=\varphi_1(x)$, з боків $x=a,\quad x=b$, причому всюди на $[a;b]$ функції $\varphi_1(x)$

та $\varphi_2(x)$ неперервні і $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$. Таку область називають *правильною*, або *нормальною*. Тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{5}$$

причому спочатку обчислюється внутрішній інтеграл за змінною y (x– параметр) і отриманий результат інтегрується за змінною x. Зауважимо при цьому, що якщо крива $\varphi_1(x)$ (або крива $\varphi_2(x)$) на проміжку $a \le x \le b$ задається різними аналітичними виразами, наприклад

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x), & \text{при } a \le x \le c, \\ \varphi_1^{(2)}(x), & \text{при } c \le x \le b, \end{cases}$$

то інтеграл справа в (5) записується у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,. \tag{6}$$

Аналогічно до (5), якщо область D обмежена кривими $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y), y = c, y = d,$ причому всюди на $[c;d]$ функції $\psi_1(y), \psi_2(y)$ неперервні і $\psi_1(x) \le \psi_2(x)$, тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,. \tag{7}$$

Подвійні інтеграли, які зображаються у вигляді (5) та (7), називаються повторними. Таке представлення зводить обчислення подвійних інтегралів до повторного інтегрування.

Часто при розв'язуванні задач для полегшення обчислень зручно змінювати порядок інтегрування.

***Приклад* 1.** Розставити межі інтегрування двома способами і обчислити подвійний інтеграл $I = \iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dxdy$, якщо область D обмежена кривими $y = x, \quad y = x^{-1}, \quad x = 2$.

Розв'язання. Спочатку нарисуємо область D та проставимо межі інтегрування за змінними *x* та *y* (рис. 61).

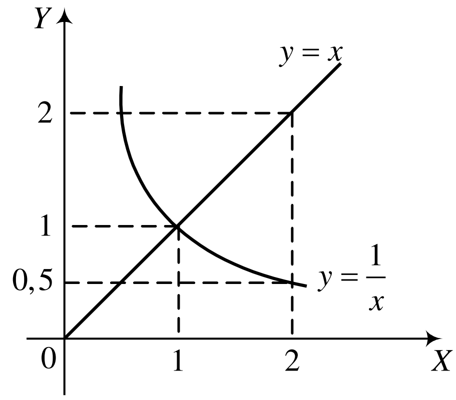


Рис. 61.

$$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2 x^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^2 x^2(-\frac{1}{y})\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=$$

$$=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=2,25.$$

Обчислимо тепер цей подвійний інтеграл, використовуючи формулу (7), тобто змінимо порядок інтегрування в попередньому повторному інтегралі. При цьому область D розіб'ємо на дві підобласті, в яких межі зміни y мають вигляд

$$\psi_1(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & \text{при } 0{,}5\le y\le 1,\\ y, & \text{при } 1<y\le 2,\end{cases}\quad \psi_2(y)=2,\ c=0{,}5,\quad d=2.$$

Тоді подвійний інтеграл представляється двома повторними:

$$I=\iint_{(D)}\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\int_{\frac{1}{y}}^{2}x^2dx+\int_1^2\frac{dy}{y^2}\int_y^2 x^2dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)^2\Bigg|_{\frac{1}{y}}+\int_1^2\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_y^2=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_1^2\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=2,25\ .$$

Очевидно, що перший спосіб обчислення інтеграла швидше веде до мети. Тому на практиці важливий вдалий вибір порядку інтегрування або вміння змінити порядок інтегрування.

Користуючись означенням подвійного інтеграла, легко вивести такі властивості:

а) лінійність: $\iint_{(D)}(f(x,y)\pm g(x,y))dxdy=\iint_{(D)}f(x,y)dxdy\pm\iint_{(D)}g(x,y)dxdy$,

і $\iint_{(D)}\lambda\ f(x,y)dxdy\ =\ \lambda\iint_{(D)}f(x,y)dxdy\ ,\ (\lambda\in R)$; (8)

б) адитивність: якщо $D = D_1 + D_2$, причому D_1 і D_2 не мають спільних внутрішніх точок, тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy; \qquad (9)$$

в) якщо m найменше, а M найбільше значення функції $f(x,y)$ в області D, то

$$m \cdot S \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M \cdot S \qquad (10)$$

де S – площа області D;

г) (теорема про середнє) Подвійний інтеграл дорівнює добутку площі області D на значення підінтегральної функції в деякій точці інтегрування

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y}) \cdot S. \qquad (11)$$

Значення $f(\overline{x},\overline{y})$ називається середнім значенням функції $f(x,y)$ в області D.

§ 2. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Перетворення плоских областей. Розглянемо перетворення площини $\zeta O\eta$ в площину XOY, що задаються формулами

$$\begin{cases} x = x(\zeta,\eta), \\ y = y(\zeta,\eta). \end{cases} \qquad (1)$$

Нехай це перетворення таке, що переводить криволінійний чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ (рис. 62) у прямокутник $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$ (рис. 63).

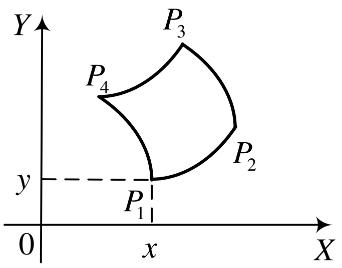


Рис. 62.

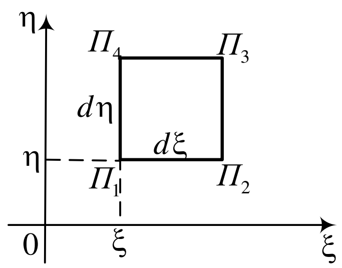


Рис. 63.

Спочатку наша задача полягає в знаходженні залежності між площами цих чотирикутників, враховуючи (1) та взаємно однозначну відповідність між точками чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ та $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$. Це означає, що система (1) має єдиний розв'язок відносно ζ та η:

$$\begin{cases} \zeta = \zeta(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{2}$$

Вершини прямокутника на площині $\zeta O \eta$ мають координати: $\Pi_1(\zeta, \eta)$, $\Pi_2(\zeta + d\zeta, \eta)$, $(\Pi_3(\zeta + d\zeta, \eta + d\eta)$, $\Pi_4(\zeta, \eta + d\eta)$. Відповідні вершини криволінійного прямокутника мають координати:

$$P_1(x(\zeta,\eta), y(\zeta,\eta)),\ P_2(x(\zeta + d\zeta,\eta), y(\zeta + d\zeta,\eta)),$$

$$P_3(x(\zeta + d\zeta,\ \eta + d\eta),\ y(\zeta + d\zeta,\ \eta + d\eta)),\ P_4(x(\zeta, \eta + d\eta), y(\zeta, \eta + d\eta)).$$

Якщо обмежитись членами першого порядку відносно $d\zeta, d\eta$, то наближено можна взяти точки:

$$P_1(x, y)\ \ P_2(x + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, y + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta),$$

$$P_3(x + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta),\ \ P_4(x + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta),$$

де $x = x(\zeta, \eta), y = y(\zeta, \eta)$ і всі похідні обчислені в точці (ζ, η). Оскільки проекції відрізків P_1P_2 і P_3P_4 на обидві осі відповідно рівні, то відрізки ці рівні і паралельні, так що з точністю до малих вищого порядку малості чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ є паралелограм. Його площа дорівнює подвійній площі трикутника $P_1P_2P_3$. З аналітичної геометрії площа трикутника з вершинами $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3)$ дорівнює:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи цю формулу та властивість визначників, отримуємо, що шукана площа дорівнює абсолютній величині визначника:

$$d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \; d\zeta \; d\eta \,. \qquad (3)$$

Визначник у правій частині (3) називають *якобіаном* перетворення:

$$J(\zeta, \eta) \; = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Розглянемо тепер подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y) dx dy \,, \qquad (5)$$

де область D обмежена простим кусково-гладким контуром L, а функція $f(x; y)$ неперервна в цій області. Припустимо, що область D площини XOY пов'язана формулами (1) з деякою областю Δ на площині $\zeta O \eta$, причому справедлива формула (3) (рис. 64).

Область D розбиваємо довільним чином на підобласті D_i і в кожній з них вибираємо точку $(x_i; y_i)$. Утворимо інтегральну суму

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i \,,$$

де $\Delta\sigma_i$ – площа підобласті D_i. Границя цієї суми є подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$, коли діаметр розбиття прямує до нуля.

Застосуємо до кожної підобласті D_i формулу (3):

$$\Delta\sigma_i = \left| J(\zeta_i^0, \eta_i^0) \right| \Delta\zeta_i \Delta\eta_i \,,$$

де (ζ_i^0, η_i^0) – деяка точка області Δ_i, яка є образом D_i, при перетворенні (1).

Тоді інтегральна сума набуде вигляду

$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \; \left| J(\zeta_i^0, \eta_i^0) \right| \; \Delta_i$, ($\Delta_i$ – площа області Δ_i).

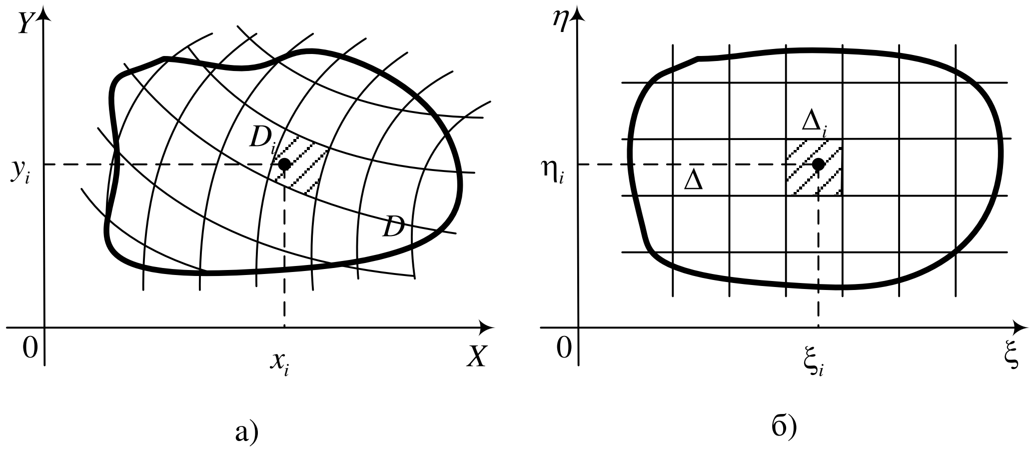


Рис. 64.

Оскільки точка $(x_i; y_i)$ в області D_i вибирається довільно, то виберемо її так, щоб $x_i = x(\zeta_i^0, \eta_i^0), \quad y_i = y(\zeta_i^0, \eta_i^0)$.

Перейшовши в інтегральній сумі

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x(\zeta_i^0, \eta_i^0), y(\zeta_i^0, \eta_i^0)) \left| J(\zeta_i^0, \eta_i^0) \right| \Delta_i$$

до границі, коли діаметр розбиття прямує до нуля, отримаємо

$$\iint_{(\Delta)} f(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) \left| J(\zeta, \eta) \right| \, d\zeta \, d\eta \, .$$

Формула заміни змінних у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint_{(D)} f(x, y) dxdy = \iint_{(\Delta)} f(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) \left| J(\zeta, \eta) \right| d\zeta \, d\eta. \tag{6}$$

Отже, для того щоб здійснити заміну змінних у подвійному інтегралі, потрібно не тільки підставити у функцію f замість x та y їх вирази (1), але й замінити елемент площі $dxdy$ його виразом у криволінійних координатах.

Зауваження. Якщо в подвійному інтегралі (5) функція $f(x; y) \equiv 1$, то цей інтеграл чисельно визначає площу області, за якою взятий інтеграл, тобто

$$S(D) = \iint_{(D)} dxdy \, . \tag{7}$$

Часто при обчисленні подвійних інтегралів використовують заміну $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (полярні координати). Легко обчислити якобіан цього переходу:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho. \qquad (8)$$

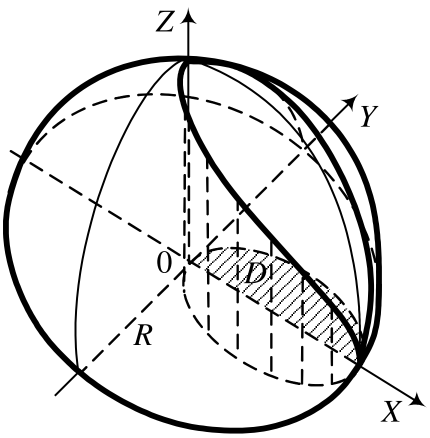


Рис. 65.

Варто запам'ятати, що при переході до полярної системи координат якобіан переходу дорівнює ρ.

***Приклад* 1.** Знайти об'єм V тіла, вирізаного циліндром $x^2 + y^2 = Rx$ із кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ (див. рис. 65) (це тіло інколи називають тілом Вівіані на честь італійського математика, який вперше ним зацікавився).

Розв'язання. На площині XOY рівняння $x^2 + y^2 = Rx$ описує коло $(x - 0,5R)^2 + y^2 = 0,25R^2$ з центром у точці $(0,5R;0)$ і радіусом $0,5R$.

Враховуючи симетрію, шуканий об'єм дорівнює: $V = 4\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$. Область D (див. рис. 93) – заштрихований півкруг. Для обчислення об'єму перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Рівняння півкола в полярній системі $\rho^2 = R\rho\cos\varphi$, або $\rho = R\cos\varphi$. Кут φ змінюється в межах від 0 до $\pi/2$. Знаходимо об'єм

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/2} (\sqrt{R^2 - \rho^2})^3 \Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^3\varphi)d\varphi = \frac{2}{9}R^3(3\pi - 4).$$

Крім об'єму тіла, з допомогою подвійного інтеграла можна шукати площу поверхні $z = f(x; y)$ за формулою

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy, \qquad (9)$$

де D – область у площині XOY, яка є проекцією поверхні на цю площину.

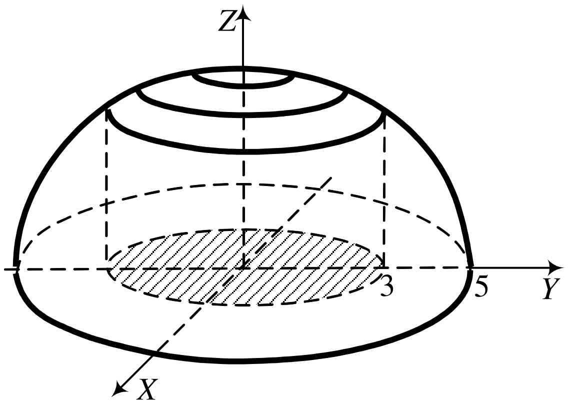


Рис. 66.

Приклад 2. Знайти площу поверхні, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = 9$ зі сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Розв'язання. Для верхньої півсфери $z(x; y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ (рис. 66) частинні похідні дорівнюють $\frac{\partial z}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$;

$$\frac{\partial z}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

Підставляючи їх у формулу (9), отримаємо подвійний інтеграл

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \iint\limits_{(D)} \frac{5dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

В останньому інтегралі перейдемо до полярної системи координат, матимемо

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \frac{5\rho d\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}} = -5\int_0^{2\pi} d\varphi (\sqrt{25 - \rho^2})^3 \Bigg|_0^3 = 5\int_0^{2\pi} d\varphi = 10\pi.$$

Отже, вся площа, яку вирізає циліндр, дорівнює 20π. Тут врахована і нижня частина сфери.

Застосування подвійних інтегралів для розв'язку задач механіки

Якщо деяка пластина займає область D площини XOY і має змінну поверхневу густину $\gamma = \gamma(x, y)$, то маса M пластини та її статичні моменти M_x і M_y відносно осей OX та OY виражаються відповідно інтегралами:

$$M = \iint\limits_{(D)} \gamma(x, y)dxdy\,;\ M_x = \iint\limits_{(D)} y\gamma(x, y)dxdy\,;\ M_y = \iint\limits_{(D)} x\gamma(x, y)dxdy\,. \qquad (10)$$

Координати центра мас $\overline{x}$ і $\overline{y}$ пластини знаходяться так:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M};\ \ \overline{y} = \frac{M_x}{M}. \qquad (11)$$

Моменти інерції пластини відносно осей OX та OY відповідно дорівнюють

$$J_x = \iint\limits_{(D)} y^2\gamma(x, y)dxdy\,,\ J_y = \iint\limits_{(D)} x^2\gamma(x, y)dxdy\,, \qquad (12)$$

а момент інерції відносно початку координат

$$J_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)\gamma(x, y)dxdy = J_x + J_y\,. \qquad (13)$$

***Приклад* 3.** Знайти координати центра мас однорідної пластини, яка обмежена кривими $ay = x^2, \quad x + y = 2a, (a > 0)$.

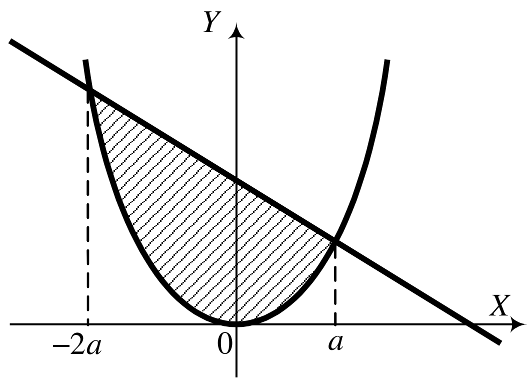


Рис. 67.

Розв'язання. Знайдемо спочатку масу та статичні моменти пластини (рис. 67) за формулою (10):

$$M = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy$$

$$= \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a} \right)dx =$$

$$=\left(2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{2a}^{a}=\frac{9}{2}a^2,$$

$$M_x=\iint\limits_{(D)} ydxdy=\int\limits_{-2a}^{a}dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}ydy=\frac{1}{2}\int\limits_{-2a}^{a}\left[(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{(2a-x)^3}{3}-\frac{x^5}{5a^2}\right]\Bigg|_{-2a}^{a}=\frac{36}{5}a^3,$$

$$M_y=\iint\limits_{(D)} xdxdy=\int\limits_{-2a}^{a}xdx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\int\limits_{-2a}^{a}x\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\left(ax^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=$$

$$=-\frac{9}{4}a^3.$$

Підставляючи знайдені величини у (2), маємо координати центра мас:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{S}=-\frac{a}{2};\ \bar{y}=\frac{M_x}{S}=\frac{8}{5}a.$$

§ 3. Потрійний інтеграл

За аналогією з подвійним інтегралом, вводиться поняття потрійного інтеграла. Нехай у тримірному просторі $OXYZ$ задана скінченна замкнута область V і функція $f(x;y;z)$ визначена і обмежена в цій області. Розіб’ємо область V на скінченну кількість підобластей (комірок) $\Delta V_i, (i=1,2,3,...,n)$, у кожній з яких виберемо довільним чином точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Утворимо суму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i, \qquad (1)$$

де ΔV_i – об’єм i-ї комірки.

Позначимо через d – максимальний діаметр комірок ΔV_i. Границя інтегральної суми (1), при $d\to 0$, якщо вона існує і не залежить від форми ΔV_i та вибору точок M_i, називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x,y,z)$ за областю V і позначається так:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \,. \qquad (2)$$

Якщо функція $f(x; y; z)$ неперервна в замкненій обмеженій області інтегрування V, то інтеграл (2) існує.

Нехай функція $\rho(x, y, z)$ виражає густину тіла в точці $M(x; y; z)$. Тоді інтеграл (2) визначає масу тіла:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z)dV \,. \qquad (3)$$

Зокрема, якщо $\rho(x, y, z) \equiv 1$, то маса області V чисельно дорівнює об'єму:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV \,. \qquad (4)$$

Якщо обчислення потрійного інтеграла (2) ведеться в прямокутних координатах x, y, z, то в якості комірок ΔV_i вибираються прямокутні паралелепіпеди з гранями $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$. Тоді елемент об'єму $dV = dxdydz$.

Потрійний інтеграл (2) у цьому випадку має вигляд

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz \,. \qquad (5)$$

При $f(x; y; z) \equiv 1$, із (5) можна знайти об'єм тіла V:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$$

.

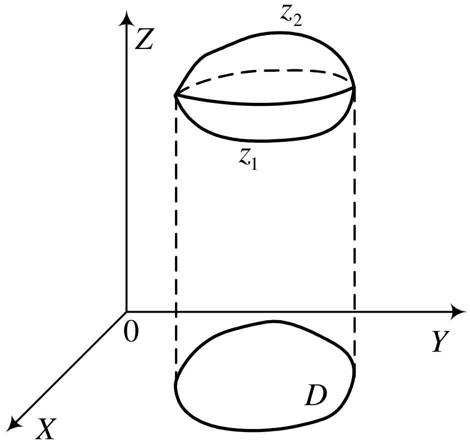


Рис. 68.

У найпростішому випадку обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення трьох звичайних (однократних) інтегралів.

Нехай область інтегрування V нормальна (опукла або вгнута) відносно осі OZ, тобто обмежена зверху та знизу однозначними неперервними поверхнями

$$z_1 = z_1(x; y), \quad z_2 = z_2(x; y),$$

причому проекція V на площину XOY є плоска область D (рис. 68).

При фіксованих значеннях $(x;y)\in D$ відповідні аплікати z точок області V змінюються в межах $z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)$.

За аналогією з подвійним, потрійний інтеграл можна представити як подвійний (зовнішній) та однократний (внутрішній):

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{7}$$

Якщо, крім цього, область D правильна відносно осі OY і визначається нерівностями $a\le x\le b$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – однозначні неперервні функції на відрізку $[a,b]$, тоді

$$\iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{8}$$

Таким чином, обчислення потрійного інтеграла зводиться до знаходження трьох повторних:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{9}$$

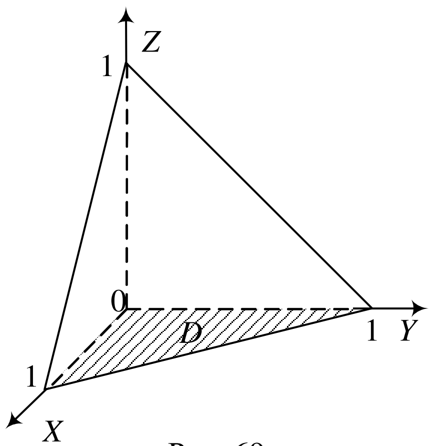


Рис. 69.

***Приклад* 1.** Обчислити потрійний інтеграл

$$I=\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz,$$

де V – піраміда, обмежена площинами: $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Розв'язання. Проекція V на площину XOY (рис. 69) є трикутник, обмежений прямими $x=0,\ y=0,\ x+y=1$. При цьому z: $0\le z\le 1-x-y$.

Використаємо формулу (7).

Маємо: $I=\iint\limits_{(D)} xydxdy\int\limits_0^{1-x-y} zdz=\iint\limits_{(D)} xy\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{1-x-y}=$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{(D)} xy(1-x-y)^2\,dxdy\,.$$

Розставивши межі інтегрування для трикутника D, отримаємо

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} y\left[(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2\right]dy\ =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[(1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx\ =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 \left[1-(1-x)\right](1-x)^4\,dx\ =\ \frac{1}{24}\left[-\frac{(1-x)^5}{5} + \frac{(1-x)^6}{6}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{720}.$$

Якщо в потрійному інтегралі $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$ зробити заміну

$$x = x(u,v,w),\ \ y = y(u,v,w),\ \ z = z(u,v,w) \qquad (10)$$

і якобіан системи (10) $J = J(u,v,w) \neq 0$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f\left[x(u,v,w); y(u,v,w); z(u,v,w)\right]\ |J|\,dudvdw\,. \qquad (11)$$

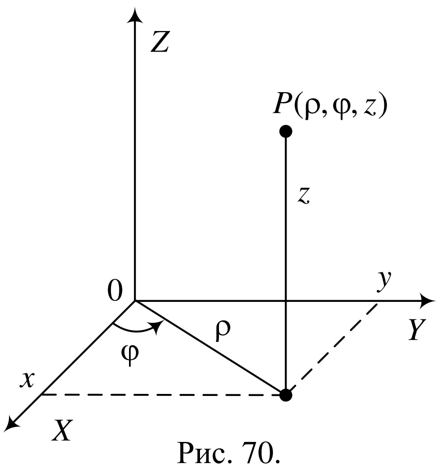


Рис. 70.

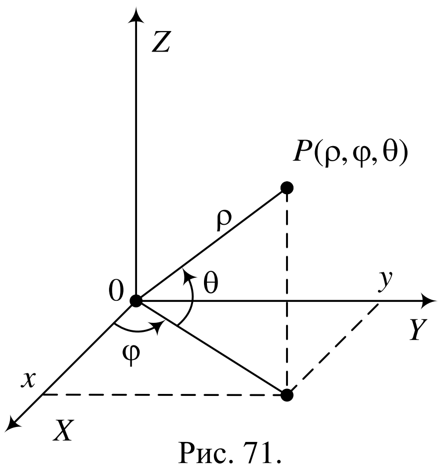


Рис. 71.

Найбільш вживані із криволінійних координат:

1) *циліндричні координати* (ρ, φ, z) (див. рис. 70).

Для циліндричних координат формули переходу:

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = z\,,\ (\rho \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty). \qquad (12)$$

Легко обчислити якобіан переходу до циліндричних координат:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho . \quad (13)$$

Тому формула (11) для циліндричних координат набуває вигляду

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\ \rho\ d\varphi\ d\rho\ dz . \quad (14)$$

2) *сферичні координати* (див. рис. 71) мають формули переходу:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ z = \rho\sin\theta ,$$

$$(\rho \ge 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}). \quad (15)$$

Якобіан цього перетворення для сферичних координат

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\theta \begin{vmatrix} -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + \rho\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\sin\theta\ (\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta) +$$

$$\rho^2\cos\theta\ (\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi) = \rho^2\cos\theta .$$

Отже, для сферичних координат якобіан дорівнює

$$J = \rho^2\cos\theta . \quad (16)$$

Формула (11) для сферичних координат має вигляд

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\ \rho^2\cos\theta\ d\rho d\varphi d\theta . \quad (17)$$

***Приклад* 2.** Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz$, де область інтегрування V обмежена поверхнями $x^2+y^2=2z, \quad z=2$.

Розв'язання. Перейдемо до циліндричних координат. Параболоїд $x^2+y^2=2z,$ перетинаючись із площиною $z=2$, вирізає з неї коло $x^2+y^2=4$, тому $0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 2.$ Після заміни змінних отримаємо

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz=2\pi\int\limits_0^2\rho^3\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\frac{16}{3}\pi\,.$$

***Приклад* 3.** Переходячи до сферичних координат, обчислити інтеграл $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz$, де область V – півкуля $x^2+y^2+z^2\le R^2, \quad z\ge 0$.

Розв'язання. Для області V межі зміни сферичних координат: $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le R$. За формулою (17) отримаємо

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_{(V)}\rho^2\cos^2\theta\ \rho^2\cos\theta\ d\rho d\varphi d\theta\ =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta\int\limits_0^R\rho^4 d\rho\ =\ =\frac{4}{15}\pi R^5\,.$$

Застосування потрійних інтегралів до деяких задач механіки

Потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_{(V)}dxdydz \tag{18}$$

виражає об'єм області V, за якою ведеться інтегрування.

Маса неоднорідного тіла із змінною густиною $\gamma(x,y,z)$ визначається за формулою

$$M=\iiint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)dxdydz\,. \tag{19}$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площин знаходяться такими формулами:

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (20)$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Для знаходження центра маси тіла використовують формули

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}; \ \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}; \ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}. \qquad (21)$$

***Приклад* 4.** Знайти координати центра ваги куба

$$0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1,$$

якщо густина в кожній точці дорівнює добутку координат цієї точки.

Розʼязання. За умовою задачі густина дорівнює $\gamma(x, y, z) = xyz$. Спочатку знайдемо масу тіла за формулою (19):

$$M = \iiint\limits_{(V)} xyz\ dxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^1 ydy \int_0^1 zdz = \frac{1}{8}.$$

З міркувань симетрії робимо висновок, що $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}.$ Тому досить знайти, наприклад, M_{yz}. За формулами (20) знаходимо

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2 yz\ dxdydz = \int_0^1 x^2dx \int_0^1 ydy \int_0^1 zdz = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Центр ваги тіла визначаємо за формулою (21), маємо $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{2}{3}$.

Отже, точка $C\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ є центром ваги куба.

§ 4. Криволінійні інтеграли

Означимо криволінійні інтеграли першого і другого родів. Нехай на деякій кусково-гладкій, плоскій кривій $C = AB$ задана функція $f(M) = f(x; y)$ і нехай Π – довільне розбиття цієї кривої на частини A_i, A_{i+1}, точками $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ (рис. 72).

Позначимо $d(\Pi) = \max\Delta l_i$, де Δl_i – довжина дуги A_i, A_{i+1}. На кожній такій дузі виберемо точку $M_i(x_i, y_i)$ і утворимо суму $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$.

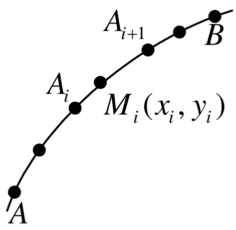


Рис. 72.

Якщо для довільної послідовності розбиттів Π_k сума $S_{n(k)}$ має скінченну границю I, що не залежить від вибору Π_k і точок M_i, то число I називається *криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f(M)$ вздовж кривої AB і позначається

$$I = \int\limits_{(AB)} f(x, y)dl \text{, або } I = \int\limits_{C} f(x, y)dl. \tag{1}$$

Криволінійні інтеграли першого роду зводяться до визначених інтегралів, причому якщо крива задана параметрично $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, то справедлива формула

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{2}$$

Якщо крива задана рівнянням $y = y(x)$, то формула (1) має вигляд

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)dl = \int\limits_{a}^{в} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \tag{3}$$

Для кривої в просторі, що задана параметрично $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \; (t_0 \le t \le t_1)$, інтеграл (1) має вигляд

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{4}$$

Нехай $\mu = \mu(x; y)$ – лінійна густина плоскої кривої, тоді маса кривої AB дорівнює:

$$M = \int\limits_{(AB)} \mu(x, y)dl. \tag{5}$$

Координати центра ваги (x_c, y_c) плоскої кривої знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{1}{M} \int\limits_{(AB)} x\mu(x, y)dl\,, \qquad\qquad y_c = \frac{1}{M} \int\limits_{(AB)} y\mu(x, y)dl\,. \tag{6}$$

Нехай тепер на гладкій кривій $C = AB$ задані функції $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ і Π – довільне розбиття кривої. Виберемо на кожній дузі A_i, A_{i+1} (див. рис. 100) довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і утворимо інтегральні суми

$$S_n(P) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i\,, \quad S_n(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i)\Delta y_i\,.$$

Розглянемо послідовність розбиттів $\{\Pi_k\}$ таку, що $d(\Pi) \to 0$ (діаметр розбиття прямує до нуля).

Якщо $S_n(P)$ і $S_n(Q)$ мають скінченні границі, які не залежать від вибору послідовності $\{\Pi_k\}$ і точок M_i, то їх називають *криволінійними інтегралами другого роду* від функцій $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ і позначають відповідно

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx\,, \quad \int\limits_{(AB)} Q(x, y)dy\,, \text{ або } \int\limits_{C} P(x, y)dx\,, \ \int\limits_{C} Q(x, y)dy\,.$$

Суму $\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx + \int\limits_{(AB)} Q(x, y)dy$ прийнято називати загальним криволінійним інтегралом другого роду і позначати

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy\,. \tag{7}$$

Варто зауважити, що при зміні напряму інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний.

Легко бачити, що криволінійні інтеграли першого та другого родів пов'язані співвідношенням

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(AB)} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)dl\,, \tag{8}$$

де $\alpha = \alpha(M)$ – кут між дотичною до кривої в точці M і додатним напрямом осі OX.

Якщо *диференціальна форма* $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є *повним диференціалом* деякої функції $U(x, y)$, тобто $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$,

то інтеграл (7) знаходиться за формулою

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A)\,, \tag{9}$$

і він не залежить від вибору шляху інтегрування (від точки A до точки B).

Для того щоб диференціальна форма $Pdx + Qdy$ була повним диференціалом, необхідне і достатнє виконання рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{10}$$

Так що умова (10) є необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

Якщо крива AB задана явно $y = f(x)$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)\right]dx\,. \tag{11}$$

***Приклад* 1.** Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_C (x + y^2)dx + 2xydy$$

від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$ вздовж контуру C: $y = x^2$.

Розв'язання. Враховуючи (11), маємо

$$\int\limits_C (x + y^2)dx + 2xydy = \int\limits_C (x + x^4)dx + 2xx^2 2xdx = \int\limits_0^2 (x + 5x^4)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x^5\right)\Bigg|_0^2 = 34.$$

***Приклад* 2.** Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$.

Розв'язання. Диференціальна форма $xdy + ydx$ є повним диференціалом функції $U(x, y) = xy$, тобто $d(xy) = xdy + ydx.$ Отже, інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової і кінцевої точок.

Тому, враховуючи (9), матимемо

$$I = \int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} d(xy) = xy\Bigg|_{(-1;2)}^{(2;3)} = 6 + 2 = 8.$$

Нехай контур інтегрування – лінія AB – задано параметрично $x = \varphi(t),\;\; y = \psi(t) \quad (t_1 \le t_2 \le t_3)$, тоді інтеграл (7) набуває вигляду

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P\,[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt +$$
$$+Q\,[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(t)dt. \tag{12}$$

***Приклад* 3.** Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{C}(2a-y)dx + xdy$, якщо C – дуга першої арки циклоїди $x = a(t-\sin t),\ \ y = a(1-\cos t)$. Напрям брати у бік зростання t.

Розв'язання. Для даного контуру параметр t зростає від $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$.

Враховуючи (12), отримаємо

$$\int\limits_{C}(2a-y)dx + xdy = \int\limits_{0}^{2\pi}(2a - a + a\cos t)a(1-\cos t)dt + a(t-\sin t)a\sin t dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t)dt = a^2\int\limits_{0}^{2\pi} t\sin t dt = a^2(-t\cos t + \sin t)\Bigg|_{0}^{2\pi} = -2\pi a^2.$$

Для просторової кривої можна записати аналогічну до (8) формулу

$$\int\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{C}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds, \tag{13}$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси дотичної до кривої у припущенні, що її напрям відповідає напряму інтегрування.

За формулою (13) можна знайти роботу змінної сили $\vec{F}$ на деякому криволінійному шляху L. Робота, яку здійснює змінна сила $\vec{F} = X(x;y;z)\vec{i} + Y(x;y;z)\vec{j} + Z(x;y;z)\vec{k}$ вздовж лінії $L = MN$, дорівнює криволінійному інтегралу

$$A = \int\limits_{(M)}^{(N)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz. \tag{14}$$

***Приклад* 4.** Знайти роботу сили тяжіння $\vec{F}$ при переміщенні маси m із точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ у точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$ довільним шляхом.

Розв'язання. Оскільки проекції сили тяжіння на координатні осі дорівнюють $X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = -mg$, то шукана робота

$$A=\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} Xdx+Ydy+Zdz=\int\limits_{z_1}^{z_2} -mgdz=mg(z_1-z_2)\,.$$

Отже, у цьому випадку криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової і кінцевої точок переміщення.

Точніше, робота сили тяжіння залежить лише від різниці висот кінцевої і початкової точок шляху.

Координати центра ваги просторової кривої визначаються за формулами

$$x_c=\frac{\int\limits_L xds}{\int\limits_L ds};\qquad y_c=\frac{\int\limits_L yds}{\int\limits_L ds};\qquad z_c=\frac{\int\limits_L zds}{\int\limits_L ds}, \tag{15}$$

де ds – диференціал дуги. Для кривої, яка задана параметрично $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, диференціал дуги в (15) дорівнює:

$$dS=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\,.$$

Якщо контур інтегрування (крива C) в криволінійному інтегралі є замкнутий, то інтеграл (7) позначається так:

$$\oint\limits_{(C)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,. \tag{16}$$

Нехай замкнутий контур C обмежує деяку плоску область D. Обхід контуру вважається додатним, якщо йти вздовж контуру проти руху годинникової стрілки, то область D має залишатись зліва.

За допомогою криволінійного інтеграла вздовж замкненого контуру можна обчислити площу області D за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} xdy-ydx\,. \tag{17}$$

***Приклад* 5.** Обчислити площу, обмежену еліпсом:

$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t\,.$$

Розв'язання. Якщо за початкову точку інтегрування взяти вершину $A(a;0)$, то параметр t буде змінюватись від 0 до 2π. Згідно із (17) маємо

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t(-a\sin t))dt=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}dt=\pi ab\,.$$

§ 5. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом за областю D та криволінійним інтегралом вздовж кривої L (L – замкнутий контур), яка обмежує область D.

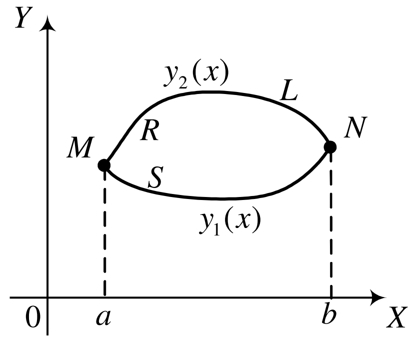


Рис. 73.

Нехай область D – правильна (рис. 73), обмежена знизу неперервною кривою $y = y_1(x)$, зверху неперервною кривою $y = y_2(x)$, причому $y_1(x) \le y_2(x)$, при $a \le x \le b$.

Нехай в області D задані неперервні функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, які мають неперервні частинні похідні першого порядку. Розглянемо інтеграл

$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy$ і представимо його через повторні інтеграли

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy == \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{dP}{dy} dy \right) dx = \int_a^b P(x, y) \Bigg|_{y_1}^{y_2} dx = \qquad (1)$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx.$$

Зауважимо, що інтеграл $\int_a^b P(x, y_2(x)) dx$ чисельно дорівнює

криволінійному інтегралу $\int\limits_{(MRN)} P(x, y) dx$, взятому вздовж кривої MRN, яка в

параметричній формі має вигляд $x = x, \;\; y = y(x)$, де x – параметр. Отже,

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int\limits_{(MRN)} P(x, y) dx. \qquad (2)$$

Аналогічно, інтеграл $\int_a^b P(x, y_1(x))dx$ чисельно дорівнює криволінійному інтегралу вздовж дуги MSN:

$$\int_a^b P(x, y_1(x))dx = \int_{(MSN)} P(x, y)dx\,. \qquad (3)$$

Підставляючи (2) і (3) в (1), отримаємо

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{dy} dxdy = \int_{(MRN)} P(x, y)dx -$$

$$-\int_{(MSN)} P(x, y)dx = \int_{(MRN)} P(x, y)dx + \int_{(NSM)} P(x, y)dx$$

(за годинниковою стрілкою).

Остаточно

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{(L)} P(x, y)dx\,, \qquad (4)$$

де обхід контуру L здійснюються за годинниковою стрілкою.

Якщо контур L містить відрізок (l_1), паралельний до осі OY, то $\int_{(l_1)} P(x, y)dx = 0$, і рівність (4) є і в цьому випадку справедливою.

Аналогічно,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = -\int_{(L)} Q(x, y)dy\,, \qquad (5)$$

де обхід контуру L здійснюється за стрілкою годинника.

Віднімаючи (4) від (5), отримаємо $\iint_{(D)} \left(\frac{\partial P}{dy} - \frac{\partial Q}{dx} \right) dxdy = \int_{(L)} Pdx + Qdy$.

Якщо обхід контуру L здійснювати проти годинникової стрілки, то отримаємо так звану *формулу Гріна*:

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{(L)} Pdx + Qdy\,. \qquad (6)$$

Ця формула справедлива не тільки для правильної області D, а й для довільної такої, яку можна розбити на правильні підобласті.

Із формули Гріна (6) випливає теорема.

Теорема. Нехай в області D функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їх частинні похідні першого порядку є неперервними. Тоді, для того щоб криволінійний інтеграл вздовж довільного кусково-гладкого замкнутого контуру дорівнював нулю, тобто щоб

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,, \tag{7}$$

необхідне і достатнє виконання рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{8}$$

у всіх точках області D (без доведення).

Умова (8) рівносильна тому, що вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, тобто $Pdx + Qdy = dU$, причому $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Тоді вектор $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}$ є градієнт функції $U(x;y)$. Ця функція $U(x;y)$ називається *потенціалом* вектора $\vec{F}$. Тоді криволінійний інтеграл дорівнює різниці значень потенціалу в початковій і кінцевій точках:

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} Pdx + Qdy = U(N) - U(M)\,.$$

Іншими словами, криволінійний інтеграл від повного диференціала не залежить від форми кусково-гладкої кривої, вздовж якої ведеться інтегрування, а залежить тільки від початкової і кінцевої точок інтегрування. Це справедливо і для просторової кривої.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \oint\limits_{(L)} (x+y)dx - (x-y)dy, \text{ де } L \text{ – еліпс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу Гріна до нашого інтеграла. Тут $P = x + y$, $Q = -(x-y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2.$ Тому маємо

$$I = -2\iint\limits_{(D)} dxdy = -2\pi\, ab\,,$$

де область D обмежена заданим еліпсом і площа її дорівнює πab.

§ 6. Поверхневий інтеграл

Нехай у просторі задана деяка область V, а в цій області – поверхня σ, обмежена деякою просторовою лінією L. Будемо вважати, що в кожній точці M поверхні σ визначимо додатний напрям нормалі одиничним вектором $\vec{n}(M)$, напрямні косинуси якого є неперервними функціями координат точок поверхні. Нехай у кожній точці поверхні визначений вектор

$$\vec{F} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k},$$

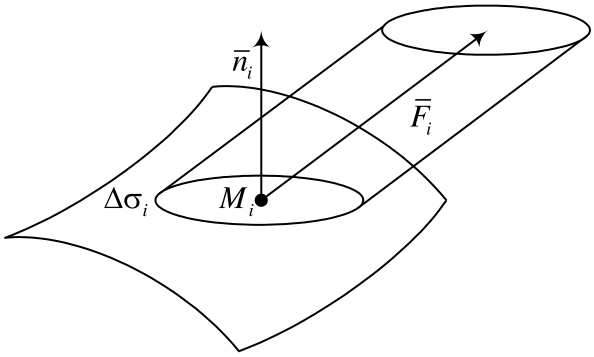


Рис. 74.

де P, Q, R – неперервні функції координат.

Розіб'ємо поверхню довільним чином на елементарні площинки $\Delta\sigma_i$ і на кожній виберемо точку M_i. Розглянемо суму

$$\sum_i (\vec{F}(M_i)\ \vec{n}(M_i))\ \Delta\sigma_i, \qquad (1)$$

де $\vec{F}(M_i)\ \vec{n}(M_i)$ – скалярний добуток у точці M_i (рис. 74).

Границя суми (1), при $d \to 0$ (d – діаметр розбиття) називається *поверхневим інтегралом* і позначається:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F}\,\vec{n}\ d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_i \vec{F}_i\ \vec{n}_i\ \Delta\sigma_i\ . \qquad (2)$$

Кожен із доданків суми (2)

$$\vec{F}_i\vec{n}_i\Delta\sigma_i = \left|\vec{F}_i\right|\Delta\sigma_i\cos(\vec{n}_i\vec{F}_i) \qquad (3)$$

є об'ємом циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $\left|\vec{F}_i\right|\cos(\vec{n}_i\vec{F}_i)$.

Фізичний зміст поверхневого інтеграла. Якщо вектор $\vec{F}$ виражає швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ, то добуток (3) дорівнює кількості рідини, що тече через площинку $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора $\vec{n}_i$. Вираз $\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma$ дає загальну кількість рідини, яка протікає через поверхню σ за одиницю часу, якщо під $\vec{F}$ розуміти вектор швидкості течії рідини в даній точці.

Із визначення поверхневого інтеграла випливає (властивість адитивності): якщо поверхня σ розбита на частини $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F}\ \vec{n}\ d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} \vec{F}\,\vec{n}\ d\sigma_1 + \iint\limits_{(\sigma_2)} \vec{F}\,\vec{n}\ d\sigma_2 + ... + \iint\limits_{(\sigma_n)} \vec{F}\,\vec{n}\ d\sigma_n .$$

Якщо вектор $\vec{n}$ виразити через його проекції на осі координат

$$\vec{n} = \cos(\vec{n}, x)\vec{i} + \cos(\vec{n}, y)\vec{j} + \cos(\vec{n}, z)\vec{k} ,$$

то поверхневий інтеграл (2) матиме вигляд

$$\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F}\,\vec{n}\ d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \left[P\cos(\vec{n}, x) + Q\cos(\vec{n}, y) + R\cos(\vec{n}, z)\right] d\sigma . \qquad (2')$$

Враховуючи рівності

$$\Delta\sigma\cos(\vec{n}, x) = \Delta\sigma_{yz},\ \ \Delta\sigma\cos(\vec{n}, y) = \Delta\sigma_{xz},\ \ \Delta\sigma\cos(\vec{n}, z) = \Delta\sigma_{xy} ,$$

де $\Delta\sigma_{yz}, \Delta\sigma_{xz}, \Delta\sigma_{xy}$ – проекції площинки $\Delta\sigma$ на відповідні координатні площини, формулу (2') можна записати у такому вигляді:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F}\,\vec{n}\ d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy . \qquad (2'')$$

Обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного, причому область інтегрування D є проекція поверхні σ на відповідну площину. Наприклад, для обчислення інтеграла

$$\iint\limits_{(\sigma)} R(x, y, z)\cos(\vec{n}, z)d\sigma$$

підставимо замість z функцію $z = f(x; y)$.

Тоді наш інтеграл дорівнює

$$\iint\limits_{(\sigma)} R(x, y, z)\cos(\vec{n}, z)d\sigma = \pm\iint\limits_{(D)} R(x, y, f(x, y))dxdy ,$$

причому знак “плюс” береться, якщо $\cos(\vec{n}, z) \geq 0$, і знак “мінус” – у протилежному випадку.

Аналогічно обчислюються інтеграли $\iint\limits_{(\sigma)} P\cos(\vec{n}, x)d\sigma, \iint\limits_{(\sigma)} Q\cos(\vec{n}, y)d\sigma$.

Зв'язок поверхневого інтеграла з криволінійним описує *формула Стокса*:

$$\int\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(\sigma)} \left\{ \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \cos(\vec{n}, z) + \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right] \cos(\vec{n}, x) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right] \cos(\vec{n}, y) \right\} d\sigma,$$

або

$$\int\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (4)$$

Вектор $\vec{B}$, який визначається проекціями

$$B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

називається *ротором* векторної функції $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Тому у векторній формі формула (4) має вигляд

$$\int\limits_{(L)} \vec{F} ds = \iint\limits_{(\sigma)} \vec{n} \operatorname{rot} \vec{F} \, d\sigma. \quad (4')$$

Зауваження. Якщо поверхня σ є частиною площини, яка паралельна до площини XOY, то $\Delta z = 0$ і ми отримуємо формулу Гріна, як частинний випадок формули Стокса.

Деяким аналогом вищевказаних формул для потрійного інтеграла є *формула Остроградського*:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{(\sigma)} \left(P\cos(\vec{n}, x) + Q\cos(\vec{n}, y) + R\cos(\vec{n}, z) \right) d\sigma. \quad (5)$$

Вираз $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ називається *дивергенцією* і позначається $\operatorname{div} \vec{F}$.

Тому формула (5) може бути записана таким чином:

$$\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \vec{F} \, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \vec{F} \, \vec{n} \, d\sigma. \quad (5')$$

Формула (5') читається так: інтеграл від дивергенції векторного поля $\vec{F}$, розповсюдженого в деякому об'ємі, дорівнює потоку вектора через поверхню, яка обмежує даний об'єм. Суть цього буде зрозуміліша пізніше.

Інтеграл $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ називають циркуляцією вектора $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вздовж замкнутого контуру L. Його розглядають як роботу, що її виконує сила $\vec{a}$ вздовж кривої L.

Приклад **.** Обчислити поверхневий інтеграл I:

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

де σ - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язання. Розглянемо інтеграл $I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} zdxdy$; його можна зобразити у вигляді суми інтегралів за верхньою та нижньою зовнішніми сторонами сфери, які відповідно позначимо σ_+ та σ_-:

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma_+)} zdxdy + \iint\limits_{(\sigma_-)} zdxdy.$$

На поверхні σ_+ виконується рівність $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а на поверхні σ_- – рівність $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Нехай D – проекція поверхні σ_+ на площину XOY. Поверхня σ_- проектується на D зі сторони зовнішньої нормалі, яка утворює з додатним напрямом осі OZ тупий кут, тому при заміні інтеграла за цією поверхнею подвійним потрібно перед останнім взяти знак " – ". У результаті отримаємо

$$I_1 = 2\iint\limits_{(D)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\,d\rho = \frac{4}{3}\pi(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Із очевидних рівностей $\iint\limits_{(\sigma)} xdydz = \iint\limits_{(\sigma)} ydzdx = I_1$, маємо $I = 4\pi a^3$.

Вправи

Завдання **1.** Обчислити повторні інтеграли:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + y)dy$; 2. $\int\limits_1^2 x^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2}$; 3. $\int\limits_{-4}^{1} dx \int\limits_{3x}^{4-x^2} (y - x)dy$;

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y} dy$; 5. $\int\limits_0^2 x dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2}$; 6. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2+y^2}$;

7. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}$; 8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r dr$; 9. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} r^3 dr$.

***Завдання* 2.** Змінити порядок інтегрування:

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx$; 2. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$; 3. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

4. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x-1}^{2x+2} f(x,y)dy$; 5. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x;y)dy$; 6. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x;y)dx$;

7. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx$; 8. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$;

9. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx$; 10. $\int\limits_{-2}^6 dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy$;

11. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$; 12. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx$;

13. $\int\limits_3^7 dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_7^9 dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy$; 14. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$;

15. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy.$

***Завдання* 3.** Знайти подвійні інтеграли зведенням до повторних:

1. $\iint\limits_{(Q)} \sqrt{xy-y^2}\,dxdy$, Q – трапеція з вершинами $A(1;1), B(5;1), C(10;2), D(2;2)$.

2. $\iint\limits_{(D)} xydxdy,$ D – область, обмежена кривими: $y = x + 2,$ $x^2 + y^2 = 2y$ (менший сегмент).

3. $\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy,$ D – область, обмежена кривими: $y = x,\ x + y = 2a,\ x = 0$.

4. $\iint\limits_{(D)} ydxdy,$ D – трикутник з вершинами: $O(0;0),\ A(1;1),\ B(0;1)$.

5. $\iint\limits_{(D)} (x + 2y)dxdy,$ D – область, обмежена кривими: $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$.

6. $\iint\limits_{(D)} (4 - y)dxdy,$ D – область, обмежена кривими: $x^2 = 4y,\ y = 1,\ x = 0(x > 0)$.

7. $\iint\limits_{(D)} \dfrac{xdxdy}{x^2 + y^2},$ D – область, обмежена кривими: $y = x \cdot \mathrm{tg}x,$ $y = x$.

8. $\iint\limits_{(D)} \sqrt{a^2 + x^2}dxdy,$ D – область, обмежена кривими: $y^2 - x^2 = a^2,\ x = a,$ $x = 0,\ y = 0(y > 0)$.

9. $\iint\limits_{(D)} e^{x+y}dxdy,$ D – область, обмежена кривими: $y = e^x,$ $y = 2,$ $x = 0$.

10. $\iint\limits_{(D)} x^2ydxdy,$ D – область, обмежена осями OX і OY та дугою еліпса $x = a\cos t,$ $y = b\sin t$, ($0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$).

***Завдання* 4.** Переходячи до полярних координат, обчислити інтеграли:

1. $\iint\limits_{(D)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, D – область, обмежена віссю OX і верхнім півколом $x^2 + y^2 = a^2$.

2. $\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy$, D – область, обмежена колом ($(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

3. $\iint\limits_{(D)} \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D – область, обмежена колами: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9, (y \ge 0)$.

4. $\iint\limits_{(D)} e^{x^2+y^2} dxdy$, D – область, обмежена колом $x^2+y^2=1$.

5. $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, D – область, обмежена осями координат і прямими $x+y=1,\quad x+y=2$.

6. $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, D – область, обмежена колами: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$.

7. $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, D – область, обмежена колом $x^2+y^2=a^2$ та півплощинами $x \ge 0, y \ge 0$.

8. $\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)dxdy$, D – область, обмежена кривими: $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax,\quad y=0\,(y>0)$.

9. $\iint\limits_{(D)} \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, D – область, обмежена кривими: $x^2=ay, x^2+y^2=2a^2$, $y=0, (x>0, a>0)$.

10. $\iint\limits_{(D)} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D – область, обмежена віткою лемніскати $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ (x \ge 0)$.

***Завдання* 5.** Застосовуючи подвійний інтеграл, розв'язати задачі:

1. Знайти площі фігур, обмежені лініями:

   $a)\ x=0,\ y=\sin x,\ y=\cos x$;

   $b)\ x=y+1, x=e^y,\ y=-1$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої кривими: $x^2+y^2=2ax, x^2+y^2=2bx$, $y=x,\ y=0, (0<a<b)$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої кривими: $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=2ax$.
4. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $z = x^2+y^2+1$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=6$.
5. Знайти площу частини площини $x+y+z=2a$, що вирізає циліндр $x^2+y^2=a^2$.
6. Знайти площу поверхні половини сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$.
7. Знайти площу частини поверхні параболоїда $x^2+y^2=2az$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=3a^2$.
8. Обчислити площу частини поверхні конуса $x^2+y^2-z^2=0$, що міститься всередині циліндра $(x-1)^2+y^2=1$.
9. Обчислити площу частини поверхні циліндра $x^2+z^2=a^2$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=a^2$.
10. Обчислити площу поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=4a^2$, яку вирізає циліндр $(x-a)^2+y^2=a^2$.
11. Знайти площу частини поверхні циліндра $x^2+z^2=a^2$, що вирізає циліндр $y^2=a(a-x)$.
12. Знайти площу частини поверхні конуса $x^2+z^2=y^2$, яку вирізає циліндр $y^2=2px\ (p>0)$.
13. Знайти повну поверхню тіла, обмеженого циліндрами $x^2=ay$, $z^2=ay$ і площиною $y=2a\ (a>0)$.
14. Знайти площу частини поверхні конуса $x^2+z^2=y^2$, яку вирізають площини $x+y=2a, x=0, y=0$.
15. Знайти площу частини поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, що вирізає циліндр з твірними, паралельними до осі OZ, напрямна якого є кардіоїда $r=a(1+\cos\varphi)$.

Завдання 6. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши в разі потреби до циліндричних чи сферичних координат:

1. $\iiint\limits_{(V)} xdxdydz$, V – область, обмежена площинами $x+y+z=1$, $x=0,\ y=0,\ z=0$.
2. $\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)dxdydz$, V – область, обмежена площинами $x+y+z=a$, $x=0,\ y=0,\ z=0$.
3. $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz$, V – область, обмежена поверхнями: $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x^2+y^2+z^2=1$.
4. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, V – внутрішня частина кульового сектора з центром в початку координат, радіусом a і кутом при вершині 2α $(0<\alpha<\pi)$.
5. $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=2z,\ z=2$.
6. $\iiint\limits_{(V)} xydxdydz$, V – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$, площиною $z=1$ і координатними площинами.

***Завдання* 7. Прикладні задачі**. Застосовуючи подвійні та потрійні інтеграли, розв'язати задачі механіки:

1. Знайти статичні моменти відносно осей OX і OY однорідної фігури, обмеженої кардіоїдою $r=a(1+\cos\varphi)$ та полярною віссю.
2. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої кривими $y^2=ax,\quad y=x$.
3. Знайти координати центра ваги тієї частини еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, що лежить у першій чверті.
4. Знайти моменти інерції однорідного трикутника, обмеженого прямими $x+y=1,\quad x+2y=2,\quad y=0$, відносно осей координат.

5. Знайти масу круглої пластини з радіусом R, якщо густина її пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює b на краю пластини.
6. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

   а) $z = x^2+y^2$, $z = 0{,}5(x^2+y^2)+2$; б) $z = x^2+y^2$, $z = b - (x^2+y^2)/2$;

   в) $(x^2+y^2+z^2) = 2axyz$ $(a>0)$; г) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;

   Вказівка: у пункті г) перейти до узагальнених сферичних координат.
7. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого площиною $x+y+z=a$ і координатними площинами.
8. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2-z^2=0, \quad z=2$.
9. Знайти координати центра мас півкулі $x^2+y^2+z^2 \le R^2, \quad z \ge 0$, якщо густина в кожній точці пропорційна відстані точки від центра.
10. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2-z^2=a^2, \quad z=0, \quad z=a>0$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті z і в площині $z=a$ дорівнює γ_0.
11. Моменти інерції тіла відносно осей координат знаходяться за формулами:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\ \gamma(x,y,z)\ dxdydz\,,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2+z^2)\ \gamma(x,y,z)\ dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\ \gamma(x,y,z)\ dxdydz\,,$$

де $\gamma(x,y,z)$ − густина в точці.

Знайти момент інерції відносно осі OZ однорідного тіла густиною γ, обмеженого поверхнями $y=\dfrac{b}{a^2}x^2, \quad z=0, \quad z=\dfrac{h}{b}(b-y)$.

Завдання **8.** Обчислити криволінійні інтеграли (для інтегралів за замкнутим контуром використати формулу Гріна):

1. $\int\limits_{(C)} 4xdx+2ydy$, C – дуга параболи $y=x^3$, яка сполучає точки $A(1;1)$ і $B(2;8)$ в напрямі від точки A до точки B.

2. $\int\limits_{(C)} \dfrac{ydx+4xdy}{x^2+y^2}$, C – відрізок, що сполучає точки $A(1;2)$ і $B(3;6)$.

3. $\int\limits_{(C)} (xy-y^2)dx+xdy$, C – ламана OAB; $O(0;0), A(0,5;3), B(1;2)$.

4. $\int\limits_{(C)} y^2dx+xydy$, C – дуга еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $(0\le t\le \dfrac{\pi}{2})$.

5. $\int\limits_{(C)} ydx-xdy$, C – дуга астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\le t\le \dfrac{\pi}{2})$.

6. $\int\limits_{(C)} (x^2+y+z)dx+z^2dy+(x+y^2)dz$, C – відрізок прямої від точки $A(2;1;0)$ до точки $B(4;3;1)$.

7. $\oint\limits_{(L)} (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, L – коло $x^2+y^2=4$.

8. $\oint\limits_{(L)} \dfrac{dx}{y}-\dfrac{dy}{x}$, L – контур трикутника з вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$.

9. $\oint\limits_{(L)} -x^2ydx+xy^2dy$, L – коло $x^2+y^2=R^2$.

10. $\oint\limits_{(L)} e^{-(x^2+y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$, L – коло $x^2+y^2=R^2$.

11. Використовуючи криволінійний інтеграл за замкнутим контуром, обчислити площу області, яку обмежує лінія L:

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}, \ (0\le t\le 2\pi).$$

12. Знайти роботу сили $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат за кривою $y=x^3$ в точку $A(1;1)$.

13. Показати, що робота сили $\vec{F} = \frac{x+2y}{(x+y)^2}\vec{i} + \frac{y}{(x+y)^2}\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(1;1)$ в точку $B(3;1)$ не залежить від форми кривої, яка сполучає ці точки. Знайти роботу.

***Завдання* 9**. Обчислити поверхневі інтеграли:

1. $\iint\limits_{(\sigma)} xdydz + ydxdz + zdxdy$, $\sigma -$ зовнішня (додатна) сторона куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$.
2. $\iint\limits_{(\sigma)} x^2y^2zdxdy$, σ – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.
3. $\iint\limits_{(\sigma)} zdxdy$, σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
4. $\iint\limits_{(\sigma)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, $\sigma -$зовнішня сторона куба $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a.$
5. $\iint\limits_{(\sigma)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma$, σ – частина конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$ $(0 \le z \le h)$, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до цієї поверхні.
6. $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$, $\sigma -$зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
7. Сумарний електричний заряд E поверхні σ, в кожній точці якої розподілені електричні заряди з поверхневою густиною заряду $e=e(x,y,z)$ визначається інтегралом
$$E = \iint\limits_{\sigma} e(x,y,z)\, d\sigma.$$
Визначити сумарний електричний заряд, розподілений на частині поверхні параболоїда $2z = x^2+y^2$, що відтинається від нього циліндром $x^2+y^2=1$, якщо густина заряду $e=\sqrt{z}$.
8. Застосовуючи формулу Остроградського – Гаусса, довести, що

$$\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=0,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні σ.

Відповіді

***До завдання* 1**

1. $\frac{8}{3}$; 2. $\frac{9}{4}$; 3. $218{,}4$; 4. $\frac{3}{8}$; 5. $\ln 2$; 6. $\frac{\pi}{6}$;
7. $\ln\sqrt{\frac{14}{11}}$; 8. $\frac{a^2(\pi+4)}{4}$; 9. $\frac{3\pi}{2}$.

***До завдання* 3**

1. $\frac{112}{9}$; 2. $-\frac{1}{4}$; 3. $\frac{4a^4}{3}$; 4. $\frac{1}{3}$; 5. $\frac{9}{20}$; 6. $\frac{68}{15}$; 7. $\frac{\pi^2}{32}$; 8. $\frac{4a^3}{3}$; 9. e; 10. $\frac{a^3b^2}{15}$;

***До завдання* 4**

1. $\frac{\pi}{3}a^3$; 2. $\frac{3\pi}{2}a^4$; 3. 8; 4. $\pi(e-1)$; 5. 1; 6. $\frac{128}{3}\pi$; 7. $\frac{\pi}{2}a$;
8. $\frac{45}{64}\pi\, a^4$; 9. $\frac{a}{2}(2-\ln 2)$; 10. $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$.

***До завдання* 5**

1. *a*) $\sqrt{2}-1$; *b*) $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$; 2. $\frac{(b^2-a^2)(\pi+2)}{4}$; 3. $(\pi-1)a^2$; 4. $\frac{62\pi}{3}$; 5. $\pi\, a^2\sqrt{3}$;
6. $2\pi a^2$; 7. $\frac{14\pi a^2}{3}$; 8. $2\pi\sqrt{2}$; 9. $8a^2$; 10. $4a^2(\pi-2)$; 11. $8\sqrt{2}a^2$; 12. $2\sqrt{2}\pi p^2$;
13. $\frac{74a^2}{3}$; 14. $\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}$; 15. $3\sqrt{2}\pi a^2$.

***До завдання* 6**

1. $\frac{1}{24}$; 2. $\frac{a^4}{8}$; 3. $\frac{1}{48}$; 4. $\pi a^2(1-\cos\alpha)$; 5. $\frac{16\pi}{3}$; 6. $\frac{1}{8}$.

***До завдання* 7**

1. $M_x = \dfrac{4a^3}{3}, M_y = \dfrac{5\pi\, a^3}{8}$; 2. $\bar{x} = \dfrac{2}{5}a,\ \bar{y} = \dfrac{a}{2}$; 3. $\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi},\ \bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$;

4. $J_x = \dfrac{1}{12},\ J_y = \dfrac{7}{12}$; 5. $\dfrac{\pi\, bR^2}{2}$; 6. а) 4π; б) 12π; в) $\dfrac{a^3}{45}$; г) $\dfrac{\pi^2 abc}{4}$;

7. $C(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4})$; 8. $C(0;0;\dfrac{3}{2})$; 9. $C(0;0;\dfrac{2}{5}R)$; 10. $M = \dfrac{3\pi a^3\gamma_0}{4}, \bar{\gamma} = \dfrac{9\gamma_0}{16}$;

11. $\dfrac{8}{21}\gamma abh\left(\dfrac{a^2}{5}+\dfrac{b^2}{3}\right)$.

***До завдання* 8**

1. 69; 2. $\ln 9$; 3. $-3{,}5$; 4. $-\dfrac{ab^2}{3}$; 5. $-\dfrac{3\pi a^2}{16}$; 6. $\dfrac{95}{3}$; 7. 8π; 8. $0{,}5$; 9. $\dfrac{\pi\, R^4}{2}$;

10. 0; 11. $6\pi a^2$. 12. $\dfrac{17}{12}$. 13. $\dfrac{1}{4}+\ln 2$.

***До завдання* 9**

1. 3; 2. $\dfrac{2\pi R}{105}$; 3. $\dfrac{4\pi abc}{3}$; 4. $3a^4$; 5. $-\dfrac{\pi h^4}{2}$;

6. $4\pi\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)$; 7. $\dfrac{\pi}{4}\left[3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

Розділ 13. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей – наука, яка вивчає закономірності масових випадкових явищ (подій). Ймовірнісні уявлення досить широко використовували вже давньогрецькі філософи (Демокріт, Епікур, Лукрецій та ін.). Як наука теорія ймовірностей почала розвиватися лише з середини XVII століття – у роботах французьких вчених Б. Паскаля і П. Ферма та голландського вченого Х. Гюйгенса. Класичне означення ймовірності випадкової події сформульоване в знаменитій праці "Наука припущень" відомого швейцарського математика Я. Бернуллі. Остаточно воно сформувалось пізніше – у роботах П. Лапласа. Вагомий внесок у розвиток теорії ймовірностей внесла радянська математична школа XX століття. Невдалу спробу дати загальне означення ймовірності випадкової події, на основі границі частоти її появи, зробив німецький математик Р. Мізес. Уточнене поняття ймовірності відбулося на основі аксіоматичного підходу. Загальноприйняте сьогодні означення ймовірності було розроблене радянським математиком академіком Колмогоровим А. М. на теоретико-множинній основі, у результаті чого теорія ймовірностей остаточно закріпилася як повноправна математична дисципліна.

Одним із основних понять теорії ймовірностей є випадок. Випадок, наприклад, має важливе значення в азартних іграх. Під грою можна розуміти зовсім далеку від азартних ігор подію: воєнна стратегія, тактика, політичні переговори, ділові виробничі відносини тощо.

Задачі математичної статистики зводяться до розробки методів збору та обробки статистичних даних довільних явищ, процесів суспільного і виробничого характеру для отримання наукових висновків при організації цих явищ чи процесів. Математична статистика розвивається паралельно з теорією ймовірностей і є її частиною в тому розумінні, що кожна задача математичної статистики є, по суті, задача (інколи цілком своєрідна) теорії ймовірностей.

§ 1. Випадкові події та дії над ними

Первісним поняттям у теорії ймовірностей є поняття події. Результат спостереження чи досліду будемо називати *подією* і позначати великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, \ldots$. Для того щоб подія відбулася, необхідне виконання певного комплексу умов, які позначатимемо через S. Наприклад, щоб випала монета гербом вверх, необхідно підкинути її та щоб вона впала не на ребро (комплекс умов S).

Інколи кажуть, що під подією розуміють все те, про що можна сказати, що воно відбулося, відбувається, може відбутися або ніколи не відбудеться.

Наприклад: через тиждень падатиме дощ; Іван Франко – український поет, революціонер-демократ.

Усі події можна розділити на достовірні, неможливі та випадкові.

Достовірними називаються події, які при заданих умовах обов'язково відбудуться в проведеному досліді. Якщо ж при здійсненні комплексу умов подія не відбудеться ніколи, то така подія називається *неможливою*. Наприклад: випадання від одного до шести очок при киданні гральної кісточки – подія достовірна, випадання семи очок – неможлива. Достовірні події позначають літерою U, неможливі – V.

Ймовірність характеризує шанс появи події. Іноді шанс появи події задають або визначають відсотками. Наприклад, станок штампує деталі, причому якісних серед них є 90%.

Випадковими називаються події, які при виконанні комплексу умов S можуть відбутися, а можуть і не відбутися. Наприклад, випадання герба чи решки при одному киданні монети; при стрільбі із семи патронів влучити в ціль чотири рази; виліт літака в погану погоду і т.д. При цьому вважається, що події повторяються багаторазово, тобто є масовими. Випадковість події полягає в неможливості передбачити результат досліду чи спостереження в масових явищах. Якщо ж для кожної події можна передбачити результат досліду або спостереження, то такі події називають *детермінованими*, або передбачуваними. У теорії ймовірностей вивчаються *недетерміновані* випадкові події.

Дві події A і B називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в даному досліді, в іншому разі події *сумісні*. Наприклад, якщо подія A – подія, яка полягає в тому, що при киданні гральної кісточки випаде одне очко, B – подія, яка полягає в тому, що при киданні гральної кісточки випаде два очка, C – подія, яка полягає в тому, що випаде непарне число очок, то при одному досліді одночасне виконання подій A і B неможливе, тобто ці події є несумісні. Події ж A і C є сумісними.

Дві події A і B називаються *рівноможливими*, якщо при виконанні комплексу умов S однаково можлива поява подій A і B. Наприклад, при киданні монети рівноможливими є поява герба та решки; при киданні гральної кісточки випадання одного очка (A_1), двох очок (A_2), трьох очок (A_3), ..., шести очок (A_6) є події рівноможливі.

Події називаються *єдино можливими*, якщо поява однієї з них є достовірною подією. Множину єдино можливих подій називають *повною групою* подій. Наприклад, стрілець зробив два постріли в мішень: події A_1 – жодного влучення, A_2 – одне влучення, A_3 – два влучення утворюють повну групу подій. Отже, події $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ утворюють повну групу подій, якщо хоча б одна з них обов'язково відбудеться.

Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо ці події єдино можливі і утворюють повну групу подій. Наприклад, якщо A – влучення в мішень, то $\overline{A}$ – промах.

Сукупність несумісних, рівноможливих подій, які утворюють повну групу, називають *простором*, або *множиною елементарних подій*. Самі події при цьому називають елементарними. Наприклад, при киданні гральної кісточки елементарними будуть: випадання одного очка, випадання двох очок, ... , випадання шести очок. Елементарну подію часто називають *випадком*, а сукупність елементарних подій – *схемою випадків*.

Усяку складну подію можна представити як сукупність елементарних подій. Для цього потрібно ввести операції додавання, віднімання та множення подій. Ці дії легко означити, використовуючи теоретико-множинний підхід.

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в тому, що відбудеться або подія A, або подія B, або обидві разом в одному досліді, і це записують: $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

Добутком (перетином) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в тому, що відбудеться і подія A, і подія B одночасно. Це записують: $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$.

Узагальнюючи ці операції для кількох подій, матимемо

$$C_1 = A_1 + A_2 + ... + A_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n ;$$

$$C_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n .$$

Різницею двох подій A і B називають подію C, яка наступає тоді, коли A вже наступила, а B ще не наступила, і це записують: $A - B = C$, або $A = B + C$.

Для двох протилежних подій A і $\overline{A}$ завжди виконується: $A + \overline{A} = U$, $A \cdot \overline{A} = V$. Для довільних двох несумісних подій A і B зажди $A \cdot B = V$.

З допомогою так званих кругів Ейлера легко встановити такі правила виконання операцій (дій) над подіями:

1. $A + A = A$; **2**. $A + B = B + A$; **3**. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
4. $A \cdot B = B \cdot A$; **5**. $A \cdot A = A$; **6**. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
7. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; **8**. $A + A \cdot (B + C) + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$;
9. $A + V = A$; **10**. $A \cdot V = V$; **11**. $A + U = U$; **12**. $A \cdot U = A$;
13. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; **14**. $\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$; **15**. $\overline{U} = V$; **16**. $A + \overline{A} = U$;
17. $A \cdot \overline{A} = V$; **18**. $\overline{\overline{A}} = A$.

Надалі будемо розглядати множину елементарних подій W таку, за якої для довільних подій $A_1, A_2, ..., A_n$, B з підмножини $W_1 \in W$, виконуються співвідношення:

1. $A + B \subset W_1$;
2. $A \cdot B \subset W_1$;
3. $A - B \subset W_1$;
4. $A_1 + A_2 + ... \subset W_1$;
5. $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \subset W_1$.
6. Якщо A і B несумісні, то $A \cap B = \varnothing$.

Простір (множину) елементарних подій з вказаними вище властивостями називають *імовірнісним*. Розмірність такого простору може бути як скінченною, так і нескінченною.

§ 2. Ймовірність події. Класична і статистична ймовірність

Поняття ймовірності події виникло як інтуїтивне поняття, яке дає кількісну оцінку можливості появи події A і позначається $P(A)$. Наприклад, станок виготовляє 2% бракованої продукції. Це означає, що ймовірність виготовлення бракованої продукції дорівнює $p = 0,02$.

Класичне означення ймовірності. Розглянемо простір (множину) елементарних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ при виконанні деякого комплексу умов S.

Вважатимемо, що ці події є попарно несумісні, утворюють повну групу подій та є рівноможливими. Тоді під ймовірністю появи події A розуміємо відношення числа сприятливих цій події елементарних подій до загальної кількості рівноможливих, попарно несумісних подій, які утворюють повну групу подій, тобто: $P(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість елементарних подій, сприятливих для A, n – кількість усіх можливих елементарних подій.

Наприклад, при киданні гральної кісточки один раз, кількість елементарних подій є 6. Яка ймовірність того, що випало парне число очок? Кількість сприятливих для цієї події випадків 3. Тому шукана ймовірність дорівнює $p = 0,5$.

За класичним означенням, ймовірність появи події шукають, не проводячи ніяких дослідів, виходячи з теоретичних мірувань. На практиці часто доводиться мати справу із *статистичною* ймовірністю. Для відшукання статистичної ймовірності проводять, наприклад, n дослідів і фіксують m – кількість разів появи події, яка нас цікавить. Відношення m до n дає статистичну ймовірність появи події A, це записують $P_c(A)$. Статистичну ймовірність часто називають *відносною частотою* появи події і позначають

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість випробувань, в яких подія A з'явилася, n – загальна кількість випробувань.

У дослідах статистична ймовірність коливається навколо деякого постійного числа, змінюючись мало, причому тим менше, чим більше проведено дослідів. Ця стала отримала назву класичної ймовірності.

Нехай при виконанні деякого комплексу умов S відома множина елементарних подій $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ і ця множина містить підмножину, для якої подія A є достовірною. Ці елементарні події отримали назву сприятливих для події A. *Класичною ймовірністю* називають відношення числа елементарних подій, сприятливих для події A, до загального числа можливих подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

де m, n – відповідно число сприятливих елементарних подій для події A та загальне число елементарних подій, причому елементарні події тут попарно несумісні, рівноможливі та утворюють повну групу подій.

***Приклад* 1.** Монету підкинули два рази. Яка ймовірність того, що:

а) обидва рази випаде герб; б) хоча б один раз випаде герб?

Розв'язання. Тут маємо 4 елементарні події: A_1 – обидва рази випаде герб, A_2 – перший раз випаде герб, а другий раз – решка, A_3 – перший раз випаде решка, другий – герб, A_4 – обидва рази випаде решка.

Для випадку а) число сприятливих елементарних подій $m = 1$, число всеможливих подій $n = 4$. Тому шукана ймовірність $p = 0,25$. Для випадку б) число сприятливих подій $m = 3$, тому шукана ймовірність $p = 0,75$.

***Приклад* 2.** Гральну кісточку підкинули один раз. Яка ймовірність того, що: а) випаде три очки; б) випаде число очок, кратне трьом; в) випаде парне число очок; г) випаде не більше трьох очок?

Розв'язання. При киданні однієї гральної кісточки всеможливих елементарних подій є 6, оскільки гральна кісточка – це кубик, що має 6 пронумерованих граней. Для випадку а), число сприятливих подій $m = 1$, бо лише одна грань кісточки має 3 очки. Тому ймовірність у цьому випадку дорівнює $p_1 = \frac{1}{6}$. Для випадку б), сприятливими будуть два випадки, коли випаде 3 та 6 очок. Тому $p_2 = \frac{1}{3}$. У третьому випадку в) сприятливих буде три події: випаде 2, 4, 6 очок. Шукана ймовірність $p_3 = \frac{3}{6} = 0,5$. В останньому випадку сприятливими будуть події: випаде 1, 2 або 3 очки. Тому ймовірність випадання не більше трьох очок при підкиданні гральної кісточки $p_4 = 0,5$.

Приклад 3. Підкинули дві гральні кісточки одночасно. Знайти ймовірності подій: а) на обох кісточках випаде по 6 очок; б) сума очок, що випали, кратна 5.

Розв'язання. Кількість всеможливих елементарних подій у цьому експерименті 36. Сприятливою для випадку а), є одна подія, тому $p_1 = \frac{1}{36}$. Для другого випадку, сприятливими є 7 подій, тому $p_2 = \frac{7}{36}$.

Статистична імовірність при повторенні досліду, взагалі кажучи, не приймає одне і те ж значення. Властивість статистичної ймовірності зберігати стале значення називається властивістю *стійкості*. Якщо це число мало змінюється від досліду до досліду, то $P(A) \approx P_c(A) = \frac{m}{n}$.

Наприклад, французький вчений Ж. Бюффон підкинув монету 4040 разів. При цьому герб випав 2048 разів. Отже, статистична ймовірність появи герба в його випадку становила $P_c(A) = \frac{2048}{4040} = 0,50693...$.

Англійський математик К. Пірсон підкинув монету 24000 разів, при цьому герб випав 12012 разів. Відносна частота (статистична ймовірність) випадання герба в цьому експерименті $W(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005...$.

Зауважимо, що класична ймовірність випадання герба при підкиданні монети дорівнює $P(A) = 0,5$.

Для існування статистичної ймовірності необхідно: 1) мати можливість провести необмежену кількість випробувань, у кожному з яких подія A наступить або ні; 2) стійкість відносних частот появи події A в різних серіях достатньо великого числа випробувань.

Статистична ймовірність володіє властивостями:

1) $P_c(A) \geq 0$. Це очевидно, оскільки $m \geq 0,\ n > 0$;
2) для достовірної події $P_c(U) = 1$;
3) якщо події A і B несумісні, то статистична ймовірність події $C = A + B$ дорівнює сумі статистичних ймовірностей подій A і B:

$$P_c(A+B) = P_c(A) + P_c(B).$$

Дійсно, якщо в n дослідах подія A відбулася k разів, а подія B – m разів, то завдяки їх несумісності загальна кількість сприятливих результатів випробувань для $A+B$ дорівнює $k+m$, тому

$$P_c(C) = P_c(A+B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P_c(A) + P_c(B).$$

Легко бачити, що формулою (1) можна користуватися лише у випадку скінченних m і n. Якщо m та n – нескінченні, то класична ймовірність вводиться аксіоматично.

Класичною ймовірністю $P(A)$ події A, яка визначається простором елементарних подій $\{A_i\}$, називається числова функція, яка задовольняє такі умови:

1) $P(A) \geq 0$;
2) $P(U) = 1$;
3) для несумісних подій A і B: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Умови (1) – (3) отримали назву *аксіом теорії ймовірностей*.

Аксіоматичне означення класичної ймовірності зручне в теорії, проте воно не дає способу її обчислення. Такий спосіб дає визначення класичної ймовірності – як границю статистичної. Якщо проводяться серії однотипних дослідів, у кожному з яких обчислені статистичні ймовірності, то отримаємо послідовність $\{P_c^1(A),\ P_c^2(A),\ ...,\ P_c^n(A), ...\}$, границя якої і визначає класичну ймовірність, при $n \to \infty$.

§ 3. Елементи комбінаторики

Комбінаторика вивчає комбінації, які можна складати із елементів довільної природи певної скінченної множини відповідно до заданих правил.

При безпосередньому обчисленні ймовірності за класичним означенням часто використовують формули комбінаторики. При цьому вважаємо, що всі елементи, з яких складаються комбінації, різні.

Перестановками називають комбінації, які складаються з одних і тих же елементів і відрізняються лише порядком їх розміщення. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P(n) = n!, \tag{1}$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ ($n!$ – “n факторіал”). Вважається, що $0! = 1$.

Наприклад, скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр $1, 2, 3, 4,$ якщо кожна цифра входить в число тільки один раз? Кількість комбінацій дорівнює числу перестановок із чотирьох елементів:

$$P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 .$$

Розміщеннями називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються або самими елементами, або їх порядком. Число розміщень A_n^m обчислюється за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) . \tag{2}$$

Наприклад, скільки сигналів можна скласти із шести різнокольорових прапорців, взятих по два? Згідно з формулою (2) маємо $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Сполуками називають комбінації, складені з n різних елементів по m штук в кожній, які відрізняються хоча б одним елементом. Число сполук дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} . \tag{3}$$

Наприклад, скількома способами можна вибрати дві кульки з урни, яка містить шість пронумерованих кульок? Кількість комбінацій згідно з (3) буде

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15 .$$

При розв’язуванні задач з використанням формул комбінаторики слід дотримуватись правил: якщо деякий об’єкт A може бути вибраний із сукупності об’єктів n способами, а другий об’єкт B із цієї ж сукупності m способами, то вибрати або A, або B можна $n+m$ способами (*правило суми*); якщо об’єкт A можна вибрати із сукупності n способами і після кожного такого вибору об’єкт B можна вибрати m способами, то пара об’єктів (A; B) в цьому порядку може бути вибрана $n\,m$ способами (*правило добутку*).

Задача з чотирма параметрами. На складі готової продукції є N всіх деталей, серед яких n стандартних. Навмання взяли зі складу m деталей. Яка ймовірність того, що серед взятих деталей виявиться рівно k стандартних?

Розв’язання. Знайдемо цю ймовірність виходячи з класичного означення. Кількість всеможливих елементарних подій оцінюється як число сполук із N елементів по $m: C_N^m -$ кількість способів, якими можна вибрати m деталей із сукупності всіх N (це знаменник формули (1) §2). Кількість сприятливих випадків для даної події $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$ (взяти з n стандартних рівно k, і решта із $N-n$ нестандартних вибрати $m-k$ штук). Тому шукана ймовірність знаходиться за формулою

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}. \qquad (4)$$

Формулу (4) часто використовують як загальну в задачах на класичну ймовірність. Буває так, що $m=k$ і четвертого параметра майже не “видно”. Тоді формула (4) спрощується:

$$P(A) = \frac{C_n^k}{C_N^m}. \qquad (5)$$

***Приклад* 1.** У складальному цеху працює 10 робітників, з них 4 жінки. За табельними номерами вибрали трьох робітників. Яка ймовірність того, що серед вибраних робітників жінок немає?

Розв’язання. Для знаходження шуканої ймовірності можна застосовувати як формулу (4), так і формулу (5). За умовою задачі, серед вибраних трьох робітників мають бути три чоловіки. Оскільки в цеху працює 6 чоловіків, маємо: $N = 10$, $n = 6$, $m = k = 3$. Підставивши ці значення в (5), отримаємо

$$P(A) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{6!}{3!\ 3!} \cdot \frac{3!\ 7!}{10!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}.$$

§ 4. Геометричні ймовірності

Як ми вже відзначали, на практиці часто зустрічаються випробування з нескінченною кількістю можливих елементарних наслідків (подій), кожну з яких можна інтерпретувати як точку з деякої множини евклідового простору, що має певну геометричну форму та скінченну міру, задану на цьому просторі.

В якості події A вибирається точка, яка належить або не належить заданій частині геометричної форми (довжині, площі, об'єму). Ймовірність появи події A визначається як відношення міри частини геометричної форми до міри всієї форми. Так, для довжини, площі, об'єму (l, s, v) – частини геометричної форми, що має відповідно довжину L, площу S, об'єм V, *геометрична ймовірність* попадання в частину форми відповідно визначається:

$$P(A) = \frac{l}{L};\ \ P(A) = \frac{s}{S};\ \ P(A) = \frac{v}{V}. \tag{1}$$

Задача про зустріч. Два приятелі домовились зустрітись у певному місці між 8–ю та 9–ю годинами ранку, причому, прийшовши, перший чекає товариша не більше 20 хвилин. Знайти ймовірність зустрічі.

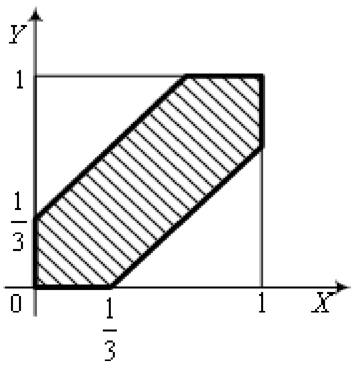


Рис. 113.

Розв'язання. Як множину елементарних подій розглянемо квадрат зі стороною 1 (одна година) і точками $(x; y)$, що зображають час приходу на місце зустрічі першого та другого приятелів (див. рис.113). Тоді $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Сприятливими для зустрічі будуть точки, які задовольняють нерівність $|y - x| < \frac{1}{3}$, тобто точки між паралельними прямими $y = x - \frac{1}{3}$,

$y = x + \frac{1}{3}$ (смуга). Площа заштрихованої смуги дорівнює $s = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$. Площа основного квадрата $S = 1$. Шукана ймовірність визначається як відношення площ: $P(A) = \frac{s}{S} = \frac{5/9}{1} = \frac{5}{9}$.

§ 5. Теореми додавання ймовірностей подій

***Теорема* 1.** Ймовірність суми n несумісних подій, рівна сумі ймовірностей цих подій, тобто якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ – несумісні, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \quad (1)$$

Твердження теореми випливає з третьої аксіоми теорії ймовірностей, послідовно застосовуючи її для трьох, чотирьох і т.д. подій. Доведення цієї теореми можна провести також методом математичної індукції.

Теорема справедлива і для нескінченної кількості несумісних подій.

Наслідок. Сума ймовірностей несумісних подій, які утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці.

***Приклад* 1.** В ящику 10 синіх, 10 жовтих і 10 прозорих (безколірних) кульок. Виймають одну кульку. Яка ймовірність появи кольорової кульки?

Розв'язання. Нехай A_1 – подія, яка полягає в тому, що вийнята синя кулька; A_2 – подія, яка полягає в тому, що вийнята жовта кулька; A_3 – подія, яка полягає в тому, що вийнята прозора кулька.

Названі події є попарно несумісні та утворюють повну групу. Поява кольорової кульки, подія $C = A + B$. Тому $P(C) = P(A + B) = \frac{10}{30} + \frac{10}{30} = \frac{2}{3}$.

Легко бачити, що події A та $\overline{A}$ є несумісні і утворюють повну групу, тому $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Звідси отримуємо ймовірність протилежної події

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \quad (2)$$

Якщо $P(A)$ позначити через p ($P(A) = p$), а ймовірність протилежної події $P(\overline{A})$ позначити через q, то (2) запишеться таким чином:

$$q = 1 - p. \quad (2')$$

Зауваження. При розв'язуванні задач часто вигідно знайти ймовірність протилежної події $\overline{A}$, а потім вже шукати $P(A)$.

Приклад 2. Яка ймовірність випадання менше шести очок при киданні гральної кісточки?

Розв'язання. Нехай $A_1, A_2, ..., A_6$ – елементарні події, які виникають при підкиданні гральної кісточки, які згадувались раніше. Нам потрібно знайти $P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$. Проте легше знайти ймовірність протилежної події $P(A_6) = \frac{1}{6}$. Тому шукана ймовірність події дорівнює $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Теорема 2. Ймовірність суми двох довільних подій дорівнює сумі ймовірностей кожної з них без ймовірності їх добутку:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (3)$$

Доведення. Нехай маємо дві події A і B, які є сумісними. Подія $A+B$ наступить, коли наступить одна із трьох несумісних подій $AB, A\overline{B}, \overline{A}B$, бо $A = AB + A\overline{B}$, $B = BA + B\overline{A}$ і $A + B = AB + A\overline{B} + BA + B\overline{A} = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$. Оскільки $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$, то $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$; аналогічно $P(B) = P(AB) + P(B\overline{A})$; $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB)$. Тому

$$P(A+B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB).$$

Остаточно отримаємо формулу

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Якщо події A і B несумісні, то $P(AB) = 0$ і формула (3) стає частинним випадком формули (1).

Наведені вище формули справедливі і для статистичної ймовірності.

Приклад 3. Монету підкидають до появи підряд двох однакових сторін монети. Знайти ймовірність того, що для цього знадобиться не більше трьох спроб.

Розв'язання. При двох підкиданнях можливі варіанти (Г – герб, Р – решка): Г,Г; Г,Р; Р,Г; Р,Р.

При трьох – варіанти: Г,Г,Г; Г,Г,Р; Г,Р,Г; Г,Р,Р; Р,Г,Г; Р,Г,Р; Р,Р,Г; Р,Р,Р.

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що при двох підкиданнях монети з'явились дві однакові сторони; B – при трьох підкиданнях з'явились підряд дві однакові сторони. Згідно з (3) отримаємо

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{4}+\frac{6}{8}-\frac{2}{4}=\frac{3}{4}.$$

Теореми множення ймовірностей подій

Якщо при обчисленні ймовірності появи події ніяких інших обмежень, за винятком комплексу умов, не накладається, то таку ймовірність називають *безумовною*; якщо ж накладаються ще інші умови, то ймовірність – *умовна*.

Зауважимо, що безумовна ймовірність, точно кажучи, є умовною, хоча б тому, що передбачає виконання комплексу умов.

Ймовірність появи події A при умові, що подія B відбулася (наступила), записують так: $P_B(A)$ (умовна ймовірність).

***Приклад* 1.** Із колоди з 36 карт послідовно витягують по одній карті. Яка ймовірність витягнути:

а) другим туза, якщо першим був витягнений туз;

б) другим туза, якщо першим був витягнений король?

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що перша витягнена карта – туз; B – подія, яка полягає в тому, що перша витягнена карта – король (не туз); C – подія, яка полягає в тому, що друга витягнена карта – туз. Тоді:

а) ймовірність витягнути другим туза, якщо першим був туз визначається $P_A(C)=\frac{3}{35}$;

б) ймовірність витягнути другим туза, якщо першим був витягнутий король, рівна $P_B(C)=\frac{4}{35}$.

***Теорема* 1** (загальна теорема множення). Ймовірність добутку двох випадкових подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, при умові, що перша вже наступила

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$
(1)

Доведення. Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – простір елементарних подій (повна група рівноможливих, попарно несумісних подій), причому сприятливими для A є m_1 подій, для B – m_2 подій простору елементарних подій. Для добутку AB нехай сприятливими будуть k подій ($k \le m_1, k \le m_2$). Очевидно, що умовна ймовірність $P_B(A) = \dfrac{k}{m_2}$, бо відомо, що подія B відбулася (відбулася якась з подій групи сприятливих для B, які при зміненому комплексі умов утворюють свою повну групу).

Тоді сприятливими для A в нових умовах будуть тільки ті події, які сприятливі і для A, і для B, тобто k подій.

Аналогічно можна записати, що $P_A(B) = \dfrac{k}{m_1}$.

Враховуючи, що $P(A) = \dfrac{m_1}{n}$, $P(B) = \dfrac{m_2}{n}$ за класичним означенням, матимемо

$$P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{k}{m_1} = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{m_2}{n} \cdot \frac{k}{m_2} = P(B) \cdot P_B(A).$$

Наслідок. Ймовірність добутку скінченної кількості подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події вже з'явилися

$$P(B_1 \cdot B_2 \cdot ... \cdot B_k) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) \cdot P_{B_1, B_2}(B_3) \cdots P_{B_1, B_2, ..., B_{k-1}}(B_k). \qquad (2)$$

Порядок, в якому вибрані події у (2), може бути довільним, тобто немає значення, яку подію вибирати першою, другою і т.д.

Приклад 2. В ящику 5 зелених, 6 червоних і 4 жовтих яблука. Витягують з ящика три яблука по одному, не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність того, що яблука з'являться в послідовності: червоне, жовте, зелене?

Розв'язання. Нехай A – подія: перше витягнене яблуко червоне; B – друге жовте; C – третє зелене. Нам потрібно знайти $P(ABC)$. Оскільки події A, B, C – залежні, застосувавши формулу (2), знайдемо

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A,B}(C)=\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{4}{91}.$$

Нагадаємо, що події A і B незалежні, якщо поява однієї з них не впливає на ймовірність появи іншої, тобто умовна ймовірність, наприклад, $P_B(A)$ дорівнює безумовній $P(A)$.

***Теорема* 2.** Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (3)$$

Твердження цієї теореми випливає з теореми 1 та незалежності подій A і B.

Інколи це твердження беруть за означення незалежності подій A та B.

***Приклад* 3.** При підкиданні двох гральних кісточок одночасно, знайти ймовірність випадання на обох гранях по 5 очок.

Розв'язання. Якщо A – випадання на першій 5 очок, а B – випадання на другій 5 очок, то, оскільки випадання очок на кісточках є події незалежні, отримаємо

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

Незалежність подій є взаємною, тобто якщо A не залежить від B, то і B не залежить від A. Більше того, якщо A і B незалежні, то незалежними будуть також події A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Події $A_1, A_2, ..., A_k$ називаються *попарно незалежними*, якщо незалежними є довільна пара A_i, A_j при $i\neq j$. Події *незалежні у сукупності* (просто незалежні), якщо вони попарно незалежні і незалежна кожна з них і всі можливі добутки останніх. Наприклад, якщо A, B, C – незалежні в сукупності, то незалежні A і B, A і C, B і C, A і BC, B і AC, C і AB. Умова незалежності подій в сукупності "сильніша" від умови їх попарної незалежності. Тобто з умови незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність. Обернене твердження невірне.

Наслідок. Ймовірність добутку скінченної кількості подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_k)\,. \tag{4}$$

Доведення цього факту можна провести методом математичної індукції.

***Приклад* 4.** У трьох ящиках є деталі двох сортів: у першому ящику 5 першого сорту та 7 другого; у другому – 4 першого та 6 другого сорту; у третьому – 8 першого та 4 другого сорту. Знайти ймовірність того, що три деталі взяті з трьох різних ящиків першого сорту.

Розв'язання. Нехай A – з першого ящика взята деталь першого сорту; B – з другого ящика взята деталь першого сорту; C – з третього ящика взята деталь першого сорту.

Тоді, враховуючи незалежність в сукупності подій A, B, C та формулу (4),

$$P(ABC) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{1}{9}.$$

Ймовірність появи хоча б однієї з подій

***Теорема* 3**. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, які незалежні у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей подій, протилежних до заданих.

Нехай A – подія, яка полягає в появі довільної із n подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, тоді

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n) = 1 - q_1 q_2 ... q_n\,. \tag{5}$$

Доведення випливає з таких міркувань. Оскільки події A і $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \overline{A}_n$ – протилежні, то їх сума є достовірною подією, тому $P(A + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) = P(A) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) = P(A) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n)$.

Отже, $P(A) + q_1 q_2 ... q_n = 1$. Звідси $P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$.

Зауваження. Якщо випадкові події $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ мають однакову ймовірність появи $P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = p$, тоді ймовірність появи хоча б однієї з цих подій обчислюється за формулою

$$P(A) = 1 - q^n, \quad (q = 1 - p)\,.$$

***Приклад* 5.** Ймовірність влучення в ціль стрільцем рівна $0,4$ при одному вистрілі. Скільки потрібно зробити вистрілів, щоб з ймовірністю не меншою $0,9$ гарантувати влучення в ціль?

Розв'язання. Враховуючи те, що ймовірність хоча б одного влучення має бути $P(A) \geq 0,9$, з рівняння $1-q^n \geq 0,9$ отримаємо значення n. Маємо $0,6^n \leq 0,1$. Логарифмуючи останню нерівність, отримаємо $n \geq \dfrac{lq0,1}{lq0,6} \approx 4,5$. Отже, $n \geq 5$.

§ 6. Формула повної ймовірності. Ймовірності гіпотез

Нехай подія A може відбутися лише при виконанні однієї з подій $B_1, B_2, ..., B_n$, які є попарно несумісні та утворюють повну групу подій. Тоді ймовірність появи події A визначається за формулою, яка має назву *формули повної ймовірності*

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i-0}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A) . \quad (1)$$

Виведення формули (1) випливає з таких міркувань. Подію A можна представити як суму попарно несумісних подій $A = AB_1 + AB_2 + ... + AB_n$. Використовуючи теорему додавання для несумісних подій та теорему множення для залежних подій, отримаємо

$$P(A) = P(AB_1 + AB_2 + ... + AB_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) . \quad (1')$$

***Приклад* 1.** У десяти ящиках містяться деталі двох сортів. У перших трьох – по 4 деталі першого і по 6 деталей другого сорту; у четвертому ящику – 8 деталей першого і 2 другого сорту; у решті ящиків – по 6 деталей першого і по 4 деталі другого сорту. Із довільного ящика витягають одну деталь. Яка ймовірність того, що ця деталь другого сорту?

Розв'язання. Усі ящики можна розділити на три групи за однаковим складом. Тому висуваються три попарно несумісні гіпотези, що утворюють повну групу:

B_1 – деталь виймали з ящика першої групи;

B_2 – деталь виймали з ящика другої групи;

B_3 – деталь виймали з ящика третьої групи.

Ймовірності цих гіпотез відповідно рівні:

$$P(B_1) = 0,3; \quad P(B_2) = 0,1; \quad P(B_3) = 0,6.$$

A – подія, яка полягає в тому, що вийнята деталь другого сорту.

Знайдемо умовні ймовірності виймання деталі другого сорту з ящиків кожної групи: $P_{B_1}(A) = \dfrac{6}{10}$; $P_{B_2}(A) = \dfrac{2}{10}$; $P_{B_3}(A) = \dfrac{4}{10}$.

За формулою повної ймовірності отримаємо шукану ймовірність

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,44.$$

У попередній формулі повної ймовірності вважалось, що події $B_1, B_2, ..., B_n$ (гіпотези) є несумісними, відомі їх ймовірності та умовні ймовірності $P_{B_i}(A)$. Події $B_1, B_2, ..., B_n$ називають *гіпотезами* (гіпотеза – припущення), оскільки наперед не відомо, яка з цих подій наступить.

Допустимо, що проведено випробування і подія A відбулася. Оцінимо ймовірність виконання гіпотези B_i при умові, що подія A відбулася: $P_{B_i}(A)$.

Запишемо теорему множення для залежних подій A та B_i:

$$P(A \cdot B_i) = P(A) \cdot P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

З цієї рівності знайдемо ймовірність гіпотези (***формула Бейєса***):

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}. \tag{2}$$

Формулу Бейєса, враховуючи (1), можна записати у вигляді

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}. \tag{2'}$$

Формула Бейєса дає змогу знайти ймовірність гіпотези B_i за умови, що подія A відбулася.

Приклад 2. Автоматична система виявлення літака в певній зоні внаслідок перешкод різного характеру може давати похибку з ймовірністю $0,05$, а при появі цілі в зоні система виявляє її з імовірністю $0,9$. Ймовірність появи противника в зоні дорівнює $0,25$. Знайти ймовірність помилкової тривоги при отриманні сигналу.

Розв'язання. Нехай B_1 – гіпотеза, поява літака в зоні; B_2 – його не поява. A – подія, сигнал про наявність цілі. Тоді $P(B_1)=0,25;$ $P(B_2)=0,75$;

$P_{B_1}(A)=0,9;$ $P_{B_2}(A)=0,05$. За формулою Бейєса, знайдемо

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}=\frac{0,75\cdot 0,05}{0,25\cdot 0,9+0,75\cdot 0,05}=\frac{1}{7}.$$

§ 7. Повторні випробування

***Випробування Бернуллі* (*повторні незалежні випробування*)**

Перед тим як означити поняття незалежних випробувань, варто розглянути постановку кількох задач.

1. Монету підкинули 10 разів. Яка ймовірність того, що герб випаде:

а) 2 рази; б) 5 разів; в) у більшості випробувань?

З класичного означення ймовірності знаємо, що ймовірність випадання герба в одній спробі $p=0,5$. При повторному випробуванні (підкиненні монети), ймовірність випадання герба не зміниться, оскільки попередня спроба ніяк не впливає на наступну (повторні випробування незалежні).

2. Яка ймовірність того, що із n новонароджених рівно k будуть хлопчиками, якщо ймовірність народження хлопчика рівна $p=0,51$?

Зрозуміло, що народження хлопчика чи дівчинки вважається випадковою подією, а задану ймовірність $p=0,51$ фактично беруть як статистичну (за класичним означенням її не знайдеш).

3. Нехай в урні є білі і чорні кульки. A – подія, яка полягає в тому, що з урни витягли білу кульку. Ймовірність $P(A)$ позначимо p і будемо вважати її незалежною від того, який раз ми виймаємо з урни білу кульку. Щоб забезпечити незалежність виймання білої кульки кожного разу, потрібно повертати в урну вийняту кульку, перемішавши кульки перед наступним вийманням. Ймовірність витягти білу кульку $q=1-p$. Знайти ймовірність $P_n(k)$ того, що в n випробуваннях біла кулька з'явиться рівно k разів.

Усі такі задачі належать до так званої *схеми незалежних випробувань Бернуллі.* Кожному випробуванню поставимо у відповідність випадкову подію A_i, які для кількох випробовувань є незалежними в сукупності, тому

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Незалежні випробування, в кожному з яких є лише два можливі результати (події), називаються випробуваннями Бернуллі. Наведені вище задачі можна сформулювати в загальному вигляді так: проводяться випробування Бернуллі, в яких спостерігається поява події A. Яка ймовірність появи події A k разів в n випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює p, а непояви – q?

Ймовірність появи однієї складної події, яка полягає в тому, що в n випробуваннях подія A наступить k разів і не наступить $n-k$ разів, за теоремою множення ймовірностей незалежних подій, дорівнює $p^k q^{n-k}$.

Таких складних подій є стільки, скільки можна скласти сполук із n елементів по k штук, тобто C_n^k. Оскільки ці складні події несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій шукана ймовірність дорівнює сумі ймовірностей усіх цих складних подій. Проте ймовірність усіх цих складних подій однакова, тому шукана ймовірність дорівнює ймовірності однієї складної події, помноженій на їх кількість, тобто

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{3}$$

Формулу (3) називають *формулою Бернуллі*.

***Приклад* 1.** Стрілець із лука влучає в десятку при одному пострілі з імовірністю $p = 0,8$. Знайти ймовірність трьох влучень у п'яти пострілах.

Розв'язання. З умови задачі маємо $p = 0,8;$ $k = 3;$ $n = 5$. Ймовірність трьох влучень при п'яти пострілах обчислюється за формулою (3):

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048.$$

Зауважимо, що формулою Бернуллі зручно користуватися, коли кількість випробувань n невелика $(n \,\square\, 10)$.

З допомогою формули Бернуллі можна шукати такі ймовірності:

а) подія A з'явиться менше k разів $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(k-1)$;

б) подія A з'явиться більше k разів $P_n(k+1)+P_n(k+2)+...+P_n(n)$;

в) подія A з'явиться не менше k разів $P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n(n)$;

г) подія A з'явиться не більше k разів $P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+...+P_n(k)$.

Якщо ж кількість випробувань велика ($n \gg 100$), то обчислення ймовірності за формулою Бернуллі досить складне. У цьому випадку використовують так звану асимптотичну формулу Лапласа. Для $p=0,5$ цю формулу вперше вивів Муавр (англійський математик). Лаплас (французький математик) отримав загальнішу формулу, тому її часто називають формулою Муавра – Лапласа.

Функцію $q(x)$ називають *асимптотичним наближенням* $f(x)$, якщо $f(x) \to q(x)$ при $x \to \infty$.

Локальна теорема Лапласа. Позначимо $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Якщо $n \to \infty$, а p – фіксоване і не дорівнює ні нулю, ні одиниці, причому k змінюється так, що

$$|x|=\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right| \le T,$$

де T – фіксоване число. Тоді функція $q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ є асимптотичним наближенням $P_n(k)$ при $|x| \le T$. При цьому збіжність є рівномірною відносно x. Звідси випливає наближена рівність

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{4}$$

Вираз $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x)$ називають функцією Гаусса. Тому формулу (4) записують так:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x) \tag{5}$$

Формулу (5) називають *формулою Лапласа*.

Варто зауважити, що функція Гаусса $\varphi(x)$ є парною $(\varphi(-x)=\varphi(x))$. Вона табульована (складені таблиці значень для x від 0 до 4), що дозволяє швидше знаходити її значення.

Приклад 2. Знайти ймовірність появи герба 55 разів у 100 незалежних підкиданнях монети.

Розв'язання. З умови задачі можна записати $n=100;\quad k=55;\quad p=0,5;\quad q=0,5$.

Значення аргументу для функції $\varphi(x)$ знаходимо за формулою

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{55-100\cdot 0,5}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}=1.$$

З таблиці значень функції Гаусса знаходимо $\varphi(1)=0,2420$. Тому шукана ймовірність

$$P_{100}(55)=0,2\cdot 0,2420=0,0484.$$

Формула Пуассона. Якщо кількість спроб дуже велика ($n \gg 1000$), а ймовірність появи події в одній спробі дуже мала ($p \ll 0,001$), то ймовірність того, що в n спробах подія появиться k разів, знаходять за формулою Пуассона.

Нехай добуток $np=\lambda$ є стала величина (це означає, що середнє число появ подій у різних серіях випробовувань, тобто при різних n, стале).

Розглянемо формулу Бернуллі. Зробимо над нею деякі перетворення та перейдемо до границі, коли $n\to\infty$, причому $p\to 0$, тому що $np=\text{const}$.

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Перейдемо до границі в останній рівності, коли $n\to\infty$

$$P_n(k)\approx$$

$$\approx\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}...\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}.$$

Отримали формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \qquad (6)$$

Ця формула дає змогу знайти ймовірність рідкісних явищ (p – мале) у масових однотипних експериментах (n – велике).

Приклад 3. При перевезенні кінескопів з місця виготовлення до пункту складання телевізорів виходить з ладу близько $0,2\%$. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 500 кінескопів вийде з ладу 4.

Розв'язання. Оскільки n велике ($n = 500$), а p мале ($p = 0,002$), то застосуємо для знаходження шуканої ймовірності формулу Пуассона:

$$P_{500}(4) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{(500 \cdot 0,002)^4}{4!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{24} \cdot e^{-1} \approx 0,0154.$$

Отже, з ймовірністю $1,54\%$ можна стверджувати, що 4 кінескопи при перевезенні вийдуть з ладу.

Інтегральна формула Лапласа

Припустимо, що проведено n незалежних випробувань, у кожному з яких поява події A дорівнює p. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться від k_1 до k_2 разів, тобто не менше k_1 і не більше k_2 разів. Це позначають так: $P_n(k_1;k_2)$.

Теорема. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала, причому $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(k_1;k_2)$ того, що подія A з'явиться у випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (7)$$

де нижня та верхня межі інтегрування в (7) визначаються аналогічно, як у локальній теоремі Лапласа:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (8)$$

Інтегральну формулу Лапласа (7) можна записати через функцію Гаусса:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx .$$

(9)

Якщо ввести функцію Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz , \tag{10}$$

то легко показати, що формулу (7) можна записати у вигляді

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) . \tag{11}$$

Функція $\Phi(x)$ є непарною ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), вона табульована при значеннях аргумента від 0 до 5. Тому при розв'язуванні задач для спрощення обчислень користуються таблицями.

Зауваження. Якщо m – число появ події A в n незалежних випробуваннях $(k_1 \le m \le k_2)$, то дріб $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ змінюється від x_1 до x_2.

Тоді інтегральна формула Лапласа має вигляд

$$P\left(x_1 \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le x_2 \right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) , \tag{12}$$

де x_1 та x_2 обчислені за формулою (8).

Приклад 4. Відділом технічного контролю встановлено, що в середньому 98% виробів відповідає вимогам, а 2% потребують регулювання. Перевіряється партія з 300 виробів. Якщо серед них виявиться 11 і більше таких, які потребують регулювання, то вся партія повертається на доопрацювання. Знайти ймовірність того, що партія буде прийнята.

Розв'язання. У даному випадку n досить велике, тому ймовірність того, що $k \le 10$, можна оцінити за формулою (11) з такими даними:

$$n = 300; \quad p = 0{,}02; \quad q = 0{,}98; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 10 .$$

Знайдемо спочатку x_1 та x_2:

$$x_1 = \frac{0-6}{\sqrt{5{,}88}} \approx -2{,}47 ; \; x_2 = \frac{10-6}{\sqrt{5{,}88}} \approx 1{,}65 .$$

Шукана ймовірність

$$P(0 \le k \le 10) = \Phi(1{,}65) - \Phi(-2{,}47) = \Phi(1{,}65) + \Phi(2{,}47) .$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$, знайдемо

$$\Phi(1,65)=0,4505; \quad \Phi(2,47)=0,4932.$$

Тому $P(0\le k\le 10)=0,4505+0,4932=0,9437$.

Відхилення відносної частоти

Використовуючи інтегральну теорему Лапласа, можна оцінити відхилення відносної частоти від сталої ймовірності появи події в одній спробі.

Фактично, хочемо оцінити, як (наскільки) статистична ймовірність відрізняється від класичної, тобто знайти ймовірність

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right).$$

Розглянемо нерівність $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon$, вона еквівалентна

$$-\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon, \text{ або } -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

До останньої нерівності застосуємо інтегральну теорему Лапласа, взявши в якості $x_1=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, $x_2=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, маємо:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отримаємо формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{13}$$

***Приклад* 5.** Ймовірність того, що деталь нестандартна, $p=0,1$. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартної деталі відхиляється від ймовірності p за абсолютною величиною не більше ніж на $0,03$.

Розв'язання. З умови задачі запишемо

$n=400; \quad p=0,1; \quad q=0,9; \quad \varepsilon=0,03$.

Підставимо дані у формулу (13), отримаємо шукану ймовірність:

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\le 0,03\right)=2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{400}{0,1\cdot 0,9}}\right)=2\Phi(2)=0,9544 .$$

Зміст отриманого результату такий: якщо взяти достатньо велику кількість разів по 400 деталей у кожній спробі, то приблизно у $95,44\%$ цих спроб відхилення відносної частоти від постійної ймовірності $p=0,1$ за абсолютною величиною не перевищує $0,03$.

Найімовірніше число появ подій

Наведемо формулу, яка дає змогу знайти найімовірніше число появи подій в n незалежних випробуваннях.

Число k_0 *вважається найімовірнішим*, якщо ймовірність появи події A k_0 разів в n випробуваннях не менша за всі наслідки цих випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначається з нерівності

$$np-q\le k_0<np+p , \tag{14}$$

причому якщо np ціле число, то $k_0=np$; якщо $np-q$ ціле, то існують два найімовірніші числа

$$k_0=np-q;\quad k_0=np-q+1 .$$

Приклад 6. Монету підкинули 10 разів. Яке найімовірніше число випадань герба?

Розв'язання. У нашій задачі $n=10;\quad p=0,5;\quad q=0,5$.

За формулою (14) отримаємо

$10\cdot 0,5-0,5\le k_0<10\cdot 0,5+0,5$, або $4,5\le k_0<5,5$.

Звідси отримуємо найімовірніше число $k_0=5$.

Часто розглядають задачі, в яких найімовірніше число відоме, а потрібно знайти чи необхідну кількість випробувань, чи ймовірність появи події в одній спробі, які забезпечують дане найімовірніше число.

§ 8. Випадкові величини. Функція розподілу

Одним із основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Перш ніж перейти до означення випадкової величини, зупинимося на кількох прикладах.

Кількість викликів, які надходять на АТС за певний проміжок часу, є випадкова величина і набуває тих чи інших значень залежно від випадкових обставин.

Величина відхилення точки падіння снаряда від центра цілі залежить від багатьох різних причин, що мають випадковий характер. У результаті в теорії стрільби слід враховувати розсіювання снарядів навколо центра цілі, як випадкове явище, і розглядати вказані відхилення як випадкові величини.

Число народжених хлопчиків серед n новонароджених протягом однієї доби в місті Києві є також випадковою величиною з можливими значеннями від 0 до n.

Швидкість молекули газу змінюється залежно від зіткнень з іншими молекулами. Таких зіткнень дуже багато протягом навіть дуже короткого проміжку часу. Знаючи швидкість молекули в даний момент, не можна з повною впевненістю вказати її значення, наприклад через $0,001$ с. Зміна швидкості молекул має випадковий характер за рахунок хаотичного (броунівського) руху молекул.

Наведені приклади показують, що з випадковими величинами доводиться мати справу в найрізноманітніших галузях науки і техніки, проте з точки зору математики всі ці приклади є однотипні. У кожному прикладі маємо справу з величиною, яка під впливом випадкових обставин набуває різних значень, наперед невідомо яких саме.

Таким чином, для того щоб знайти випадкову величину, перш за все треба знати ті значення, яких вона може набувати, а також, як часто вони набуваються, тобто ймовірності, з якими ці значення набуваються.

Різновид випадкових величини досить великий. Кількість прийнятих ними значень може бути як скінченна (дискретна), так і нескінченна (цілком заповнюючи певний інтервал).

Дискретною називають величину, яка набуває окремих ізольованих можливих значень, так що між двома сусідніми значеннями немає інших значень.

Неперервною називають величину, яка набуває всіх можливих значень із скінченного або нескінченного інтервалу, заповнюючи його цілком.

Для того щоб задавати ймовірності значень випадкових величин, вводять поняття *функції розподілу* випадкової величини.

Випадкові величини позначають великими літерами $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення – малими $x_1, x_2, \ldots;\quad y_1, y_2, \ldots;\quad z_1, z_2, \ldots$.

Нехай x – деяке дійсне число. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше ніж x, позначимо $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функція $F(x)$ називається *функцією розподілу ймовірностей* (*інтегральною функцією розподілу*) випадкової величини X. Геометрично, рівність $F(x) = P(X < x)$ можна тлумачити так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина набуває значення, яке зображається на числовій осі точкою, що лежить лівіше від x.

Іноді кажуть, що випадкова величина – це змінна величина, значення якої залежать від випадку і для якої визначена функція розподілу ймовірностей.

Використовуючи поняття функції розподілу ймовірностей, можна дати чітке визначення неперервної випадкової величини. Випадкову величину називають неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною, кусково-диференційованою з неперервною похідною.

Нехай X – кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p. Залежно від випадку X може приймати всі чілочисельні значення від 0 до n включно. Згідно з формулою Бернуллі

$$P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Функція розподілу величини X задається таким чином:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} P_n(k), & \text{при } 0 < x \le n, \\ 1, & \text{при } x > n. \end{cases}$$

Функція розподілу зображає східчасту лінію зі стрибками в точках $x = 0; 1; 2; 3; \ldots; n$; стрибок у точці $x = k$ дорівнює $P_n(k)$.

Властивості функції розподілу

1. Область значень функції розподілу належить інтервалу [0, 1]:

$$0 \le F(x) \le 1 .$$

Ця властивість випливає з визначення функції розподілу як ймовірності, а ймовірність – завжди невід'ємне число, не більше одиниці.

2. Функція $F(x)$ – неспадна, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Доведемо цю властивість. Нехай $x_2 > x_1$. Подію, яка полягає в тому, що X прийме значення, менше від x_2, можна представити як суму двох несумісних подій: X прийме значення, менше від x_1; X прийме значення від x_1 до x_2. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій

$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$, або звідси отримаємо

$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, звідси отримаємо

$F(x_2) - F(x_1) \ge 0$; або $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Отже, функція $F(x)$ неспадна.

***Наслідок* 1**. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення з інтервалу $(a;b)$, рівна приросту інтегральної функції на цьому інтервалі:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) . \qquad (1)$$

Цей наслідок випливає з попередньої властивості. Він дуже часто використовується при розв'язанні задач.

Виходячи з неперервності інтегральної функції та формул (1), можна отримати рівності $P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b)$.

Фактично це означає, що ймовірність того, що неперервна величина прийме одне певне значення, дорівнює нулю ($P(x_1 \le X \le x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, звідси $P(X = x_1) = 0$). Отже, немає сенсу говорити про ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме одне визначене значення, але є сенс говорити про ймовірність попадання цієї величини в інтервал.

***Наслідок* 2.** Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$; якщо ж значення випадкової величини розміщені на всій числовій осі, то на $-\infty$ інтегральна функція дорівнює 0, а на $+\infty$ вона рівна одиниці.

Цей наслідок випливає з означення інтегральної функції.

***Приклад* 1.** Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -2,\\ \frac{1}{16}(x+2)^2, & \text{при} -2<x\le 2,\\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробовування X прийме значення з інтервалу $(0;2)$.

Розв'язання. За формулою (1) знайдемо:

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=1-0,25=0,75.$$

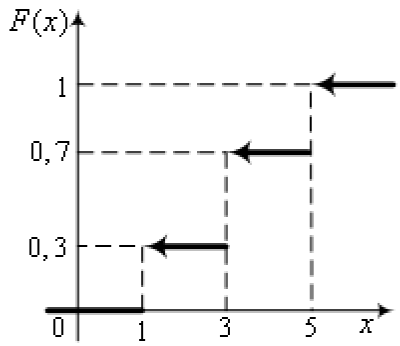


Рис. 114.

***Приклад* 2.** Побудувати функцію розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, що має закон розподілу

x_i	1	3	5
p_i	0,3	0,4	0,3

Розв'язання. Виходячи з означення функції розподілу ймовірностей, отримаємо

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 1,\\ 0,3, & \text{при } 1<x\le 3,\\ 0,7, & \text{при } 3<x\le 5,\\ 1, & \text{при } x>5. \end{cases}$$

Графік цієї функції є східчаста фігура (рис.114).

§9. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Нагадаємо, що дискретною називають випадкову величину X, яка в результаті випробування приймає окремі ізольовані значення (між двома сусідніми значеннями немає інших значень). Якщо відомі ймовірності, з якими ці значення приймаються, то кажуть, що задано закон розподілу дискретної випадкової величини (д.в.в.). Його записують у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	……….. x_n
p_i	p_1	p_2	……….. p_n

1. ***Біномний (біноміальний) розподіл.*** Нехай проведено n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може з'явитися із ймовірністю p і не з'явитися з імовірністю $q=1-p$. Розглянемо д.в.в. X – число появ події A в цих випробуваннях. Легко бачити, що можливі значення випадкової величини

$$X(x_i=k): 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad ...,\quad n.$$

Для знаходження ймовірностей $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$ використовують формулу Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, для $k=\overline{0,n}$ (значення x_i ті самі, що k у формулі Бернуллі). Такий розподіл називають *біномним*. Ця назва йде від бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + ... + C_n^0 q^n.$$

Оскільки сума $p+q$ дорівнює одиниці, робимо висновок, що сума справа в попередній формулі теж дорівнює одиниці. Отже, сума ймовірностей для біноміального закону розподілу дорівнює одиниці: $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. Це можна отримати ще з інших міркувань. Оскільки подія A може з'явитися або 0, або 1, ..., або n разів (вичерпано всі можливі випадки), то їх сума – достовірна подія.

Біноміальний закон розподілу може бути записаний у вигляді

x_i	n	$n-1$	$\dots$	k	$\dots$	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	q^n

(1)

Приклад **1.** Записати закон розподілу д.в.в. X – числа випадань герба при двох підкиданнях монети.

Розв'язання. Випадкова величина X приймає значення: $0,\ 1,\ 2$. Ймовірності прийняття цих значень знайдемо за формулою Бернуллі

$$P_2(0)=C_2^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};\ P_2(1)=C_2^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ P_2(2)=C_2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}.$$

Отримали закон розподілу

x_i	0	1	2
p_i	$0,25$	$0,5$	$0,25$

2. ***Геометричний розподіл.*** Нехай проводяться незалежні випробування, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p $(0 < p < 1)$. Випробування проводяться до першої появи події A, тобто закінчуються, як тільки подія A з'явиться. Іншими словами, якщо подія A з'явилася в k–му випробуванні, то це означає, що в попередньому $k-1$ випробуванні вона не з'явилась.

Позначимо через X, дискретну випадкову величину, – число випробувань, які треба провести до першої появи події A. Легко бачити, що можливі значення випадкової величини є натуральний ряд чисел $1,2,3,...,n$. Ймовірність того, що подія A з'явиться з першого разу, дорівнює p, з другого разу – qp, з третього разу – $q^2 p$,..., з n–го разу – $q^{n-1} p$ і т.д. Такий розподіл називають *геометричним*. Назва його пов'язана з тим, що ймовірності цього розподілу утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію, сума якої дорівнює одиниці:

$$S = p + qp + q^2 p + q^3 p + ... + q^{n-1} p + ... = p(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...) = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Отже, геометричний розподіл має вигляд:

x_i	1	2	3	…	n	…
p_i	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{n-1} p$	…

(2)

Приклад 2. Стрілець стріляє в ціль з імовірністю влучення $p = 0,6$. Записати перші три елементи закону розподілу випадкової величини X – числа пострілів до першого влучення в ціль.

Розв'язання. Використовуючи (2), запишемо геометричний розподіл:

x_i	1	2	3
p_i	$0,6$	$0,24$	$0,096$

3. ***Гіпергеометричний розподіл***. Звернемося ще раз до задачі з чотирма параметрами (§ 3). Із партії з N деталей, що містить n стандартних, навмання беруть m штук $(m < N)$. Кожна взята деталь не повертається назад. Нехай k – кількість стандартних деталей серед відібраних.

Позначимо через X випадкову величину – число k, кількість стандартних деталей серед відібраних. Можливі значення випадкової величини $X: 0, 1, 2, 3, ... \min(m, n)$. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, що дорівнює k, знаходимо за формулою (4) § 3:

$$P(X = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Таким чином, описано гіпергеометричний закон розподілу, а саме:

$X(x_i = k)$	0	1	2	…	k	…
p_i	$\frac{C_{N-n}^m}{C_N^m}$	$\frac{C_n^1 \cdot C_{N-n}^{m-1}}{C_N^m}$	$\frac{C_n^2 \cdot C_{N-n}^{m-2}}{C_N^m}$	…	$\frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$	…

(3)

Зауважимо, що якщо N і n великі, а m значно менше за них, то гіпергеометричний розподіл має ймовірності, близькі до ймовірностей, що знайдені за формулою Бернуллі.

Приклад 3. Записати закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед вибраних $m = 2$ із партії $N = 5$, що містить 3 стандартні.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини $x_i = k$: $0, 1, 2$. Обчислимо окремо відповідні ймовірності, а потім запишемо закон у вигляді таблички.

$$P(x_1 = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}; \ P(x_2 = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}; \ P(x_3 = 2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}.$$

Отже, отримали закон розподілу:

$X(x_i = k)$	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

4. *Найпростіший потік подій. Розподіл Пуассона*. *Потоком подій* називають послідовність подій, які наступають у випадкові моменти часу. Класичними прикладами потоку подій слугує потік викликів на АТС, послідовність виходу з ладу елементів телетрансляційної системи тощо.

Найпростіший потік має властивості:

а) *Властивість стаціонарності* (ймовірність появи k подій на будь–якому проміжку часу залежить тільки від числа k та від довжини проміжку часу

t і не залежить від початку відліку, вважаючи, що різні проміжки часу не перетинаються.

б) *Властивість відсутності наслідку* (ймовірність появи k подій на будь-якому проміжку часу не залежить від того, чи з'являлись, чи ні події в попередні моменти часу. Тобто умовна ймовірність появи k подій на будь–якому проміжку, обчислена в припущенні, скільки подій появилося або в якій послідовності, рівна безумовній ймовірності. Іншими словами, минуле потоку не впливає на ймовірність появи події в найближчому майбутньому.

Властивість відсутності наслідку гарантує незалежність появ подій в проміжки часу, що не перетинаються.

в) *Властивість ординарності* (ймовірність появи двох і більше подій за дуже малий проміжок часу практично дорівнює нулю).

Потік подій, який володіє цими властивостями, називають *пуассонівським*. Під *інтенсивністю* потоку розуміють середнє число подій, які появляються за одиницю часу (позначають λ).

Ймовірність появи k подій за час t пуассонівського потоку подій знаходиться за формулою

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}. \quad (4)$$

Ця формула відображає всі властивості простого потоку.

Нехай проведено n випробувань (n – досить велике, наприклад, порядок 10^3) з ймовірністю появи події в одній спробі p (p – достатньо мале, порядок 10^{-3}), так що $np = \lambda$ стале, середнє в певному розумінні.

Позначимо за X – випадкову величину, кількість появ подій $(x_i = k)$. Випадкова величина приймає значення $x_i : 0, 1, 2, ..., k, ..., n$. Якщо ймовірності $P_n(x_i = k)$ знайдені за формулою Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, то отримаємо *Пуассонівський розподіл*:

$X(x_i = k):$	0	1	2	$\cdots$
$p_i:$	$\frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!}$	$\frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!}$	$\cdots$

(5)

Приклад 4. На АТС за хвилину надходить 2000 викликів. Ймовірність відмовлення автоматичної системи для кожного виклику $p = 0,001$. Записати закон розподілу випадкової величини X – числа відмовлень протягом наступної хвилини (обмежитись трьома першими членами).

Розв'язання. Запишемо частоту відмовлень $\lambda = np = 2000 \cdot 0,001 = 2$. Беручи до уваги (5), отримаємо розподіл:

$X(x_i = k)$:	0	1	2	$\dots$
p_i :	$e^{-2} = 0,1371$	$2e^{-2} = 0,2742$	$2e^{-2} = 0,2742$	$\dots$

Приклад 5. Для певного міста середня кількість викликів швидкої допомоги протягом доби в січні дорівнює 1000. Ймовірність невчасного приїзду карети швидкої допомоги до хворого $p = 0,001$. Яка ймовірність того, що з 15 до 19 січня включно швидка запізниться в 5 випадках?

Розв'язання. З умови задачі маємо: $n = 1000$, $p = 0,001$, $t = 5$, $k = 5$. Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи пуассонівський потік:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{5^5 \cdot e^{-5}}{5!} = \frac{625}{24 \cdot e^5} \approx 0,1815 .$$

§ 10. Густина розподілу ймовірності неперервної випадкової величини

Неперервна випадкова величина задається функцією розподілу ймовірності $F(x)$. Однак цей спосіб не єдиний. Неперервну випадкову величину можна задавати також похідною від $F(x)$, так званою *диференціальною функцією* розподілу $f(x) = F'(x)$. Функцію $f(x)$ називають також *густиною ймовірності*. З рівності $f(x) = F'(x)$ випливає, що функція розподілу ймовірності $F(x)$ є первісною для густини розподілу $f(x)$. Варто відзначити, що для розподілу дискретної випадкової величини поняття густини не застосовується хоча б тому, що $F(x)$ має розриви 1–го роду.

Властивості густини розподілу

1. Густина розподілу ймовірності є невід’ємна функція, тобто $f(x) \geq 0$.

Це випливає з того, що інтегральна функція $F(x)$ є неспадною, а отже, похідна від неї невід’ємна. Графік густини розподілу називають кривою розподілу.

2 Невласний інтеграл від густини розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (1)$$

Цей невласний інтеграл виражає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(-\infty;\infty)$, така подія достовірна, тому інтеграл дорівнює одиниці.

Геометрично властивість 2 стверджує, що площа криволінійної трапеції, обмежена кривою розподілу та віссю OX, дорівнює одиниці.

Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$, то друга властивість записується таким чином:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Знаючи густину розподілу, можна знайти ймовірність того, що неперервна величина прийме значення із заданого інтервалу.

Теорема. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(a;b)$, дорівнює визначеному інтегралу від густини

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

Доведення. Використаємо властивість функції розподілу

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} F'(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Оскільки $P(X = a) = 0$, то $P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$.

Отже, $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

Геометричний зміст цього результату. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення з інтервалу $(a;b)$, дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою густини, віссю OX і прямими $x=a$ та $x=b$.

Якщо густина ймовірності $f(x)$ є парною функцією, тоді

$$P(-a < X < a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)dx.$$

***Приклад* 1.** Задана густина розподілу ймовірності неперервної випадкової величини (н. в. в.) X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу $(0,5;1)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (2), отримаємо

$$P(0,5 < X < 1) = 2\int_{0,5}^{1} xdx = x^2 \Big|_{0,5}^{1} = 0,75.$$

Зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями розподілу

Якщо відомо $f(x)$, тоді $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Дійсно, позначимо через $F(x)$ ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше від x:

$$F(x) = P(-\infty < X < x).$$

За формулою (2) можна записати

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Отже, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

§ 11. Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу ймовірності повністю характеризує випадкову величину, проте вона часто є невідомою. Тому доводиться користуватися числовими характеристиками, які несуть певну інформацію про випадкову величину. Крім того, у ряді випадків про випадкову величину досить знати менше інформації, ніж дає функція розподілу. Для теорії ймовірностей велике значення мають деякі сталі числа (числові характеристики), отримані за певними правилами. До числових характеристик належать: математичне сподівання (очікування), дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

1. ***Математичне сподівання (очікування)***. Математичне сподівання, – це числова характеристика, яка виражає середнє значення випадкової величини. Звичайно, математичне сподівання несе мало інформації про випадкову величину, але для багатьох задач цього достатньо.

Нехай $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, ... – можливі значення дискретної випадкової величини X, а $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, ...– ймовірності, з якими ці значення приймаються.

Якщо ряд

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n + ... \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \tag{1}$$

абсолютно збіжний, то його сума називається *математичним сподіванням дискретної випадкової величини* X і позначається $M(X)$. Якщо випадкова величина X приймає скінченну кількість значень, то сума (1) скінченна і тоді

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \tag{1'}$$

Якщо наприклад, величина X приймає значення $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ з однаковою ймовірністю $p_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$, то математичне сподівання дорівнює

$$M(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \tag{2}$$

У формулі (2), справа, є середнє значення випадкової величини. Завдяки цьому вираз (1) часто називають середнім значенням випадкової величини.

Нехай дискретна випадкова величина X приймає значення x_1 – m_1 разів, x_2 – m_2 разів, ..., x_k – m_k разів так, що $m_1+m_2+m_3+...+m_k=n$. Тоді ймовірність появи x_1 буде $\frac{m_1}{n}$, x_2 – $\frac{m_2}{n}$, ..., x_k – $\frac{m_k}{n}$. За формулою (1′) математичне сподівання дорівнює

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}x_j m_j=x_{ср.}=\overline{x}.$$

Отже, $M(X)=\overline{x}$ (середнє значення випадкової величини). Математичне сподівання дискретної випадкової величини дорівнює її середньому значенню.

***Зауваження* 1.** Математичне сподівання більше найменшого і менше найбільшого можливих значень випадкової величини. Іншими словами, на числовій осі можливі значення розміщені зліва і справа від математичного сподівання. У цьому сенсі математичне сподівання характеризує розміщення розподілу, через це його часто називають *центром розподілу*.

Механічне тлумачення формули (1′), запишемо її у вигляді

$$M(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}=x_{ц.м.} \tag{3}$$

Нехай p_i – маси матеріальних точок, які розміщені на числовій осі, x_i – координати цих точок. Тоді формулу (1′) можна розглядати як формулу для знаходження центра мас ($x_{ц.м.}$). Тому математичне сподівання іноді називають *центром розподілу* випадкової величини.

***Приклад* 1.** Знайти математичне сподівання розподілу

x_i	3	4	5
p_i	$0,2$	$0,4$	$0,4$

Розв'язання. За формулою (1′), знаходимо

$$M(X) = 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,4 = 4,2 .$$

Приклад 2. Випадкова величина X – число появ події A в одному випробуванні. Знайти математичне сподівання числа появ події, якщо ймовірність появи події $P(A) = p$.

Розв'язання. Величина X приймає значення: 0 і 1 відповідно з ймовірностями q і p. Тому $M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Отже, математичне сподівання числа появи події в одному випробуванні дорівнює ймовірності появи цієї події.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини вводиться наступним чином. Нехай неперервна випадкова величина (н. в. в.) приймає значення з інтервалу $(a;b)$ і задана густиною розподілу $f(x)$. Розіб'ємо інтервал на n частин $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ і виберемо в кожній частині точку x_i $(i = \overline{1;n})$. Складемо суму добутків можливих значень x_i на ймовірності попадання їх в інтервали Δx_i (добуток $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ приблизно рівний ймовірності попадання x_i в інтервал Δx_i)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i . \tag{4}$$

Перейшовши до границі в (4), при наближенні до нуля найбільшого з інтервалів отримаємо математичне сподівання неперервної випадкової величини

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx . \tag{5}$$

Якщо випадкова величина задана на всій числовій осі, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx . \tag{6}$$

Останній інтеграл вважається збіжним абсолютно.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої дорівнює самій сталій $M(C) = C$.

Спираючись на означення математичного сподівання, ця властивість очевидна як для дискретних, так і неперервних випадкових величин.

2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

Це легко отримується з означення $M(X)$ та $M(CX)$:

Cx_i:	Cx_1	Cx_2	$\cdots$	Cx_n
p_i:	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + ... + Cx_np_n = C\cdot(x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n) = C\cdot M(X).$$

3. Для неперервно розподіленої випадкової величини

$$M(CX) = \int_a^b Cx\cdot f(x)dx = C\int_a^b x\cdot f(x)dx = C\cdot M(X).$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y).$$

Означення. Дві випадкові величини X та Y називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина, у протилежному випадку величини залежні.

Добутком двох незалежних величин X і Y називають величину XY, яка приймає можливі значення, що дорівнюють всеможливим добуткам $x_i\cdot y_j$ з імовірностями, що рівні відповідним добуткам, наприклад:шщ

x_i:	x_1	x_2		y_i:	y_1	y_2
p_i:	p_1	p_2		p_i:	q_1	q_2.

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
p	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2.

Математичне сподівання добутку дорівнює

$$M(XY) = x_1y_1p_1q_1 + x_2y_1p_2q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_2p_2q_2 = y_1q_1(x_1p_1 + x_2p_2) + \\ + y_2q_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (x_1p_1 + x_2p_2)\cdot(y_1q_1 + y_2q_2) = M(X)\cdot M(Y).$$

Зауваження 2. Математичне сподівання добутку скінченного числа незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань. Доведення можна провести методом математичної індукції.

Математичне сподівання суми двох незалежних випадкових величин рівне сумі математичних сподівань доданків:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Під сумою $X+Y$ двох випадкових величин X та Y розуміють випадкову величину, можливі значення якої рівні сумі кожного можливого x_i з кожним можливим y_j.

Ймовірності кожної такої суми, для незалежних випадкових величин, рівні добуткам ймовірностей доданків. Для залежних величин – добуткам ймовірностей одного з доданків на умовну ймовірність другого.

Зауважимо, що деякі суми x_i+y_j можуть бути рівні. У цьому випадку ймовірність можливого значення суми дорівнює сумі відповідних ймовірностей однакових можливих значень.

Доведемо властивість 4) для простого випадку

x_i :	x_1	x_2		y_i :	y_1	y_2
p_i :	p_1	p_2		p_i :	q_1	q_2.

Можливі значення суми випадкової величини $X+Y$

$X+Y$:	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2.

Нехай усі можливі значення різні. Позначимо їх ймовірності через

$$p_{11}=p_1q_1, \quad p_{12}=p_1q_2, \quad p_{21}=p_2q_1, \quad p_{22}=p_2q_2.$$

Тоді $M(X+Y)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}=$

$$=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})=$$

$$=x_1p_1+x_2p_2+y_1q_1+y_2q_2=M(X)+M(Y).$$

***Зауваження* 3.** Математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

Для неперервних випадкових величин доведення цієї властивості опирається на те, що інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів:

$$M(X+Y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}x\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy=M(X)+M(Y).$$

Тут використано властивість густини: інтеграл від густини за кожною змінною на всій області визначення дорівнює одиниці.

2. ***Дисперсія***. За самим математичним сподіванням не можна судити про можливі значення випадкової величини, як вони розсіяні навколо математичного сподівання, тому кажуть, що ця величина не повністю характеризує розподіл.

Для того щоб оцінити, як розсіяні значення випадкової величини навколо середнього значення (математичного сподівання), вводять дисперсію.

Дисперсією $D(X)$ називається математичне сподівання квадрата відхилення X від свого математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{7}$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, легко отримати формулу, зручну для обчислення дисперсії:

$$D(X) = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Отже, маємо формулу, зручну для обчислення дисперсії:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{8}$$

Для дискретної випадкової величини формулу обчислення дисперсії можна записати у вигляді $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$.

Для дискретної випадкової величини обчислення дисперсії можна проводити так: спочатку за формулою (1) обчислюють математичне сподівання $M(X)$; потім знаходять $M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$, тоді за формулою (8) знаходимо $D(X)$.

***Приклад* 3.** Знайти дисперсію розподілу:

x_i :	1	2	3
p_i :	0,2	0,7	0,1.

Розв'язання. Спочатку знаходимо $M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,1 = 1,9$.

Потім $M(X^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,7 + 3^2 \cdot 0,1 = 3,9$.

Отримаємо дисперсію $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 3,9 - 1,9^2 = 0,29$.

Для неперервної випадкової величини, яка задана на інтервалі $(a;b)$, формула для знаходження дисперсії має вигляд

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx\,. \qquad (9)$$

Якщо випадкова величина задана на всій числовій осі, то дисперсія дорівнює

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx\,. \qquad (10)$$

Формулу, зручну для обчислення дисперсії н.в.в., можна отримати із (9) чи (10), розкривши під інтегралом квадрат та скориставшись властивостями інтегралів. Тоді отримаємо

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left(\int_a^b xf(x)dx\right)^2\,. \qquad (11)$$

***Приклад* 4.** Задана густина розподілу для н.в.в. X

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, \text{при} -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, \quad \text{при } x<-\frac{\pi}{2};\ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію величини $Y=2\sin X$.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання величини Y:

$$M(Y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cdot\frac{1}{2}\cos x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cdot\sin x\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,d(\cos x)=$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{3}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=0\,.$$

Враховуючи, що $M(Y)=0$, дисперсія дорівнює

$$D(Y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^2\frac{1}{2}\cos xdx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos xdx=$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) = \left(\frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{15}.$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої C дорівнює нулю

$$D(C) = 0.$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, отримаємо

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

Ця властивість стає зрозумілою, якщо врахувати, що дисперсія характеризує розсіювання величини навколо її середнього значення. Стала величина не має розсіювання.

2. Сталий множник можна винести за знак дисперсії у квадраті:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Використаємо формулу (8) і властивість математичного сподівання:

$$D(CX) = M((CX)^2) - M^2(CX) = C^2 M(X^2) - C^2 M^2(X) =$$
$$= C^2(M(X^2) - M^2(X)) = C^2 D(X).$$

Властивість доведена.

3. Дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Використовуючи означення та властивості математичного сподівання, отримаємо

$$D(X \pm Y) = M((X \pm Y)^2 - M^2(X \pm Y) = M(X^2 \pm 2XY + Y^2) - (M(X) \pm M(Y))^2 =$$
$$= M(X^2) \pm 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M^2(X) \pm 2M(X)M(Y) + M(Y) =$$
$$= M(X^2) - M^2(X) + M(Y^2) - M^2(Y) = D(X) + D(Y).$$

Властивість доведена.

Наслідок. Дисперсія суми чи різниці скінченної кількості взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин (доведення легко провести методом математичної індукції).

3. ***Середнє квадратичне відхилення***. Крім дисперсії, часто використовують у дослідженнях іншу характеристику – середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (12)$$

Розмірність середнього квадратичного відхилення збігається з розмірністю X, тому що дисперсія має розмірність, що дорівнює квадрату розмірності випадкової величини.

Середнє квадратичне відхилення, наприклад у прикладі 4, дорівнює

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{16}{15}} \approx 1,0328.$$

Числові характеристики біноміального розподілу

1. ***Математичне сподівання***. Нехай проводиться n незалежних випробувань з ймовірністю появи події A в кожному випробуванні p. Як знайти середнє число появ події A в цих випробуваннях?

Нехай X – число появ події в n випробуваннях. Очевидно, загальне число появ події A складається з чисел появи події в окремих випробуваннях. Тому, якщо X_1 – число появ події в першому випробуванні, X_2 – у другому, . . ., X_n – у n–му, то загальне число появ події A дорівнює

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Звідси $M(X) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$.

Оскільки математичне сподівання числа появи події в одному випробуванні дорівнює ймовірності події, то

$$M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = p.$$

Враховуючи цю та попередню рівності, отримаємо $M(X) = np$.Отже, математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює np.

2. ***Дисперсія.*** Дисперсія біноміального розподілу дорівнює $D(X) = npq$.

Це випливає з таких міркувань. Величини $X_1, X_2, ..., X_n$ взаємно незалежні, оскільки результат кожного випробування не залежить від результатів останніх. Тому $D(X) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$, причому

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i).$$

Враховуючи результат прикладу 2, знайдемо математичне сподівання випадкової величини X_i^2:

X_i^2	1^2	0^2
p_i	p	q

$M(X_i^2) = 1^2 p + 0^2 q = p$. Звідси $D(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

Отже, дисперсія біноміального розподілу дорівнює $D(X) = npq$.

3. ***Середнє квадратичне відхилення.*** Для біноміального закону розподілу середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}.$$

§ 12. Початкові і центральні моменти. Мода і медіана

Означення **1.** *Початковим моментом* k*–го порядку* випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{1}$$

Для прикладу $\nu_1 = M(X)$; $\nu_2 = M(X^2)$. Так що $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Означення **2**. *Центральним моментом* k*–го порядку* випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k. \tag{2}$$

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$\mu_1 = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0$;

центральний момент другого порядку дорівнює дисперсії:

$\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X)$. Або $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$.

Центральний момент k–го порядку завжди можна виразити через початкові моменти не вище k–го порядку. Ці зв'язки легко встановлюються з використанням формули бінома Ньютона.

Означення **3.** *Модою* $Mo(X)$ неперервної випадкової величини називають те її значення, якому відповідає максимум диференціальної функції.

Для дискретної випадкової величини модою буде те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність, тобто

$$Mo(X)=x_i,\quad P(X=x_i)=\max p_i,\quad i=\overline{1;n}.$$

Для неперервної випадкової величини моду шукають, досліджуючи густину ймовірності на максимум, використовуючи похідну.

***Означення* 4.** *Медіаною* $Me(X)$ неперервної випадкової величини називають те її значення, яке визначається рівністю

$$P(x<Me(X))=P(X>Me(X))=0,5. \tag{3}$$

***Приклад* 1.** Розподіл н.в.в. на всій числовій осі заданий густиною

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайти моду цього розподілу.

Розв'язання. Дослідимо функцію $f(x)$ на екстремум. Шукаємо точки, підозрілі на екстремум, тобто точки, де $f'(x)=0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{2(x-a)}{2\sigma^2}=0.$$

Звідси $x-a=0$, Отже, $x=a$ – критична точка. В околі точки a похідна змінює знак з"+" на" –", отже, у цій точці функція досягає максимуму. Тому мода $Mo(X)=a$.

Наведений у цьому прикладі розподіл називається *нормальним*. Легко показати, що медіана нормального розподілу також дорівнює $Me(X)=a$.

***Приклад* 2.** Знайти медіану показникового розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \text{при } x\ge 0,\\ 0, \quad \text{при} \quad x<0.\end{cases}$$

Розв'язання. З означення медіани

$$P(0<X<Me)=\lambda\int_0^{Me}e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{Me}=1-e^{-\lambda Me}.$$

Згідно з формулою (3) отримаємо $1-e^{-\lambda Me}=0,5$. Або $\lambda Me=\ln 2$.

Отримали медіану показникового розподілу $Me(X)=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

***Приклад* 3.** Виразити центральний момент четвертого порядку через початкові моменти.

Розв'язання. Згідно з означенням $\mu_4 = M(X - M(X))^4$. Піднесемо вираз у дужках до четвертої степені та знайдемо його математичне сподівання:

$$\mu_4 = M(X^4 - 4X^3M(X) + 6X^2M^2(X) - 4XM^3(X) + M^4(X)) =$$
$$= M(X^4) - 4M(X^3)M(X) + 6M(X^2)M^2(X) - 4M^4(X) + M^4(X) =$$
$$= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

§ 13. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Задати закон розподілу неперервної випадкової величини – означає задати функцію розподілу ймовірностей або густину розподілу ймовірностей та область її визначення.

1. ***Рівномірний розподіл***. Розподіл ймовірностей називають *рівномірним*, якщо на вказаному інтервалі $(a;b)$ густина розподілу ймовірності приймає стале значення.

Виходячи з властивості густини, знайдемо густину рівномірного розподілу $f(x) = C$ на проміжку $(a;b)$, причому $f(x) = 0$ за межами цього проміжку.

Із умови $\int_a^b f(x)dx = 1$ маємо $C\int_a^b dx = 1$, або $C(b-a) = 1$.

Отже, $C = \dfrac{1}{b-a}$. Тому функція густини ймовірності рівномірного розподілу має вигляд (рис.115):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & при \quad a < x \le b, \\ 0, & при \quad x \in (-\infty, a] \cup (b, \infty). \end{cases} \tag{1}$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(\alpha;\beta)$, що входить в $(a;b)$ і має рівномірний закон розподілу, знаходиться:

$$P(\alpha < x \le \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a}. \tag{2}$$

Інтегральна функція розподілу (рис.116) на $(a;b]$ дорівнює

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}.$$

(3)

Наведемо графіки диференціальної та інтегральної функцій рівномірного розподілу:

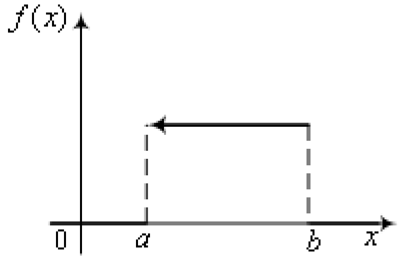


Рис. 115.

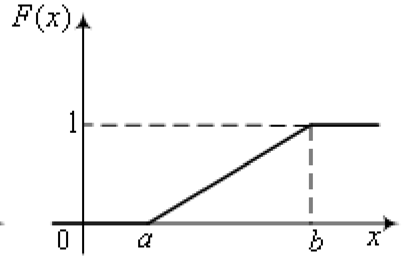


Рис. 116.

***Приклад* 1.** Маршрутні таксі деякого маршруту їздять строго за графіком з інтервалом 20 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов на зупинку, буде чекати маршрутку не більше 5 хвилин.

***Розв'язання*.** Маршрутки їздять строго за графіком. Це означає, що вони їздять рівномірно. Маємо густину ймовірності $f(x)=\frac{1}{20}$. Нехай X – час приходу пасажира на зупинку після відправлення попереднього таксі. Щоб пасажир чекав не більше 5 хвилин, X має приймати значення з інтервалу $(15;20)$. Тому шукана ймовірність дорівнює

$$P(15<X<20)=\int_{15}^{20}\frac{1}{20}dx=\frac{5}{20}=0,25.$$

Числові характеристики рівномірного розподілу

1. *Математичне сподівання.* Математичне сподівання неперервно розподіленої випадкової величини знаходиться за формулою

   $M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx$. Для рівномірного розподілу, матимемо

$$M(X)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

2. *Дисперсія.* Для знаходження дисперсії використаємо формулу

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

$$M(X^2)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Тоді дисперсія дорівнює

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

3. Середнє квадратичне відхилення рівномірного розподілу дорівнює

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{12}}=\frac{|a-b|}{2\sqrt{3}}.$$

2. ***Нормальний розподіл***. Розподіл неперервної випадкової величини, для якого функція густини на всій числовій осі має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4)$$

називається *нормальним*. Бачимо, що густина ймовірності нормального розподілу визначається двома параметрами – a і σ.

Покажемо, що параметр a є не що інше, як математичне сподівання, тобто $M(X)=a$; а σ – середнє квадратичне відхилення у формулі (4).

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

У цьому інтегралі проведемо заміну $z=(x-a)/\sigma$. Тоді $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$.

Нові межі інтегрування при такій заміні будуть такі ж, як у попередньому інтегралі. Тому

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\, ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Перший інтеграл дорівнює нулю (підінтегральна функція непарна, межі інтегрування симетричні відносно початку координат).

Другий інтеграл – це інтеграл Пуассона, який дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} .$$

Тому $M(X) = a$.

Дисперсія, враховуючи, що $M(X) = a$, дорівнює

$$D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

При цій самій заміні $z = (x-a)/\sigma$, інтегруючи частинами, отримаємо

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + \sqrt{2\pi} \right) = \sigma^2.$$

З рівності $D(X) = \sigma^2$ маємо, що $\sigma(X) = \sigma$. Середнє квадратичне нормального розподілу дорівнює параметру σ.

Для параметрів: $a = 0$, $\sigma = 1$ нормальний розподіл називають *нормованим*.

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz , \tag{5}$$

а для нормованого розподілу інтегральна та диференціальна функції дорівнюють

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz , \tag{6}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} . \tag{7}$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, враховуючи парність функції (7), можна записати $P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(0 < X < \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,5$.

Ймовірність попадання нормованої випадкової величини в інтервал $(0;x)$ знаходимо через інтегральну функцію Лапласа:

$$P(0 < X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x) .$$

Отже, для нормованого розподілу можна записати

$$F_0(x) = P(-\infty < X < x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < x) = 0,5 + \Phi(x) .$$

Графік густини нормального розподілу називають *нормальною кривою*, або *кривою Гаусса*. За відомою схемою дослідимо функцію густини (4) методами диференціального числення та побудуємо її графік.

Розглянемо функцію густини нормального розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

1. Область визначення функції $f(x)$ – вся числова вісь.
2. При всіх значеннях x : $f(x) > 0$.
3. При $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$, тобто вісь OX є горизонтальна асимптота графіка.
4. Знайдемо екстремум функції. Для цього шукаємо корені похідної:

$f'(x) = -\dfrac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$; $f'(x) = 0$, при $x = a$, причому похідна змінює знак в околі точки a із “+” на “–”. Отже, в точці $x = a$ функція досягає максимуму, який дорівнює

$$f_{\max} = f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} .$$

5. Графік функції є симетричний відносно прямої $x = a$.
6. Точки перегину графіка знаходимо з умови $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right);$$ при $x = a-\sigma$ і $x = a+\sigma$ друга похідна дорівнює нулю, тобто це точки перегину графіка функції густини. Координати точок перегину $\left(a-\sigma,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,e\sigma}\right), \left(a+\sigma,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,e\sigma}\right)$.

7. Будуємо графік нормальної кривої (рис. 117).

Вплив параметрів a ***і*** σ ***на форму нормальної кривої***

Покажемо вплив параметрів нормальної кривої на її форму. Графіки функцій $f(x)$ та $f(x-a)$ мають однакову форму, тільки зсунуті один відносно одного вздовж осі OX. При $a>0$ графік функції $f(x-a)$ можна отримати із $f(x)$, зсунувши його вправо на a одиниць вздовж осі OX.

Отже, зміна параметра a (математичного сподівання) не впливає на форму нормальної кривої, а веде лише до зсуву її вздовж осі OX, причому: якщо a зростає – вправо, якщо a спадає – вліво.

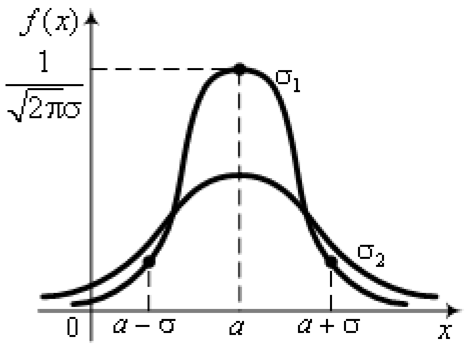


Рис. 117.

Максимальне значення густини розподілу дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Тому при зростанні параметра σ значення густини спадає, тобто крива стає більш пологою, проте площа, обмежена кривою та віссю OX, не змінюється, дорівнює одиниці (див. рис.117).

Ймовірність попадання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом розподілу, визначається через інтегральну функцію Лапласа

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

При заміні $z = (x-a)/\sigma$, отримуємо

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha - a}{\sigma}}^{\frac{\beta - a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta - a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha - a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

Використовуючи функцію Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, запишемо остаточно

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \tag{8}$$

***Приклад* 2.** Випадкова величина X розподілена нормально із математичним сподіванням та середньоквадратичним відхиленням відповідно $a = 30,\ \sigma = 20$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення з інтервалу $(10;50)$.

Розв'язання. Оскільки маємо нормальний розподіл, для знаходження ймовірності скористаємось формулою (8).

З умови задачі маємо: $\alpha = 10,\ \beta = 50,\ a = 30,\ \sigma = 20.$

Тоді

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{20}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{20}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826 .$$

Числові характеристики нормального розподілу вже стають відомі, як тільки записана функція розподілу густини ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

З попередніх досліджень маємо: математичне сподівання $M(X) = a$; дисперсія $D(X) = \sigma^2$; середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sigma$. Причому при зменшенні розсіювання (дисперсії) н. в. в. ймовірність попадання випадкової величини в певний інтервал зростає.

Часто доводиться обчислювати ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від математичного сподівання за абсолютною величиною менше заданого $\delta > 0$. Тобто треба знайти ймовірність виконання нерівності $|X - a| < \delta$.

Нерівність $|X-a|<\delta$ еквівалентна такій: $a-\delta<X<a+\delta$. За формулою (8), отримаємо ймовірність нерівності

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{9}$$

З формули (9) можна отримати так зване *правило трьох сигм:*

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0,49865=0,9973.$$

Бачимо, що отримана ймовірність близька до одиниці. Тому суть правила трьох сигм така: *якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не більша від потроєного середньоквадратичного відхилення*.

Для практики, правило трьох сигм можна використати в такий спосіб: якщо розподіл досліджуваної величини невідомий, але її значення розкидані навколо середнього не більше як на три середньоквадратичні відхилення, то можна вважати, що досліджувана величина розподілена нормально.

Асиметрія і ексцес. Розподіл відносних частот появи подій часто називають *емпіричним* розподілом. *Теоретичним* – називають розподіл ймовірностей. При вивченні розподілів часто зустрічаються близькі до нормального. Кількісно оцінити цю близькість чи розбіжність емпіричного розподілу від теоретичного дозволяють такі характеристики, як асиметрія (A_s) і ексцес $(E_к)$. Для нормального розподілу ці характеристики дорівнюють нулю. Отже, якщо асиметрія і ексцес досліджуваного розподілу близькі до нуля, то можна припускати, що цей розподіл близький до нормального.

Легко бачити, що для симетричного розподілу (графік симетричний відносно прямої $x=M(X)$) кожен центральний момент непарного порядку дорівнює нулю. Для несиметричного розподілу будь-який непарний момент (крім першого порядку) може слугувати оцінкою асиметрії, тому вибирають найпростіший – центральний момент третього порядку μ_3. Щоб уникнути розмірності оцінки, центральний момент ділять на σ^3.

Асиметрією розподілу називають відношення центрального моменту третього порядку до куба середньоквадратичного відхилення:

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{10}$$

Асиметрія характеризує деформованість кривої порівняно з нормальною кривою.

Для оцінки крутості (загострення піку) використовують ексцес

$$E_{\text{к}} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (11)$$

Якщо ексцес розподілу $E_{\text{к}} > 0$, то крива має більш високу і гостру вершину, ніж нормальна крива; якщо $E_{\text{к}} < 0$, то вершина – пологіша.

3. ***Показниковий (експоненціальний) розподіл***. Розподіл, для якого функція густини ймовірності має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0, \\ 0, \quad \text{при } x < 0, \end{cases} \qquad (12)$$

(λ – стала додатна величина), називається *показниковим*.

Цей розподіл визначається тільки одним параметром λ, і в цьому його перевага над іншими, які залежать від багатьох параметрів.

Знайдемо функцію розподілу ймовірності

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Отже, для показникового розподілу інтегральна функція має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0, \\ 0, \quad \text{при } x < 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(a;b)$, для показникового розподілу (рис. 117,118), знайдемо за формулою (1) § 8:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{\lambda a} - e^{\lambda b}.$$

Отримали

$$P(a < X < b) = e^{\lambda a} - e^{\lambda b}. \qquad (14)$$

Графіки диференціальної та інтегральної функцій мають вигляд (див. рис. 118, 119).

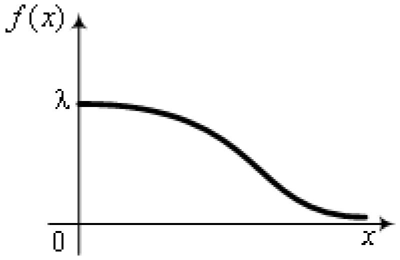


Рис. 118.

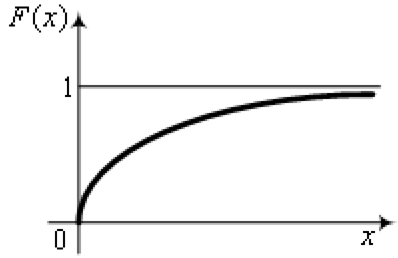


Рис. 119.

***Приклад* 3.** Випадкова величина X має закон розподілу

$$f(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & \text{при } x\ge 0,\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу $(0,2;0,4)$.

Розв'язання. За формулою (12) отримаємо

$$P(0,2<X<0,4)=e^{-5\cdot 0,2}-e^{-5\cdot 0,4}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}\approx 0,2332\,.$$

Числові характеристики показникового розподілу:

1) *Математичне сподівання.* Враховуючи, що густина ймовірності показникового розподілу дорівнює нулю, при $x<0$ (див. рис. 117), знайдемо, що

$$M(X)=\int_0^\infty x\cdot f(x)dx=\lambda\int_0^\infty x\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\left(-x\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}.$$

Отже, математичне сподівання показникового розподілу дорівнює

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

2) *Дисперсія*. Дисперсію знайдемо, інтегруючи два рази невласний інтеграл частинами та використавши попередні обчислення:

$$D(X)=\int_0^\infty x^2f(x)dx-M^2(X)=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=-\lambda x^2\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty+2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx-$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}=-2x\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty+\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Bigg|_0^\infty-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Отримали дисперсію для показникового розподілу

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

3) *Середнє квадратичне відхилення* відповідно дорівнює

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Очевидно, для показникового розподілу легко записати числові характеристики за густиною. Так, у прикладі 3 маємо:

$$M(X)=\sigma(X)=0,2;\quad D(X)=0,04.$$

Зауваження. Якщо досліджується випадкова величина X, що має показниковий розподіл, але параметр λ поки що невідомий, то його можна оцінити за середнім $\bar{x}$. Оскільки $M(X)\approx\bar{x}$, можна вважати $\lambda\approx\frac{1}{\bar{x}}$.

Функція надійності. Показниковий закон надійності

Нехай деякий елемент пристрою починає працювати в момент часу $t_0=0$. Пропрацювавши певний час t, відмовляє цей елемент. Позначимо через T неперервну випадкову величину – час (тривалість) безвідмовної роботи елемента.

Функція розподілу $F(t)=P(T<t)$ визначає ймовірність відмовлення елемента за час t. Тоді ймовірність безвідмовної роботи елемента (ймовірність протилежної події) за час тривалістю t визначається за формулою

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t).$$

$R(t)$ називають *функцією надійності*.

Досить часто час безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t)=1-e^{-\lambda t}$.

Показниковим законом надійності називають функцію, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента протягом часу t:

$$R(t)=e^{-\lambda t},\tag{13}$$

де λ – інтенсивність потоку відмовлень.

Приклад 4. Час безвідмовної роботи транзистора підпорядкований показниковому закону розподілу $f(t)=0,002\cdot e^{-0,002t}$, при $t>0$. Знайти ймовірність безвідмовної роботи транзистора протягом 1000 годин.

Розв'язання. Використовуючи функцію надійності (13), знайдемо шукану ймовірність $R(1000) = e^{-0,002\cdot 1000} = e^{-2} = 0,1353$.

Показниковий закон надійності вказує на те, що ймовірність безвідмовної роботи елемента протягом часу t при заданій інтенсивності потоку не залежить від часу попередньої роботи до початку розглядуваного інтервалу, а залежить тільки від часу t. Тобто для показникового закону надійності безвідмовна робота елемента в минулому не впливає на ймовірність його безвідмовної роботи в близькому майбутньому.

§ 14. Закон великих чисел

Про те, які значення прийме випадкова величина, сказати наперед важко, усе залежить від сукупності випадкових обставин. Однак, коли таких випадкових обставин дуже багато, сумарна поведінка достатньо великої кількості випадкових величин помітно втрачає випадковий характер і стає закономірною. Важливо знати умови, при яких втрачається випадковість поведінки множини випадкових величин, що дозволяє передбачити хід явища. Такі умови отримали назву *закону великих чисел*, або *граничних теорем*.

1. ***Нерівність Чебишева.*** При доведенні граничних теорем будемо використовувати нерівність Чебишева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

Тобто ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ за абсолютною величиною менше малого додатного числа ε, не менша, ніж $1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Доведення нерівності Чебишева. Із очевидної рівності

$$P\big(|X - M(X)| < \varepsilon\big) \;+\; P\big(|X - M(X)| \geq \varepsilon\big) = 1$$

запишемо

$$P\big(|X - M(X)| < \varepsilon\big) \;=\; 1 - P\big(|X - M(X)| \geq \varepsilon\big). \qquad (2)$$

У дисперсії

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - M(X))^2 p_n$$

відкинемо ті доданки, в яких $|x_i - M(X)| < \varepsilon$ (нехай їх буде k штук), від цього сума може тільки зменшитись. Перенумеруємо решту доданків і запишемо нерівність

$$D(X) \geq (x_{k+1} - M(X))^2 p_{k+1} + (x_{k+2} - M(X))^2 p_{k+2} + ... + (x_n - M(X))^2 p_n,$$

причому в правій частині цієї нерівності $\left| x_j - M(X) \right| \geq \varepsilon, \quad j = \overline{k+1, n}$.

Замінимо кожну дужку на ε^2, від цього нерівність тільки посилиться:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + ... + p_n). \tag{3}$$

Сума в дужках виражає ймовірність того, що випадкова величина прийме одне із значень $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, а при будь-якому з них відхилення задовольняє нерівність $\left| x_j - M(X) \right| \geq \varepsilon$. Отже, сума в (3) виражає ймовірність $P\left(\left| X - M(X) \right| \geq \varepsilon \right)$. Тому нерівність (3) можна записати так:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 \cdot P\left(\left| X - M(X) \right| \geq \varepsilon \right), \text{ або}$$

$$P\left(\left| X - M(X) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ймовірність протилежної події якраз дає нерівність Чебишева:

$$P\left(\left| X - M(X) \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

2. ***Теорема Чебишева*** (***закон великих чисел***). Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ... -$ незалежні випадкові величини, що мають рівномірно обмежені дисперсії $(D_i(X_i) \leq C, \quad i = 1, 2, 3, ...)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ ймовірність нерівності

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

прямує до одиниці за умови, що число випадкових величин необмежено зростає, або

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \tag{4}$$

Іншими словами, якщо розглядати достатньо велику кількість незалежних випадкових величин, що мають рівномірно обмежені дисперсії $(D(X_i) \leq C, \quad i = 1, 2, 3, ...)$, то майже достовірною можна вважати подію, яка полягає в тому, що відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань за абсолютною величиною є як завгодно мале.

Доведення. Математичне сподівання середнього арифметичного випадкових величин

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

дорівнює

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n} = \overline{M(X)}$$

(середньому арифметичному математичних сподівань).

Запишемо нерівність Чебишева для $\overline{X}$:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\overline{X}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Враховуючи нерівність $D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) \leq \frac{C}{n}$, попередня нерівність набуває вигляду

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

При необмеженому зростанні n вираз $\frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}$ прямує до нуля. Звідси отримуємо теорему Чебишева.

3. ***Теорема Бернуллі***. Нехай проведено n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A стала. Тоді як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p за абсолютною величиною буде як завгодно малим, якщо кількість випробувань необмежено зростає. Тобто

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{5}$$

Доведення цієї теореми випливає із нерівності Чебишева, враховуючи, що дисперсія для біноміального розподілу $D(X) = npq$.

Слід зауважити, що з теореми Бернуллі не випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p\,.$$

Із теореми Бернуллі випливає, що при достатньо великій кількості випробувань відносна частота появи події як завгодно мало відрізняється від ймовірності появи події в одній спробі. Можна стверджувати, що відносна частота виправдовує статистичне означення ймовірності.

4. ***Теорема Маркова*** **(*узагальнений закон великих чисел*).** Якщо послідовність довільних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n,...$ така, що при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\to 0\,, \tag{6}$$

то для довільного додатного постійного ε

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_k)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n,...$ попарно незалежні, то умова Маркова (6) має такий вигляд:

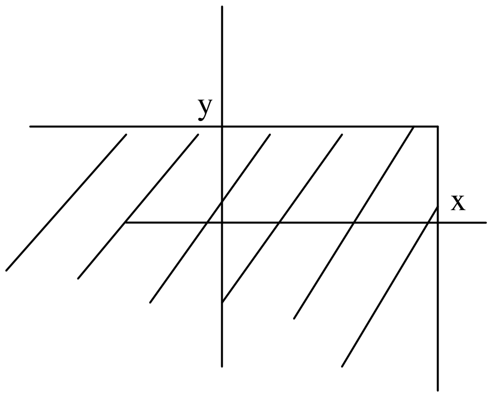
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)\to 0\,.$$

Звідси видно, що теорема Чебишева є частинним випадком теореми Маркова.

§ 15. Система двох випадкових величин

До цього часу ми вивчали випадкові величини, значення яких виражались одним число. Такі випадкові величини називаються одновимірними. Проте часто доводиться мати справу з випадковими величинами, які характеризуються (визначаються) двома, трьома $\ldots n$ – значеннями. Такі величини називаються двовимірними, трьохвимірними, $n-$ вимірними.

Розглянемо систему двох випадкових величин (X, Y). Її можна трактувати, з геометричної точки зору, як точку на площині, або як вектор. Функція розподілу системи двох випадкових величин $F(x, y)$ є ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x, а випадкова величина Y прийме значення менше від y одночасно: $F(x, y) = P((X < x) \cdot (Y < y))$, геометрично, це нескінченний прямокутник, який показано на рисунку:



Приклад. Станок автомат штампує плитку. Якщо контрольованими розмірами є довжина X, та ширина Y, то маємо двовимірну випадкову величину (X, Y). Якщо ж контролювати ще й висоту Z, то матимемо тривимірну випадкову величину (X, Y, Z). Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини, залежно від складових (чи вони дискретні чи неперервні).

А) ***Дискретні двовимірні випадкові величини***

Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік можливих значень (пар (x_i, y_j) $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,m}$) та їх ймовірностей $p(x_i, y_j)$

Y	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\cdots$	$p(x_i, y_1)$	$\cdots$	$p(x_n, y_1)$

$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	$\cdots$	$p(x_i, y_j)$	$\cdots$	$p(x_n, y_j)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\cdots$	$p(x_i, y_m)$	$\cdots$	$p(x_n, y_m)$

Так як події $(X = x_i, Y = y_j)$, $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ утворюють повну групу, то сума ймовірностей у всіх клітинках таблиці дорівнює одиниці.

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини, можна знайти закони розподілу складових.

Приклад 1. Знайти закони розподілу складових двовимірної випадкової величини, яка задана розподілом

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	$0,2$	$0,1$	$0,2$
y_2	$0,25$	$0,15$	$0,1$

Розв'язання. Додавши ймовірності колонками, отримаємо розподіл складової X:

X	x_1	x_2	x_3
p_i	$0,45$	$0,25$	$0,3$

Додавши ймовірності рядками, матимемо розподіл Y :

Y	y_1	y_2
p_i	$0,5$	$0,5$

1. Умовні закони розподілу складових системи д.в.в. Для того щоб охарактеризувати залежність між складовими двовимірної випадкової величини потрібно ввести поняття умовного розподілу.

Розглянемо дискретну двомірну випадкову величину (X, Y) з можливими значеннями $x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m$. Нехай в результаті випробування величина Y прийняла значення $Y = y_1$; при цьому X прийме одне із можливих значень x_1, або x_2, , або x_n. Позначимо умовну ймовірність того, що X прийме, наприклад значення x_1 за умови, що $Y = y_1$, через $p(x_1 | y_1)$. Ця ймовірність, взагалі кажучи не буде рівна безумовній ймовірності $P(x_1)$.

В загальному випадку умовні ймовірності позначатимемо
$P(x_i \mid y_j) \quad (i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m)$.

Умовним розподілом складової X, коли $Y = y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей

$p(x_1 \mid y_j),\ p(x_2 \mid y_j), ...,\ p(x_n \mid y_j)$,

обчислених в припущенні, що подія $Y = y_j$ вже наступила.

Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y.

Знаючи закон розподілу двомірної дискретної випадкової величини можна записати умовні закони розподілу складових. Наприклад, умовний закон розподілу X в припущенні, що подія $Y = y_1$ вже наступила:

$$p(x_i \mid y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)}, \quad (i=1,2,...,n).$$

В загальному випадку умовні закони розподілу складової X визначаються співвідношенням

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}.$$

Аналогічно знаходять умовні закони розподілу складової Y:

$$p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Приклад 2. Двомірна випадкова величина задана таблицею

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,20	0,30
y_2	0,10	0,10	0,20

Знайти умовний закон розподілу складової X за умови, що $Y = y_1$.

Розв'язання. Взявши до уваги, що $p(y_1) = 0{,}60$, маємо:

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}60} = \frac{1}{6};\ \ p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3};$$

$$p(x_3 \mid y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,30}{0,60} = \frac{1}{2}.$$

2. Умовні математичні сподівання. Умовним математичним сподіванням дискретної величини Y за умови що $X = x$ (певне можливе значення) називають добуток можливих значень Y на їх умовні ймовірності

$$M(Y \mid X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j \mid x).$$

Приклад 3. Двомірна випадкова величина задана таблицею

$Y \backslash X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 5$
$y_1 = 3$	$0,15$	$0,25$	$0,20$
$y_2 = 6$	$0,10$	$0,20$	$0,10$

Знайти умовне математичне сподівання складової Y за умови що $x_1 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо $p(x_1)$ додавши ймовірності першої колонки $p(x_1) = 0,15 + 0,10 = 0,25$. Знайдемо умовні ймовірності

$$p(y_1 \mid x_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_1)} = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}; \qquad p(y_2 \mid x_1) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(x_1)} = \frac{0,10}{0,25} = \frac{2}{5}.$$

Знайдемо шукане математичне сподівання

$$M(Y \mid X = x_1) = y_1 \cdot p(y_1 \mid x_1) + y_2 \cdot p(y_2 \mid x_1) = 3 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 4,2.$$

3. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. Крім математичного сподівання та дисперсії складових для опису системи двох випадкових величин використовують кореляційний момент та коефіцієнт кореляції.

Кореляційним моментом μ_{xy} випадкових величин X і Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин

$$\mu_{xy} = M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right].$$

Для дискретних величин кореляційний момент знаходимо за формулою

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X)) \cdot (y_j - M(Y)) \cdot p(x_i, y_j).$$

Кореляційний момент характеризує зв'язок між величинами X та Y.

Теорема. Кореляційний момент двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює нулю.

Доведення. Оскільки X та Y незалежні, то і їх відхилення $X - M(X)$ та $Y - M(Y)$ також незалежні. Математичне сподівання добутку двох незалежних величин дорівнює добутку математичних сподівань, тому

$$\mu_{xy} = M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right] = M\left[X - M(X)\right] \cdot M\left[Y - M(Y)\right] =$$
$$= \left[M(X) - M(X)\right] \cdot \left[M(Y) - M(Y)\right] = 0.$$

Розмірність кореляційного моменту дорівнює добутку розмінностей величин X та Y. Така особливість кореляційного моменту є недоліком цієї числової характеристики. Тому вводять нову числову характеристику – *коефіцієнт кореляції*:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Так як розмірність μ_{xy} дорівнює добутку розмінностей величин X та Y, крім того σ_x має розмірність величини X, а σ_y – розмірність Y, то r_{xy} безрозмірна величина. Отже, величина коефіцієнта кореляції не залежить від вибору одиниць виміру випадкових величин.

Дві випадкові величини називають *корельованими* якщо їх кореляційний момент (коефіцієнт кореляції) не дорівнює нулю. В противному випадку величини некорельовані.

Дві корельовано величини є залежними, обернене твердження не завжди вірне, тобто якщо дві величини залежні, то вони можуть бути як корельовані так і некорельовані.

Б) *Неперервні двовимірні випадкові величини*

Інтегральною функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) називають функцію $F(x,y)$, яка визначає для кожної пари чисел (x,y) ймовірність того, що X прийме значення менше x і одночасно Y прийме значення менше від y:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

Властивості інтегральної функції:

1) Значення інтегральної функції є в межах між нулем та одиницею
$$0 \le F(x,y) \le 1;$$
2) Інтегральна функція неспадна за кожним аргументом

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad y_2 > y_1.$$

3) Мають місце граничні співвідношення:

а) $F(-\infty, y) = 0$,

б) $F(x, -\infty) = 0$,

в) $F(-\infty, -\infty) = 0$,

г) $F(\infty, \infty) = 1$.

4) Інтегральна функція системи, коли $y = \infty$, стає інтегральною функцією складової X: $F(x, \infty) = F_1(x)$. І навпаки, коли $x = \infty$ – інтегральною функцією складової Y: $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Ймовірність попадання випадкової точки в півполосу дорівнює приросту інтегральної функції за одним із аргументів:

$$P(x_1 < X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y),$$
$$P(X < x, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

Ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \left[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)\right] - \left[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right]$$
.

Диференціальною функцією розподілу $f(x, y)$ двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) називають другу змішану частинну похідну від інтегральної функції:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y}.$$

Знаючи диференціальну функцію легко записати інтегральну

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dxdy.$$

Властивості диференціальної функції:

а) диференціальна функція невідємна: $f(x, y) \geq 0$;

б) подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Знайдемо диференціальну функцію $f_1(x)$ складової X. Позначимо через $F_1(x)$ інтегральну функцію складової X. За визначенням $f_1(x)=\dfrac{dF_1(x)}{dx}$. Так як $F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy$, продиференціюємо за змінною x, матимемо: $f_1(x)=\dfrac{dF_1(x)}{dx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$.

Аналогічно знаходиться диференціальна функція складової Y:

$$f_2(y)=\frac{dF_2(y)}{dy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

Приклад 4. Двовимірна випадкова величина (X,Y) задана диференціальною функцією

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

Знайти диференціальні функції складових X та Y.

Розв'язання. Знайдемо диференціальну функцію складової X:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}dy=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}.$$

Отже, $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

Аналогічно можна знайти функцію $f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$

1) Умовні закони розподілу складових системи неперервних випадкових величин. Нехай (X,Y) – неперервна двовимірна випадкова величина. *Умовною диференціальною функцією* $\varphi(x\,|\,y)$ складової X при заданому значенні $Y=y$ називають відношення диференціальної функції $f(x,y)$ до диференціальної функції $f_2(y)$ складової Y:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Зауважимо, що відмінність умовної функції $\varphi(x \mid y)$ від безумовної $f_1(x)$ полягає в тому, що $\varphi(x \mid y)$ дає розподіл X, за умови що складова Y прийняла значення $Y = y$; функція же $f_1(x)$ дає розподіл X незалежно від того, які значення прийняла складова Y.

Аналогічно визначається умовна диференціальна функція складової Y, за умови що складова X прийняла значення $X = x$:

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Якщо відома диференціальна функція $f(x, y)$, то умовні диференціальні функції складових знаходяться за формулами:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx}; \qquad \psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy}.$$

2) Умовні математичні сподівання. Умовні математичне сподівання визначаються за формулами:

$$M(X \mid Y = y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x \mid y)\,dx;$$

$$M(Y \mid X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot \psi(y \mid x)\,dy.$$

Твердження. Для того щоб випадкові величини X та Y були незалежними необхідно і достатньо щоб інтегральна функція системи дорівнювала добутку інтегральних функцій складових, тобто:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Наслідок. Для того щоб неперервні випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно і достатньо щоб диференціальна функція системи дорівнювала би добутку диференціальних функцій складових:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

3) **Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції**. Кореляційний момент для неперервних випадкових величин визначається:

$$\mu_{xy} = M\left[(X - M(X))\cdot(Y - M(Y))\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))\cdot(y - M(Y))\cdot f(x,y)\,dxdy.$$

Кореляційний момент для незалежних випадкових величин дорівнює нулю. Коефіцієнт кореляції визначається:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

Приклад 5. Двовимірна випадкова величина (X,Y) задана диференціальною функцією

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Довести, що X та Y залежні некорельовані величини.

Розв'язання. Користуючись раніше знайденими диференціальними функціями $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ $f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y| \le 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$ робимо висновок що $f(x,y) \ne f_1(x)\cdot f_2(y)$, тому X та Y залежні величини.

Щоб довести некорельованість X та Y досить показати що $\mu_{xy} = 0$.

Знайдемо кореляційний момент за формулою

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))\cdot(y - M(Y))\cdot f(x,y)\,dxdy.$$

Оскільки $M(X) = 0$ (як інтеграл від непарної функції за симетричним проміжком), так само $M(Y) = 0$, то

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,y)\,dxdy = f(x,y)\int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} xdx\right)dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 0 = 0.$$

Отже, залежні величини в нашому прикладі некорельовані.

Таким чином, із корельованості двох випадкових величин випливає їх залежність, проте із залежності ще не випливає корельованість. Їз незалежності двох величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості не випливає їх незалежність.

Вправи

Завдання 1. Розв'язати задачі (***Алгебра подій***. ***Класична схема***).

1. Нехай A, B, C – випадкові події. З'ясувати зміст рівностей:
   а) $ABC = B$,
   б) $A + B + C = B$.
2. В яких випадках можливі рівності:
   а) $A + B = A$,
   б) $A + B = \overline{A}$,
   в) $A + B = AB$,
   г) $AB = A$,
   д) $AB = \overline{A}$?
3. Робітник обслуговує три автоматичні станки. Нехай A_1, A_2, A_3 – події, які полягають у тому, що відповідно перший, другий та третій станки потребують уваги робітника протягом години. Що означають події:
   а) $A_1A_2A_3$,
   б) $A_1 + A_2 + A_3$,
   в) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,
   г) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$,
   д) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,
   е) $A_1 + A_2 + A_3 - A_1A_2A_3$?
4. В ящику 25 деталей, із них 10 пофарбованих. Яка ймовірність вийняти з ящика пофарбовану деталь?

5. Учасники жеребкування тягнуть із ящика жетони з номерами від 1 до 50. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання взятого жетона не містить цифри 0.
6. Яка ймовірність витягнути з колоди в 36 карт: а) туза чорної масті, б) дві одночасно взяті карти однакової масті?
7. Випадково вибрана кісточка доміно виявилась дублем. Яка ймовірність того, що другу також взяту навмання кісточку доміно можна приставити до першої?
8. Куб, усі грані якого пофарбовані, розрізано на 125 рівних кубиків. Отримані кубики добре перемішують. Визначити ймовірності подій:
   а) навмання взятий кубик має одну пофарбовану грань,
   б) навмання взятий кубик має дві пофарбовані грані,
   в) три грані вийнятого кубика пофарбовані.
9. Із повного набору кісточок доміно (28 шт.) навмання беруть 5. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б одна з шістьма очками?
10. Із повного набору кісточок доміно навмання беруть одну. Яка ймовірність того, що сума очок на ній дорівнює 8?
11. Серед 100 виробів даної партії є 5 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед 10 випадково взятих виробів є не більше одного бракованого.
12. Трьом радіостанціям дозволена робота на довільній із трьох заданих частот. Знайти ймовірності подій:
    а) всі радіостанції працюють на різних частотах,
    б) дві радіостанції працюють на однакових частотах, а третя на іншій.
    Вважати всі можливі вибори частот радіостанціями рівноможливими.
13. Троє спортсменів здійснюють по одному пострілу в мішень. Ймовірності влучення першого, другого і третього відповідно дорівнюють $0,6; \quad 0,7; \quad 0,8$. Знайти ймовірність подій:
    а) тільки один спортсмен влучить у ціль;
    б) два спортсмени влучать у ціль;
    в) три спортсмени влучать у ціль;
    г) хоча б один спортсмен влучить у ціль;
    д) жоден спортсмен не влучить у ціль.
14. На перший день нового семестру за розкладом планується три лекції з 10 різних предметів. Студент не ознайомився з розкладом і намагається його вгадати. Яка ймовірність успіху в даному експерименті, якщо вважати, що будь-який розклад з трьох предметів рівноможливий?

15. У під'їзді будинку встановлено замок з кодом. Двері відчиняються автоматично, якщо в певній послідовності набрати 3 цифри із 10. Невідомий, не знаючи коду, навмання почав набирати різні комбінації з трьох цифр. На кожну спробу витрачається 20 с. Яка ймовірність того, що йому вдасться відкрити двері протягом однієї години?
16. 10 чоловіків і 10 жінок випадковим чином групуються попарно. Знайти ймовірність того, що кожна з 10 пар складається з осіб різної статі.
17. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 людей припадають на різні місяці року.
18. Серед 50 виготовлених шестерень 4 нестандартні. Перші 8 штук, відібрані для контролю, виявились стандартними. Визначити ймовірність того, що взята навмання наступна шестерня буде:
    а) стандартною,
    б) нестандартною.
19. На складі зберігається 1000 акумуляторів. Відомо, що після року зберігання 100 шт. виходить із ладу. Знайти ймовірність того, що:
    а) взятий навмання акумулятор після року зберігання виявиться добрим;
    б) взятий навмання після року зберігання акумулятор добрий, коли відомо, що після 5 місяців зберігання вилучили 20 шт. акумуляторів, які вийшли з ладу.
20. В урні містяться кольорові кульки: 40 червоних, 26 коричневих, 22 чорних і 12 синіх. Яка ймовірність витягти з урни червону або синю кульку?
21. Із колоди в 32 карти витягують навмання 10 карт. Знайти ймовірність того, що серед них будуть 8 однакової масті.
22. У ремонтну майстерню прийняли 15 телевізорів. Відомо, що для 6 з них потрібне загальне регулювання. Майстер бере навмання перші 5 телевізорів. Яка ймовірність того, що двом із них потрібне загальне регулювання?
23. Телефонний номер складається з п'яти цифр. Знайти ймовірність того, що всі цифри різні.
24. У стародавній грі в кісточки необхідно було для виграшу отримати суму очок, більшу десяти, при киданні трьох кісточок. Знайти ймовірності:
    а) випадання 11 і 12 очок;
    б) виграшу.

Завдання 2. Розв'язати задачі (***Геометричні ймовірності***).

1. На площині проведені паралельні прямі, які віддалені одна від одної на відстань 10 см. Знайти ймовірність того, що круг радіусом 2 см, кинутий на цю площину, не перетне жодної лінії.
2. На паркет, складений із правильних трикутників зі стороною 12 см, випадково впала монета радіусом 1 см. Знайти ймовірність того, що монета не перетне межу жодного з трикутників.
3. Стержень довжиною L розпиляли на три куски довільним чином. Яка ймовірність того, що з отриманих кусків можна скласти трикутник?
4. *Парадокс Бертрана*. У крузі радіусом R випадково проводиться хорда. Позначимо через ξ її довжину. Знайти ймовірність $P(\xi > R)$ того, що довжина хорди більша сторони правильного вписаного шестикутника, якщо:
   а) середина хорди рівномірно розподілена в крузі;
   б) напрям хорди задано, а її середина рівномірно розподілена на діаметрі, який перпендикулярний до її напрямку;
   в) один кінець хорди закріплений, а другий рівномірно розподілений на колі.
5. У точці C, положення якої на телефонній лінії AB довжиною 10 км рівноможливе, відбувся розрив. Знайти ймовірність того, що точка C віддалена від точки A на відстань, яка не менша від 3 км.
6. Супутник Землі рухається за орбітою, яка знаходиться між 60^0 північної та 60^0 південної широти. Вважаючи однаково можливим падіння супутника в будь-яку точку поверхні Землі між вказаними паралелями, знайти ймовірність того, що супутник впаде вище 30^0 північної широти.
7. На колі взято будь-які три точки A, B, C. Знайти ймовірність того, що трикутник ABC гострокутний.
8. На перехресті встановлено автоматичний світлофор, в якому 1 хв. включене зелене світло, 10 с. жовте, потім 1 хв. червоне, далі 10 с. жовте, знову 1 хв. зелене і т.д. У випадковий момент часу до світлофора під'їжджає автомобіль. Яка ймовірність того, що він проїде через перехрестя без зупинки?

9. У квадраті зі стороною 10 см навмання вибирається точка. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до найближчої сторони перевищує 2 см?
10. На поверхні кулі радіусом 5 см навмання вибираються дві точки. Яка ймовірність того, що їх можна з'єднати (на поверхні кулі) ниткою завдовжки π?
11. Всередині квадрата зі стороною 6 см навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що відстань від неї до точки перетину діагоналей квадрата не перевищує 2 см.
12. У кубі зі стороною 10 см навмання вибирається точка. Яка ймовірність того, що відстань від неї до фіксованої вершини куба буде менша ніж
2 см?
13. Задано рівняння $x^2 + ax + b = 0$. Відомо, що $0 \le a \le 1$ і $0 \le b \le 1$, причому ймовірність попадання кожної з точок a і b у вказані інтервали пропорційна довжині інтервалу і не залежить від його розміщення відносно відрізка $[0;1]$. Знайти ймовірність того, що задане рівняння має:
    а) дійсні,
    б) комплексно - спряжені корені.
14. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії стався розрив проводу. Яка ймовірність того, що цей розрив є між 50-м і 55-м кілометрами лінії?
15. З 9 до 11 години лікар чекає двох пацієнтів: молодого чоловіка і старшу пані. Яка ймовірність того, що комусь із них доведеться чекати в приймальні, якщо вони прийдуть у випадковий момент часу вказаного проміжку, причому прийом пані триває 1 годину, а молодого чоловіка − 15 хв?

Завдання 3. Розв'язати задачі (***Теореми додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності та формула Бейєса***).

1. Є три однакові коробки. У першій коробці 10 білих і 5 чорних кульок, у другій – 8 білих і 8 чорних кульок, а в третій – 2 зелені і 4 чорні. Навмання вибирається коробка і кулька в ній. Знайти ймовірність того, що:
    а) взята кулька біла;
    б) взята кулька чорна.

2. Два автомати штампують деталі, які надходять на загальний конвеєр. Ймовірність штамповки нестандартної деталі першим автоматом $0{,}075$, другим – $0{,}09$. Продуктивність першого автомата вдвоє менша, ніж другого. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь нестандартна.
3. У складальний цех заводу надходять деталі з трьох автоматів. Перший автомат дає 3% браку, другий – 1%, третій – 2%. Визначити ймовірність витягнення стандартної деталі, якщо з кожного автомата надійшло в цех відповідно 500, 200 і 300 деталей.
4. У першій урні 2 білі і 4 чорні, у другій – 3 білі і 1 чорна кульки. Із першої урни переклали в другу дві кульки. Яка ймовірність вийняти білу кульку з другої урни після перекладання?
5. В ящику 20 футбольних м'ячів, серед них 12 нових і 8 вже використовуваних. Із ящика беруть два м'ячі для гри і повертають після гри знову в ящик. Знайти ймовірність взяти навмання два нові м'ячі для наступної гри з цього ящика.
6. Перевіряється партія виробів, серед яких 5% бракованих. При перевірці бракований виріб виявляється з ймовірністю $0{,}9$, а добрий – бракується з ймовірністю $0{,}05$. Нехай виріб забракований у процесі перевірки. Яка ймовірність того, що він дійсно бракований?
7. Стрілець A влучає в мішень при певних умовах з ймовірністю $p_1 = 0{,}6$, стрілець B – з ймовірністю $p_2 = 0{,}5$, а стрілець C – з ймовірністю $p_3 = 0{,}4$. Стрільці зробили залп у ціль, причому зафіксовано два влучення. Що ймовірніше: стрілець C влучив у мішень чи ні?
8. Із заготовленої під посів пшениці зерна першого сорту 40%, другого – 50%, третього – 10%. Ймовірність того, що зійде зерно першого сорту, дорівнює $0{,}8$, другого – $0{,}5$, третього – $0{,}3$. Знайти ймовірність того, що зійде навмання взяте зерно.
9. Проводяться вистріли в мішені трьох типів – A, B, C. Причому кількості цих мішеней відносяться як $5:3:2$ відповідно. Ймовірність влучення в мішень типу A дорівнює $0{,}4$, типу B – $0{,}1$, типу C – $0{,}15$. Знайти ймовірність влучення в мішень при одному пострілі, якщо невідомо наперед, в яку з мішеней зроблено постріл.

10. Ймовірність двом близнятам бути хлопчиками рівна $0,32$, дівчатками – $0,28$. Вважаючи, що події: перша дитина хлопчик, а друга – дівчинка; перша дитина дівчинка, а друга – хлопчик – рівноможливі, знайти безумовні ймовірності народження:
   a) хлопчика;
   b) дівчинки.
11. Брак у продукції заводу внаслідок дефекту A складає 4%, а внаслідок дефекту B – $3,5\%$. Якісна продукція заводу складає 95%. Знайти ймовірність того, що:
   а) серед продукції, що не має дефекту A, зустрінеться дефект B;
   б) серед забракованої продукції за ознакою A зустрінеться дефект B.
12. Брак у продукції внаслідок дефекту A складає 5%, причому серед забракованих за ознакою A продукції в 10% випадків зустрічається дефект B, а в продукції, що не має дефекту A, дефект B зустрічається в 1% випадків. Знайти ймовірність не зустріти дефект B у всій продукції.
13. У продажу є телевізори трьох заводів: 20% телевізорів першого заводу, 30% – другого заводу, 50% – третього. Продукція першого заводу має прихований дефект з ймовірністю $0,09$, другого заводу – з ймовірністю $0,08$, а третього – $0,07$. Яка ймовірність того, що куплений телевізор має прихований дефект і він виготовлений на першому заводі?
14. Для участі в студентських спортивних змаганнях відібрали з першої групи курсу 4, з другої – 6, із третьої – 5 студентів. Ймовірності того, що студент першої, другої і третьої групи потрапить у збірну університету, відповідно рівні $0,9;\quad 0,7;\quad 0,8$. Навмання взятий студент у результаті змагань потрапив у збірну. До якої групи найімовірніше належав цей студент?
15. Перший автомат видає 80%, а другий – 20% однотипних деталей. На першому автоматі брак становить 1%, на другому – 4%. Дві перевірені деталі, виготовлені одним і тим же автоматом, виявились браковані. Знайти ймовірність того, що ці деталі виготовлені першим автоматом.
16. Два заводи виготовляють однакові реактиви, причому 8% пачок першого і 6% другого заводу мають більшу від допустимої кількість домішок. На складі є 200 пачок реактивів першого заводу і 300 пачок другого заводу. Яка ймовірність того, що навмання взята пачка реактивів виявиться

доброю? Знайти, у цьому випадку, ймовірність того, що ця пачка виготовлена на першому заводі.

17. У групі є два відмінники, 10 добрих студентів та 13 посередніх. На екзамені відмінники можуть отримати тільки „5”, добрі студенти „4” і „5” з однаковою ймовірністю, а посередні – „4”, „3”, „2” теж з однаковою ймовірністю. Викликається навмання один студент. Яка ймовірність того, що він отримає не нижче „4”?
18. Готуючись до екзамену з теорії ймовірностей, студент із n екзаменаційних білетів вивчив тільки $m\,(m<n)$. В якому випадку ймовірність витягнути вивчений білет буде більшою:
    а) коли він тягне білет першим;
    б) коли він тягне білет другим?
19. Із трамвайного парку у випадковому порядку виходять 5 трамваїв першого маршруту і 7 трамваїв другого маршруту. Знайти ймовірність того, що трамвай, який вийшов на лінію другим, за чергою буде маршрутом №1.
20. У коробці є дві зовні однакові гральні кісточки: одна правильна, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; друга неправильна, з нерівномірним розподілом маси. При киданні неправильної кісточки шість випадає з ймовірністю $\dfrac{1}{3}$, одиниця – з ймовірністю $\dfrac{1}{9}$, а решта цифр випадають з однаковими ймовірностями. Навмання вибирається з коробки кісточка і підкидається. Випало 6 очок. Яка ймовірність того, що було підкинуто правильну кісточку?
21. З повного набору кісточок доміно навмання беруть одну за одною дві кісточки. Знайти ймовірність того, що другу кісточку можна прикласти до першої.
22. Пасажир аерофлоту може придбати квиток в одній із трьох кас попереднього продажу. Ймовірності звертання в кожну касу залежать від їх місця розташування і відповідно рівні $0,2;\ 0,5;\ 0,3$. Ймовірність того, що квитки на потрібний напрям розпродані, у кожній касі відповідно рівні $0,4; 0,6; 0,7$. Пасажир купив квиток. Яка ймовірність того, що він купив квиток в першій касі?

Завдання* 4.** Розв’язати задачі (Повторні випробування***).

1. Монету підкинули 8 разів. Яка ймовірність того, що герб випаде 3 рази?
2. Монету підкинули 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде:
   а) менше ніж два рази;
   б) не менше двох разів.
3. Футболіст забиває м'яч у ворота противника з одинадцятиметрового удару з ймовірністю $0,9$. Яка ймовірність забити йому із 4 призначених штрафних ударів не менше 3 м'ячів?
4. Схожість насіння 90%. Для досліду відібрано 10 насінин. Знайти ймовірність того, що зійде не менше 8 насінин.
5. Проведено 10 незалежних випробувань, які полягають у підкиданні двох гральних кісточок. Яка ймовірність того, що в 4-х випробуваннях випаде по 6 очок на кожній кісточці?
6. Скільки разів потрібно підкинути гральну кісточку, щоб найімовірніше число випадання трійки дорівнювало 25 ?
7. При складанні механізмів у середньому 2% з них отримують дефекти. Контролер перевірив 6 навмання взятих механізмів. Яка ймовірність того, що: а) серед взятих механізмів немає з дефектом; б) два механізми мають дефекти.
8. При встановленому технологічному процесі проходить в середньому 10 обривів нитки на 100 веретенах за годину. Знайти ймовірність того, що протягом години на 80 веретенах буде від 6 до 8 обривів нитки (включно).
9. Монету підкинули 20 разів. Знайти найімовірніше число появ герба.
10. На факультеті 730 студентів. Ймовірність народження кожного студента в даний день дорівнює $1/365$. Знайти найбільш імовірне число студентів, які народилися 1 січня, та ймовірність того, що знайдуться три студенти з одним і тим же днем народження.
11. Проведено 400 незалежних випробувань з ймовірністю появи події в кожному $0,2$. Знайти ймовірність того, що подія наступить 104 рази.
12. При штампуванні автомобільних крил отримується 5% браку. Знайти ймовірність того, що з виготовлених 475 крил якісними будуть: 1) 400 крил; 2)від 400 до 450 крил.

13. У середньому вважається, що лівші складають 1% населення. Які шанси на те, що серед 200 людей: 1) виявиться рівно четверо лівшів; 2)знайдеться четверо лівшів.
14. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі $0,75$. Знайти ймовірність того, що в 100 пострілах буде не менше 70 влучень.
15. Ймовірність того, що пара взуття взята із партії вищого сорту, дорівнює $0,4$. Яка ймовірність того, що із 600 пар взуття, взятих для контролю, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого сорту?
16. При штампуванні шайб 4% виявляються бракованими. Скільки шайб потрібно взяти, щоб з імовірністю $0,99$ можна було очікувати, що серед них частка бракованих за абсолютною величиною відрізняється від 4% не більше ніж на 1%?
17. На керамічному заводі 90% чайних сервізів виявляються відмінної якості. Відділ технічного контролю перевіряє 600 сервізів. Яке граничне відхилення (за абсолютною величиною) числа сервізів відмінної якості від найбільш імовірного числа їх можна гарантувати з ймовірністю $0,99$?
18. Ймовірність пошкодження кінескопа при перевезенні $0,001$. Знайти ймовірність пошкодження двох і більше кінескопів при перевезенні партії з 5000 штук.
19. Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань дорівнює $0,75$. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на $0,01$.
20. Скільки разів треба підкинути монету, щоб з ймовірністю $0,6$ можна було очікувати, що відхилення відносної частоти появи герба від ймовірності появи його в одній спробі виявиться за абсолютною величиною не більше $0,01$?
21. Ймовірність запізнення студента в понеділок на першу пару $0,02$. Знайти найбільш імовірне число студентів, які спізнились у понеділок на першу пару, із 855 студентів.
22. Ймовірність народження хлопчика $0,515$. Яка ймовірність того, що серед 1000 новонароджених буде 520 хлопчиків?

23. У кожний танк випускають одночасно не більше одного снаряда і перестають стріляти, як тільки він підбитий. Ймовірність знешкодження танка при одному пострілі з протитанкової гармати, що робить 12 пострілів за хвилину, дорівнює $0,15$. Скільки потрібно гармат, щоб ймовірність знешкодити всі 20 танків противника протягом трьох хвилин була більшою від $0,9$?

24. У взуттєвому магазині 20% покупців купують взуття 42 розміру. Протягом дня в середньому магазин продає 750 пар взуття. Знайти ймовірність того, що магазин продає щодня більше 120 пар взуття 42 розміру.

25. Ймовірність виготовлення бракованого підшипника дорівнює $0,02$. Підшипники вкладають в ящики по 100 штук. Знайти ймовірність того, що: 1) у довільному ящику немає бракованих підшипників; 2)кількість бракованих підшипників не більша 3; 3) скільки потрібно класти в ящик підшипників, щоб з імовірністю не меншою $0,9$ в ньому було не менше 100 якісних підшипників.

Завдання 5. Розв'язати задачі (***Дискретні і неперервні випадкові величини та закони їх розподілу***).

1. Мисливець стріляє в дичину до першого влучення, але встигає зробити не більше чотирьох пострілів. Скласти закон розподілу числа пострілів, якщо ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює $0,7$.
2. Записати закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа очок, які випали при підкиданні гральної кісточки, – та знайти математичне сподівання цього розподілу.
3. Ймовірність того, що в бібліотеці необхідна для студента книга вільна, рівна $0,4$. Скласти закон розподілу числа бібліотек, які відвідає студент, якщо в місті чотири бібліотеки.
4. Маємо п'ять ключів, із яких тільки один підходить до замка. Скласти закон розподілу числа спроб при відкриванні замка, якщо випробуваний ключ у наступних спробах: а) не бере участі; б) бере участь.

5. Записати функцію розподілу числа попадань у ціль, якщо зроблено 6 пострілів, а ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює $0,2$. Користуючись цією функцією, обчислити ймовірність того, що в ціль буде влучено не менше одного, але менше п'яти разів.
6. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини:

	x_i :	120	130	140	150	160
	p_i :	$0,2$	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,2$.

Обчислити:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення.

Нарисувати графік закону розподілу і показати на ньому обчислене математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

7. Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення – x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність $p_1 = 0,1$ можливого значення x_1, математичне сподівання $M(X) = 3,9$ і дисперсія $D(X) = 0,09$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.
8. Із 28 кісточок доміно випадково вибирається одна. Записати закон розподілу суми очок на її половинках.
9. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X :

x_i :	3	5	6	7
p_i :	$0,1$	$0,3$	$0,4$	....

Знайти числові характеристики цього розподілу.

10. Робітник обслуговує чотири станки. Ймовірності того, що кожен із станків потребує уваги робітника, відповідно дорівнюють $0,7; 0,75; 0,8; 0,9$. Побудувати ряд розподілу числа станків, які не потребують уваги робітника, та знайти математичне сподівання і дисперсію отриманого розподілу.
11. Гральну кісточку підкинули 3 рази. Написати закон розподілу числа появ шістки.
12. Текст обсягом у 1000 сторінок машинописного тексту містить 1000 помилок. Знайти ймовірність того, що навмання взята сторінка містить 2 помилки.

13. У партії 10 деталей, з них 8 стандартних. Навмання взяли 3 деталі. Записати закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних.
14. Три стрільці зробили залп у мішень з імовірностями влучення відповідно $0,6$; $0,7$; $0,8$. Записати закон розподілу числа влучень та знайти найімовірніше число влучень.
15. Два баскетболісти кидають почергово м'яч у корзину до першого влучення, причому перший починає першим кидання. Записати закон розподілу числа кидань обома спортсменами, якщо їх ймовірності влучення в корзину відповідно дорівнюють $0,6$; $0,7$.
16. Середній студент отримує оцінку „3” і „4” з імовірністю $0,4$, а оцінку „2” і „5” з імовірністю $0,1$. Побудувати ряд розподілу величини X – оцінки, отриманої студентом, – та знайти математичне сподівання і дисперсію цього розподілу.
17. На шляху автомобіля 4 світлофори. Кожен із них з імовірністю $0,5$ або забороняє, або дозволяє подальший рух. Записати закон та функцію розподілу ймовірностей числа світлофорів, які авто проїде без зупинки.
18. В урні знаходиться 15 білих і 5 чорних кульок. Навмання виймають 3 кульки. Нехай X – число білих кульок серед вийнятих. Знайти розподіл випадкової величини X, функцію розподілу $F(X)$ та $M(X)$.
19. Проводяться три незалежні досліди, в кожному з яких подія A відбувається з імовірністю $0,4$. Нехай X – число появ подій у цих дослідах. Побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу, функцію розподілу, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.
20. Задана густина ймовірності випадкової величини X:

$$f(X) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ 4x^3, & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу (функцію розподілу ймовірності) та ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу $(0,5;1)$.

21. Густина розподілу ймовірності випадкової величини X задана формулою $f(x)=\dfrac{a}{e^{-x}+e^{x}}$ на всій числовій осі. Знайти сталий параметр a.

22. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(X)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0, \\ (1-\cos x)/2, & \text{при} \quad 0<x\le \pi, \\ 1, & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Знайти диференціальну функцію $f(x)$ та ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $(0;\pi/2)$.

23. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, яка задана функцією розподілу

$$F(X)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0, \\ 2x, & \text{при} \quad 0<x\le 0,5, \\ 1, & \text{при} \quad x>0,5. \end{cases}$$

24. Густина розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & \text{при} \quad x\ge 1, \\ 0, & \text{при} \quad x<1. \end{cases}$$

Знайти сталу C, густину розподілу величини $\eta=\ln\xi$, $P(0,5<\eta<0,75)$.

25. Випадкова величина ξ задана законом розподілу:

	ξ_i $\quad -\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
	p_i $\quad 0,1$	$0,2$	$0,5$	$0,2$

Знайти закон розподілу випадкових величин $\eta=\sin\xi$, $\chi=3\xi^2$.

26. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[1;2]$. Знайти ймовірність $P(2<\xi^2<5)$.

27. Випадкова величина ξ має показниковий закон розподілу з параметром λ. Знайти густину розподілу випадкової величини $\eta=\dfrac{1}{\lambda}\ln\xi$.

28. Ріст студентів вузу є випадковою величиною, яка розподілена за нормальним законом розподілу з математичним сподіванням 170 см та дисперсією 36. Знайти густину ймовірності і функцію розподілу цієї випадкової величини. Обчислити ймовірність того, що хоча б один із навмання взятих чотирьох студентів має ріст від 168 до 172 см.

29. Нехай межа міцності стального дроту діаметром $1,4$ мм є нормально розподіленою випадковою величиною X з математичним сподіванням 160 кг/мм^2 і середнім квадратичним відхиленням 8 кг/мм^2. Потрібно:

    а) знайти диференціальну та інтегральну функцію розподілу;

    б) знайти ймовірність того, що величина X прийме значення з інтервалу $(155;170)$;

    в) визначити, яке граничне відхилення межі міцності від математичного сподівання можна гарантувати з ймовірністю $0,9901$.

30. Жирність молока корів ферми (у відсотках) є нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $3,8\%$ і дисперсією $0,0225$. Написати диференціальну та інтегральну функцію розподілу. Яка ймовірність того, що навмання взяте молоко для оцінки має жирність від $3,6\%$ до 4%?

31. Відсоток золи у вугіллі є нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням 16% і середнім квадратичним відхиленням 4%. Визначити ймовірність того, що в навмання взятій пробі вугілля буде від 12 до 24 % золи.

32. Точка навмання кинута всередину круга радіусом R. Ймовірність попадання точки в довільну область, яка розміщена всередині круга, пропорційна площі області. Записати функцію розподілу, знайти математичне сподівання і дисперсію відстані точки до центра круга.

33. Випадкова величина X – помилка вимірювального приладу – розподілена за нормальним законом з дисперсією 16 мк. Систематичні помилки приладу відсутні. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних вимірах помилка X:

    а) більша за модулем 6 мк не більше трьох разів;

    б) хоча би один раз виявиться в інтервалі $0,5-3,5$ мк.

34. Випадкова величина X має густину ймовірності (закон Коші)

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}.$$

Потрібно:

а) знайти коефіцієнт a і функцію розподілу $F(x)$;

б) знайти ймовірність нерівності $x > \sqrt{3}$;

в) визначити математичне сподівання, моду і медіану цього розподілу.

35. Час T виявлення цілі радіолокатором підпорядкований показниковому розподілу. Знайти ймовірність того, що ціль буде виявлена за час від 5 до 15 с після початку пошуку, якщо середній час виявлення цілі 10 с.

36. Час T безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за показниковим законом. Відомо, що середній час роботи двигуна між технічним обслуговуванням 100 год. Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 год.

Завдання* 6.** Розв'язати задачі (Закон великих чисел***).

1) У деякому технологічному процесі 75% виробів має допуск $\pm 5\%$. З допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що серед 2000 виробів до цього допуску відноситься від 1450 до 1550 виробів включно.
2) Довжина деталей, які виготовляє робітник, є випадковою величиною і має середнє значення 5 см. Середнє квадратичне відхилення цієї величини рівне $0,2$ мм. Оцінити ймовірність того, що відхилення довжини виготовленої деталі від її середнього значення за абсолютною величиною не перевищить $0,4$ мм.
3) Середнє добове споживання електроенергії містом рівне 60000 кВт.год. Знайти ймовірність того, що споживання електроенергії не перевищить 250000 кВт.год.
4) Нехай випадкова величина X приймає тільки невід'ємні значення. Довести, що для довільних додатних чисел a і b справедлива нерівність
$$P(X \ge a) \le \frac{M(X^b)}{a^b}, \text{ якщо } M(X^b) \text{ існує.}$$
5) Послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ задана законом розподілу:

X_n:	a	$-a$
p:	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

Чи можна застосувати до даної послідовності теорему Чебишева?

6) В освітлювальну мережу паралельно ввімкнено 40 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде ввімкнена, дорівнює $0,6$. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час T виявиться меншою ніж 3.
7) Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює 1, а дисперсія – $0,03$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити знизу ймовірність події $A = (0,5 < X < 1,5)$.
8) Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[6;12]$. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що X відхиляється від математичного сподівання не більше ніж на 3, тобто оцінити $P(|X - M(X)| \leq 3)$.
9) Кожна із незалежних випадкових величин $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ може набувати лише два рівноможливі значення: $-n$, і n. Чи можна застосувати до неї закон великих чисел?
10) Статистична ймовірність народження дівчинки дорівнює $0,485$. Оцінити ймовірність того, що число дівчат серед 3000 новонароджених буде відрізнятися від математичного сподівання цього числа за абсолютною величиною не більше ніж на 55 людей.
11) Ймовірність того, що насінина зійде, дорівнює $0,85$. Скільки потрібно засіяти насінин, щоб з імовірністю, яка перевищує $0,999$, можна було стверджувати, що кількість насінин, які проросли, буде відрізнятися від математичного сподівання цього числа за абсолютною величиною не більше ніж на 300 штук?
12) Для оцінки середньої врожайності цукрових буряків на полі в 1500 гектарів вибрано випадковим чином по одному квадратному метру на кожному гектарі поля. З відібраних ділянок був зібраний урожай і на основі отриманих даних знайшли середню урожайність в центнерах з гектара. Визначити граничне відхилення вибіркової середньої від її математичного сподівання, яке можна гарантувати з ймовірністю, не меншою $0,8$. Дисперсія урожайності на кожному гектарі не перевищує 2500.

Завдання* 7.** Розв'язати задачі (Змішані задачі***)

1. Із колоди карт (36шт, чотири масті) виймають одну карту, фіксують її масть і повертають у колоду. Після перемішування карт знову виймають одну карту. Яка ймовірність того що друга вийнята карта тої ж масті що й перша?
2. В урні 2 білі і 4 чорні кульки. Із урни один за одним виймають усі кульки. Знайти ймовірність того, що остання вийнята кулька буде чорна.
3. Дитина бавиться десятьма буквами азбуки: А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. Знайти ймовірність того, що вона випадково складе слово МАТЕМАТИКА.
4. В лотереї 100 білетів. Серед них один виграш -100грн., три виграші по 50грн., шість виграшів по 20грн. і п'ятнадцять виграшів по 10грн. Знайти ймовірності: а) виграти не менше 50грн.; б) виграти не більше 50грн., якщо придбано один білет; в) отримати хоч якийсь виграш, якщо придбати три білети.
5. В урні 2 білі, 3 чорні, і 5 червоних кульок. Три кульки виймаються наугад. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих кульок хоча би дві будуть різного кольору.
6. (Задача Бюфона) Площина розграфлена паралельними прямими, які розміщені одна від одної на відстані L. Знайти ймовірність того, що наугад кинута голка довжиною l ($l<L$) перетне будь-яку пряму.
7. Ймовірність влучення стрільцем у десятку дорівнює $0,7$, а у дев’ятку – $0,3$. Знайти ймовірність того, що даний стрілець при трьох пострілах набере не менше 29 очок.
8. Проводяться послідовні випробування п’яти приладів на надійність. Кожний наступний прилад випробовується тільки у тому випадку, якщо попередній виявився ненадійним. Побудувати ряд розподілу числа випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати випробування для кожного із них дорівнює $0,9$.
9. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більше ніж три браковані, якщо браковані вироби займають 1%.
10. Систематична похибка витримати висоту літака $+20$ м, а випадкова похибка характеризується середнім відхиленням що дорівнює 50 м. Для польоту літака відведено коридор висотою 100 м. Яка ймовірність що літак буде летіти нижче, всередині і вище виділеного коридору, якщо літаку задана висота, яка відповідає середині коридору?

Завдання 8. Двовимірні випадкові величини.

1. Знайти закон розподілу складових дискретної двовимірної випадкової величини, яка задана законом розподілу

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

2. Знайти ймовірність того, що складова X двовимірної випадкової величини прийме значення $X < 0,5$ і складова Y прийме значення $y < \frac{1}{3}$, якщо відома інтегральна функція системи

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}3y + \frac{1}{2}\right).$$

3. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник, обмежений прямими $x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{2},\quad y = \frac{\pi}{6},\ y = \frac{\pi}{3}$, якщо відома інтегральна функція

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Знайти диференціальну функцію системи двох випадкових величин за відомою інтегральною функцією

$$F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) \quad (x \ge 0,\ y \ge 0).$$

5. Всередині прямокутника, обмеженого прямими $x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\quad y = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$, диференціальна функція системи двох випадкових величин $f(x, y) = C\sin(x + y)$. Поза межами прямокутника $f(x, y) = 0$. Знайти: а) величину C, б) інтегральну функцію системи.

6. Система двох випадкових величин розподілена рівномірно: в прямокутнику, який обмежений прямими $x = 4,\ x = 6,\quad y = 10,\ y = 15$ диференціальна функція зберігає постійне значення, поза межами цього прямокутника вона дорівнює нулю. Знайти: а) диференціальну функцію,

б) інтегральну функцію системи.

7. Диференціальна функція системи двох випадкових величин $f(x,y)=\dfrac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$. Знайти: а) величину C; б) інтегральну функцію системи.

8. Двовимірна випадкова величина задана диференціальною функцією $f(x,y)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}$.

Знайти умовні закони розподілу складових.

Завдання 9. Змішані задачі підвищеної трудності.

1. В повітряному бою між бомбардувальником і двома винищувачами стріляти починає бомбардувальник і здійснює по одному пострілу по винищувачах з ймовірністю влучення p_1. Якщо даний винищувач не збитий, то він незалежно від долі другого стріляє по бомбардувальнику і збиває його з імовірністю p_2. Знайти ймовірності подій: 1) збитий бомбардувальник; 2) збиті обидва винищувачі; 3) збитий хоча би один винищувач; 4) збитий хоча би один літак.

2. В урні дві білі і три чорні кульки. Два товариші почергово виймають із урни по одній кульці не повертаючи їх в урну. Виграє той, хто першим вийме білу кульку. Яка ймовірність того, що виграє перший?

3. Проводиться випробування приладу. При кожному випробуванні прилад виходить з ладу із ймовірністю p. Після першого виходу з ладу прилад ремонтується; після другого – визнається таким, що вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що прилад остаточно вийде з ладу при k – му випробуванні.

4. Залізничний потяг має n вагонів, кожен із яких з імовірністю p має дефект. Усі вагони оглядають, незалежно один від одного, два залізничники, перший із них виявить дефект з імовірністю p_1, другий – з імовірністю p_2. Якщо в жодному вагоні не виявлено дефекту, поїзд відправляється в рейс. Знайти ймовірність відправити в рейс потяг, в якому є хоча би один вагон з дефектом.

5. Два пароплави мають підійти до однієї пристані. Час підходу обох пароплавів випадковий протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному із пароплавів доведеться чекати звільнення пристані, якщо час стоянки першого пароплава 1 год., а другого – 2 год.

6. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше випаде герб. Знайти ймовірності виграшу кожного гравця.

7. Гравець А грає почергово з двома партнерами, імовірності виграшу для яких в першій партії дорівнюють відповідно $0,5$ і $0,6$ і збільшується після кожної зіграної партії на $0,1$. Перші дві партії виграв А. Знайти ймовірність виграшу А в третій партії, якщо невідомо, з якими партнерами була зіграна перша партія, а нічию виключаємо.

8. Швидкість молекул газу має густину ймовірності (закон Максвелла) $f(v) = Av^2 e^{-h^2v^2} \ (v \geq 0).$

Знайти математичне сподівання і дисперсію швидкості молекул, а також величину A при заданому h.

9. Система двох випадкових величин задана густиною розподілу $f(x, y) = \dfrac{A}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$. Знайти а) сталу A; б) функцію розподілу $F(x, y)$.

10. Визначити густину ймовірності системи трьох додатних випадкових величин (X, Y, Z) за функцією розподілу $F(x, y, z) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz}), \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$

11. В урну, яка містить n кульок, опустили білу кульку. Яка ймовірність вийняти після цього білу кульку, якщо всі припущення про попередній склад кульок за кольором рівноможливі?

12.

Відповіді

***До завдання* 1**

4. $0,4$. 5. $0,9$. 6. а) $0,056$, б) $0,229$. 7. $0,222$. 8. а) $0,432$, б) $0,288$, в) $0,064$. 9. $0,793$. 10. $0,107$. 11. $0,92$. 12. а) $0,222$, б) $0,666$. 13. а) $0,188$, б) 0,452, в) 0,334, г) $0,976$, д) $0,024$. 14. $0,166$. 15. $0,18$. 16. $0,006$. 17. $0,00005$. 18. а) $0,905$, б) $0,095$. 19. а) $0,9$, б) $0,918$. 20. $0,52$. 21. $1/58435$. 22. $0,42$. 23. $0,302$. 24. а) $0,125; 0,116$, б) $0,5$.

***До завдання* 2**

1. $0,6$. 2. $0,49$. 3. $0,25$. 4. а) $0,75$, б) $0,866$, в) $0,666$. 5. $0,7$. 6. $0,21$. 7. 0,5. 8. $0,5$. 9. $0,36$. 10. 0,1. 11. $0,349$. 12. $0,004$. 13. а) $0,083$, б) $0,917$. 14. $0,166$. 15. $0,859$.

***До завдання* 3**

1. а) $0,389$, б) $0,5$. 2. $0,085$. 3. $0,977$. 4. $0,611$. 5. $0,279$. 6. $0,489$. 7. С – влучив. 8. $0,6$. 9. $0,26$. 10. 1) $0,52$, 2) $0,48$. 11. а) $0,01$. 12. $0,9855$. 13. $0,077$; $0,234$. 14. до другої. 15. $0,2$. 17. 0,617. 18. ймовірності однакові. 19. $0,417$. 20. $0,25$. 21. $0,388$. 22. $0,29$.

***До завдання* 4**

1. $0,219$. 2. а) $0,109$, б) $0,891$. 3. $0,948$. 4. $0,987$. 5. $0,003$. 6. $[150;155]$. 7. а) $0,886$, б) $0,006$. 8. $0,427$. 9. 10. 10. $0,22$. 11. $0,0006$. 12. 1) 0, 2) $0,3974$. 13. 1) $0,09$, 2) $0,15$. 14. $0,8749$. 15. $0,6827$. 16. 2552. 17. 19. 18. $0,9596$. 19. $0,182$. 20. 1764. 21. 17. 22. $0,024$. 23. 5. 24. $0,996$. 25. 1) $0,14$, 2) $0,89$.

***До завдання* 5**

2. $3,5$. 5. $0,7363$.

10.

x_i:	0	1	2	3	4
p_i:	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

$M(X)=3,15;\quad D(X)=0,64$. 11.

x_i:	0	1	2	3
p_i:	125/216	75/216	15/216	1/216

12. $0,1839$. 20. $15/16$. 21. $2/\pi$. 22. $0,5$. 23. $M(X)=0,25, D(X)=1/48$. 24. $C=3$; $f_\eta(x)=3e^{-3x}(x\ge 0)$; $P(0,5<\eta<0,75)=0,12$. 26. $2-\sqrt{2}$. 28. $0,7$. 29. б) $0,6284$; в) $(139,4;\ 180,6)$. 31. $0,8186$. 32. $F(r)=\begin{cases} 0, & \text{при } r\le 0, \\ \left(\dfrac{r}{R}\right)^2, & \text{при } 0<r\le R, \\ 1, & \text{при } r>R. \end{cases}$

$M(X)=2R/3$, $D(X)=R^2/18$.

33. а) $0,9972$; б) $0,7773$. 34. а) $a=\frac{1}{\pi}$, $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x$; б) $\frac{1}{6}$; в) $M(X)=Mo(X)=Me(X)=0$. 35. $0,383$. 36. $0,45$.

До завдання 6

1. $0,85$. 2. $p\geq 0,75$. 3. $p\leq 0,24$. 10. $p>0,75$. 8. $\frac{2}{3}$. 11. $n<706$.

До завдання 7

1. $0,25$. 2. $2/3$. 3. 3!2!2!/10!. 4. а) 0,04; б) 0,99; в) $1-\frac{C_{75}^{3}}{C_{100}^{3}}\approx 0,58$. 5. 109/120.

6. x - відстань від середини голки до найближчої лінії, φ - кут між лінією і голкою. Можливі значення: $0\leq x\leq L/2$, $0\leq\varphi\leq\pi$; сприятливі значення: $x\leq\frac{l}{2}\sin\varphi$; $p=\frac{2l}{\pi L}$. 7. $0,784$.

8.

x_i:	1	2	3	4	5
p_i:	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

9. $0,143$. 10. $p_1=0,1725$; $p_2=0,4846$; $p_3=0,3429$.

До завдання 8

1.

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	$0,22$	$0,29$	$0,49$

y_i	y_1	y_2
p_i	$0,40$	$0,60$

2. $P\left(X<\frac{1}{2},\ Y<\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{16}$. 3. $P\left(\frac{\pi}{4}<X<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}<Y<\frac{\pi}{3}\right)=0,11$.

4. $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=6e^{-(2x+3y)}$.

5. а) $C=0,5$;

б) $F(x,y)=0,5\left[\sin x+\sin y-\sin(x+y)\right]$ $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right).$

6. а) $f(x,y)=\begin{cases}0,1 & \textit{всередині прямокутника},\\ 0 & \textit{поза межами прямокутника},\end{cases}$

б) $F(x,y)=\dfrac{(x-4)(y-10)}{10}.$

7. а) $C=\dfrac{6}{\pi^2}$, б) $F(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{2}\right).$

8. $\varphi(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+1,5y)^2}$; $\quad\psi(x,y)=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}$.

До завдання 9

1.

$P_1=1-\left[1-(1-p_1)p_2\right]^2$; $P_2=p_1^2$; $P_3=1-(1-p_1)^2$; $P_4=1-(1-p_1)^2(1-p_2)^2$;

2. $P=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{5}.$

3. $P=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$

4. $P=1-\left[1-p(1-p_1)(1-p_2)\right]^n.$

5. $P=0,121.$

6. $P_1=\dfrac{2}{3}$, $P_2=\dfrac{1}{3}.$

7. $P_1=0,75.$

8. $A=\dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}},\quad M(v)=\dfrac{2}{h\sqrt{\pi}},\quad D(v)=\dfrac{1}{h^2}(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{\pi}).$

9. $A=20,\quad F(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}\right).$

10. $f(x,y,z)=abce^{-(ax+by+cz)}.$

11. $P(B_i)=\dfrac{1}{n+1},\quad P_{B_i}(A)=\dfrac{i+1}{n+1},(i=0,1,2,....n)\quad P(A)=\dfrac{n+2}{2(n+1)}.$

Розділ 14. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Прикладна математика розглядає в основному задачі про застосування математичних методів при вирішенні важливих виробничих проблем, це стосується в першу чергу задач оптимізації виробничих процесів.

Для постановки задачі оптимізації необхідно побудувати її математичну модель, тобто від задачі виробництва перейти до математичної задачі, абстрагуючись від конкретного змісту введених параметрів. У модель входить вибір (запис) функції (цільова функція), яка досліджується на оптимальність, та система обмежень (у вигляді рівностей чи нерівностей), яка описує реальний процес. Якщо в задачі оптимізації цільових функцій декілька, то кажуть, що це задача *багатокритеріальної оптимізації* або *управління.*

Наведемо приклад багатокритеріальної задачі. Конструкторське бюро проектує кооперативний 120–квартирний будинок з розрахунку задоволення таких умов:

1) максимально задовольнити запити жильців за кількістю кімнат;
2) планування квартир має бути таке, щоб було найменше прохідних кімнат;
3) максимальне виконання санітарно-гігієнічних норм;
4) затрати на проектування будинку мінімальні.

Наведена задача є чотирикритеріальна. Якщо в задачі оптимізації чи управління маємо повну інформацію про всі умови (немає випадковості), то такі задачі називаються *детермінованими*. Якщо ж у задачі є параметри, які мають випадковий характер з відомими імовірнісними характеристиками, то їх називають *стохастичними*. Наприклад, задача планування виробництва в умовах неповної інформації про реальну ситуацію постачання комплектуючих є стохастична задача управління.

Задачі оптимізації можна також поділити за принципом досягання екстремуму: чи екстремум досягається в ізольованих точках, чи на лініях, чи поверхнях. Якщо екстремум досягається в ізольованій точці або в достатньо малому околі точки, то такі задачі вивчаються в розділі методів оптимізації, які називаються *математичним програмуванням*. Клас задач, в яких екстремум досягається на лініях чи на поверхнях, вивчається в розділі “*варіаційне числення*”. Таким чином, задачі оптимізації поділяються на *задачі математичного програмування, варіаційного числення та задачі оптимального управління.*

Першочерговим завданням при побудові математичної моделі задачі є встановлення її класу, ступеня складності та конструктивних особливостей. Клас моделі визначається метою та специфікою задачі. Складність залежить від кількості врахованих факторів і характеру взаємозв’язків між ними.

Одним із основних напрямів моделювання є автоматизація процесу, після постановки задачі та побудови формальної схеми. Використання комп’ютерної техніки, на стадії побудови моделі, дає змогу оцінити різні варіанти та вибрати найбільш адекватний до реальної схеми.

Аналіз виробництва певного виду продукції дає змогу вивчити, як правило, декілька технологічних способів отримання цього продукту з використанням різноманітних взаємозамінних засобів виробництва. Природно, що різні варіанти плану вимагають неоднакових затрат і несуть у кінцевому підсумку неоднаковий економічний ефект. Якщо є обмеження на ресурси, то кращим буде той варіант, який забезпечує при цих ресурсах найвищий економічний ефект. Якщо ж задано результат виробництва, то найбільш ефективним вважається той варіант, який вимагає найменших затрат для досягнення цього результату. Виявлення найбільш ефективного (оптимального) плану – досить непросте завдання.

§ 1. Основи лінійного програмування

У практиці планування доводиться зупинятись лише на більш чи менш вдалих варіантах плану, не з’ясовуючи навіть, наскільки вони далекі від оптимальних. Одним із найбільш доступних, ефективних і перевірених на практиці методів розв’язування задач оптимального планування є лінійне програмування (ЛП).

Методами лінійного програмування часто розв’язують такі задачі:

а) задачі про складання раціону, який містить певний запас поживних речовин;
б) задачі розподілу обмеженого ресурсу добрив;
в) задачі складання розкладу;
г) транспортні задачі та ін.

Найбільш загальною моделлю визначення показників оптимального плану є загальна задача математичного програмування: знайти максимум або мінімум функції n змінних

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \max(\min) \qquad (1)$$

при виконанні нерівностей (в області допустимих розв'язків)

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq (\leq, =)\ b_j, \quad j = \overline{1, m} \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

де x_i – показники техніко-економічних характеристик плану (наприклад, обсяг випуску продукції); φ_j − функція, яка визначає величину j–го, який лімітує план, показника (витрати сировини, трудових ресурсів, робочого часу); b_j − величина j−го, що лімітує план, показника; f − оптимізована величина.

Якщо f, φ_j − лінійні функції своїх аргументів, то задача $(1-3)$ має назву задачі *лінійного програмування*. Варто зауважити, що в лінійному програмуванні від задачі на мінімум можна перейти до задачі на максимум і навпаки, змінивши коефіцієнти цільової функції на протилежні.

Задачу $(1-3)$ будемо вважати зведеною до канонічного вигляду, якщо це задача на знаходження максимуму цільової функції (це можна завжди зробити, виходячи з попереднього) і у (2) з нерівностей зроблено рівності за допомогою введення штучних змінних.

Найбільш розповсюдженим, універсальним методом розв'язку задач ЛП є *симплекс–метод*. Існують в ЛП і спеціальні методи, які враховують особливості математичної моделі задачі.

Розглянемо на прикладі, як формалізується задача, тобто як побудувати математичну модель для задачі виробництва.

Задача. Нехай для виробництва двох видів продукції A і B використовується матеріал трьох сортів. На виготовлення одиниці виробу виду A витрачається a_1 кг матеріалу першого сорту, a_2 кг матеріалу другого сорту і a_3 кг матеріалу третього сорту. На виготовлення одиниці виробу виду B необхідно затратити b_1 кг матеріалу першого сорту, b_2 кг матеріалу другого сорту, b_3 кг матеріалу третього сорту. Підприємство забезпечене матеріалом у кількості: c_1 кг – першого, c_2 кг – другого та c_3 кг – третього сорту. За одиницю виробу виду A підприємство має прибуток α грн., за одиницю виробу виду B – β грн. Скласти план виробництва продукції двох видів, який забезпечує підприємству максимальний прибуток від реалізації.

Схема побудови математичної моделі задачі. Нехай x_1, x_2 – кількості виготовленої продукції підприємством виду A та B відповідно. Тоді загальний прибуток від реалізації продукції складає $f = \alpha x_1 + \beta x_2$. Обмеження на запаси сировини приводять нас до нерівностей

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 \le c_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 \le c_2, \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 \le c_3. \end{cases}$$

Оскільки x_1 та x_2 – кількості виготовленої продукції, то $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Отже, задача виробництва зведена до задачі математичного програмування. Знайти максимум функції

$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 \ \to \max$,

при обмеженнях $\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 \le c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 \le c_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 \le c_3 \end{cases}$; $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Графічний метод розв'язання задачі ЛП. Графічний метод полягає в тому, що точку, в якій досягається максимум чи мінімум функції, знаходять графічно. Кожна нерівність системи обмежень дає, геометрично, півплощину. А перетин цих півплощин описує область допустимих значень (область розв’язків системи) Ω. У цій області шукаємо точку, в якій досягається екстремум. Для цього цільову функцію $f = a_1 x_1 + a_2 x_2$ прирівняємо до довільного значення h $(a_1 x_1 + a_2 x_2 = h)$, наприклад до нуля. Будуємо графік цієї прямої. Її називають *лінією рівня*. На цій лінії наша функція приймає значення h. Переміщаючи її паралельно самій собі, ввійдемо в область Ω. Перша і остання точки дотику лінії рівня, при її паралельному переміщенні, з областю Ω є точками, в яких функція досягає мінімуму та максимуму. Де саме мінімум, а де максимум – легко встановити тому, що вектор $\vec{n}(a_1;a_2)$ вказує напрям зростання функції.

Координати точки, де досягається екстремум, знаходять, розв'язавши систему двох рівнянь з двома невідомими (вершина перетину двох півплощин). Графічний метод використовують, як правило, при розв'язанні задач у двовимірному просторі. Для тривимірного простору такі задачі розв'язують рідко, оскільки побудова їх розв'язку незручна і мало наочна.

Приклад **1.** Три малі підприємства беруть участь у проміжному виробництві двох видів продукції A і B. На виготовлення одиниці виробу виду A перше підприємство затрачає 6 год., а друге і третє – по 5 годин. На виготовлення одиниці виробу виду B перше, друге і третє підприємства затрачають 8, 3 і 1 годину відповідно. При цьому виробництві перше підприємство може затратити не більше 480 год., друге – 150 год., третє – 100 год. Прибуток від реалізації кожного виду виробу складає 300 та 100 грн. відповідно. Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації.

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 – кількості виготовленої продукції видів A та B. Цільова функція (загальний прибуток) дорівнює $f = 300x_1 + 100x_2$. Запишемо обмеження для цієї задачі:

$$6x_1 + 8x_2 \le 480,\ 5x_1 + 3x_2 \le 150,\ 5x_1 + 1x_2 \le 100,\quad x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0.$$

Кожна із записаних нерівностей дає, геометрично, півплощину, перетин яких утворює область допустимих значень (ОДЗ) Ω (рис. 75). Масштаб вздовж осей координат OX та OY виберемо так, щоб зручно було бачити ОДЗ та розв'язок.

Нерівності $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ гарантують те, що ОДЗ розміщена в першій чверті. Зобразимо систему нерівностей як перетин півплощин, які описує ця система.

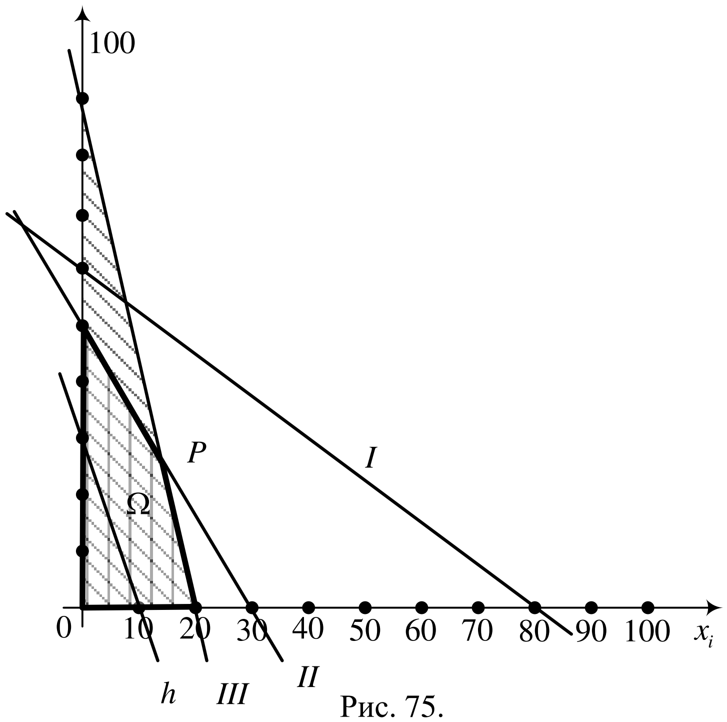


Рис. 75.

Побудуємо лінію рівня h, прирівнявши цільову функцію до довільного значення, наприклад до 3000:

$$300\,x_1 + 100\,x_2 = 3000.$$

Переміщаючи лінію рівня паралельно самій собі у бік збільшення значення цільової функції, бачимо, що максимальне значення функції досягається в точці P. Координати точки P шукаємо як перетин другої та третьої ліній (меж півплощин)

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 150 \\ 5x_1 + x_2 = 100 \end{cases}.$$

Розв'язок системи $x_1 = 15,\ x_2 = 25$.

Отже, $P(15; 25)$.

Знайдемо максимум функції

$$f_{\max} = f(P) = 300 \cdot 15 + 100 \cdot 25 = 7000 \text{ (грн.)}.$$

Отже, оптимальна програма передбачає виготовлення 15 одиниць продукції виду A та 25 одиниць виду B, що забезпечить виробникам максимальний прибуток 7000 грн.

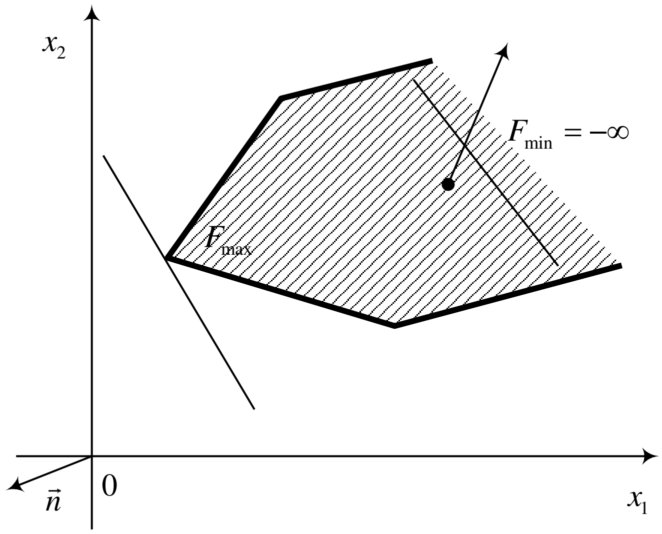


Рис. 76.

Слід зауважити, що область допустимих розв'язків Ω може бути порожньою, якщо система обмежень несумісна; одною точкою; випуклим многогранником або необмеженою випуклою многогранною областю. В останньому випадку цільова функція може мати екстремум (рис.76), а також може бути необмежена зверху чи знизу (рис.77).

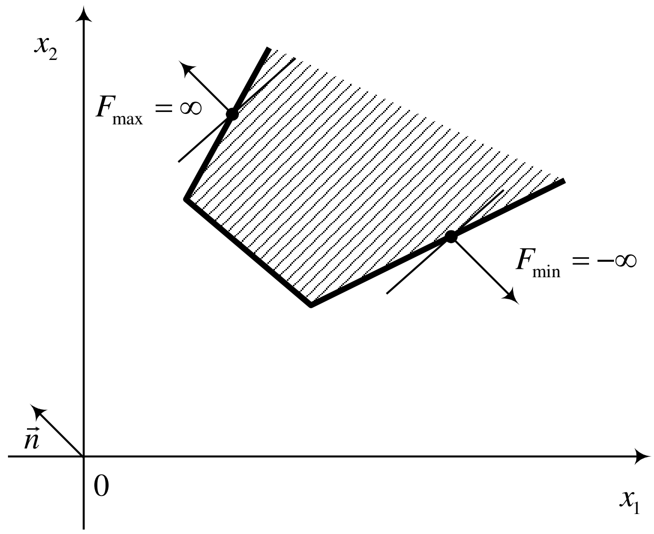


Рис. 77.

Вектор $\vec{n}$, що виходить із початку координат і має координатами коефіцієнти цільової функції, показує напрям зростання цільової функції та паралельного переміщення лінії рівня. Тому за цим напрямом легко бачити, в якій точці цільова функція має максимум, а в якій мінімум.

Вектор $\vec{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$, який задовольняє умови (2) і (3), називається *допустимим планом*, або *допустимим розв'язком*. Множина допустимих планів є випуклою областю. Допустимий план, що є крайньою точкою множини, називається *опорним планом*. Допустимий план, що перетворює в максимум (мінімум) цільову функцію, називається *оптимальним планом задачі*. Можна показати, що максимальне та мінімальне значення лінійна функція може приймати лише на краю обмеженої області.

Симплекс–метод розв'язку задач ЛП. Пропонований метод є найбільш поширеним універсальним вирахувальним методом, який може використовуватись при розв'язку задач ЛП як вручну, так і з допомогою ЕОМ.

Ідея цього методу полягає в послідовному русі базовими опорними планами (впорядкований перегляд вершин многогранника) в напрямку незменшення значення цільової функції. Повторне застосування процедури приведе в кінці кінців до плану, що відповідає оптимальному.

Розглянемо послідовно процес підготовки вихідних даних і алгоритм розв'язку табличним симплекс–методом. Якщо математична модель задачі записана у вигляді $(1-3)$, то попередньо необхідно:

1) звести математичну модель задачі до канонічного вигляду;
2) визначити початковий допустимий базовий розв'язок задачі;
3) ввести у вхідну симплекс–таблицю параметри, які відповідають початковому базовому розв'язку;
4) оцінки Δ_j (останній рядок таблиці) визначаються за формулами:

$$\Delta_j = z_j - c_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \quad j = \overline{1,n}\,; \tag{4}$$

5) коефіцієнти c_j базових змінних записуються у лівий стовпчик таблиці;
6) значення цільової функції поточної бази

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i0} \tag{5}$$

записують в останній рядок стовпчика плану.

Наведені пункти стануть зрозумілішими, коли буде розглянуто приклад.

Алгоритм симплекс–методу. Алгоритм розв'язку задачі – це сукупність послідовних дій, які необхідно виконати, розв'язуючи задачу. Для симплекс-методу він виглядає так:

1) заповнюється перша таблиця згідно із записаними вище пунктами;
2) якщо $\Delta_j \ge 0$ для всіх $j = \overline{1,n}$, то план оптимальний;
3) якщо є таке $\Delta_k < 0$ і в стовпчику A_k всі елементи $a_{ik} \le 0$, то функція не обмежена зверху в області допустимих розв'язків;
4) якщо є $\Delta_k < 0$ і в k–му стовпчику є хоча б один елемент $a_{ik} > 0$, то можливий перехід до поліпшеного плану з більшим значенням цільової функції;
5) вектор $\boldsymbol{A}_k$, який необхідно ввести в базу, визначається з відношення

$$\theta_r = \min\left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ik}} > 0 \right\} = \frac{a_{r0}}{a_{rk}} .$$

Із бази виводиться вектор $\boldsymbol{A}_r$, на якому досягається мінімум θ_r. Рядок r називається напрямним (головним) і позначається стрілкою;

6) заповнюється таблиця, яка відповідає новому базовому розв'язку, де всі елементи a_{ij} таблиці визначаються рекурентним співвідношенням

$$a_{ij}^{l+1} = \begin{cases} a_{ij}^{l} - \dfrac{a_{rj}^{l}}{a_{rk}^{l}} a_{ik}^{l}, & \text{при } i \ne r \\ \dfrac{a_{rj}^{l}}{a_{rk}^{l}}, & \text{при } i = r, \end{cases} \tag{6}$$

$i = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{0, n}$, l – номер ітерації.

Значення Δ_j можна шукати двома способами: а) як кожен елемент таблиці за ітерацією (6); б) за формулою (4). Це можна використати для контролю обчислень.

Процес обчислення закінчується, якщо знайдено оптимальний розв'язок (пункт 2) або якщо функція не обмежена в області допустимих розв'язків (пункт 3).

***Приклад* 2.** Підприємство виготовляє вироби чотирьох видів A, B, C, D, які мають необмежений збут. Лімітуючим фактором є три групи обладнання, плановий фонд часу роботи яких заданий і не може бути перевищений. Відомі норми часу на обробіток кожного виду виробу на обладнанні кожної групи, а також прибуток за одиницю виробу.

Обладнання	Час на виготовлення одиниці продукції, год				Місячний фонд часу, год
	A	*B*	*C*	*D*	
1	1	2	4	8	240
2	3	5	1	0	120
3	6	0	3	1	300
Прибуток від реалізації, тис. грн.	0,4	0,2	0,5	0,8	

Скласти план виробництва, який забезпечить максимальний прибуток підприємству. Розв'язати задачу симплекс–методом.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 – план виготовлення виробів відповідно A, B, C, D. Враховуючи всі обмеження, побудуємо математичну модель задачі.

Знайти максимум функції

$$f = 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,5x_3 + 0,8x_4 ,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 240 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 \le 120 \\ 6x_1 + 0x_2 + 3x_3 + x_4 \le 300 \end{cases}, \quad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Зведемо задачу до канонічного вигляду, ввівши додаткові (штучні) змінні x_5, x_6, x_7, які будуть базовими на першому етапі. Отримаємо задачу

$$f = 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,5x_3 + 0,8x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 240 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + x_6 = 120 \\ 6x_1 + 0x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 300 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Заповнимо першу симплекс–таблицю.

Таблиця 1

		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
c_i	База	0	0,4	0,2	0,5	0,8	0	0	0

		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	x_5	240	1	2	4	**8**	1	0	0←
0	x_6	120	3	5	1	0	0	1	0
0	x_7	300	6	0	3	1	0	0	1
	Δ_j^1	0	− 0,4	−0,2	−0,5	−0,8 ↑	0	0	0

Таблиця 1 заповнена згідно з наведеними вище правилами. Неважко бачити, як система обмежень внесена в таблицю. Останній рядок заповнений за формулами (4). У задачах з додатними вільними змінними (у нашому випадку x_5, x_6, x_7) початковий допустимий базовий розв'язок легко знаходиться, якщо взяти за базові вектори A_5, A_6, A_7, які утворюють одиничну підматрицю розміром 3×3. Початковий допустимий базовий розв'язок $\vec{x}(0;0;0;0;240;120;300)$. Якщо початкова база складається з вільних змінних, для яких $c_i = 0$, то $\Delta_j^1 = -c_j$. Значення функції для такої бази дорівнює нулю. Оскільки в рядку Δ таблиці 1 є від'ємні елементи, то план можна поліпшити. Для цього виберемо головний стовпчик (позначимо його стрілкою внизу) таблиці 1 за найменшим від'ємним елементом Δ рядка (не враховуючи Δ_0). Тепер виберемо головний рядок (позначимо горизонтальною стрілкою збоку таблиці) за найменшим додатним відношенням елементів плану до головного стовпчика (згідно з п.5 алгоритму). На перетині головного рядка і головного стовпчика виділяємо головний елемент (виділений жирно або в рамочку).

Переходимо до другої таблиці згідно з алгоритмом. Змінна x_4 вводиться в базу, а x_5 – виводиться з бази. Тобто A_4 стає базовим вектором замість A_5. Головний рядок ділимо на головний елемент **8** і заносимо результат в таблицю в першу чергу на тому ж місці, де цей рядок був. З допомогою цього рядка робимо решту елементів головного стовпчика нулями, домножуючи головну стрічку на відповідний коефіцієнт і додаючи до іншого рядка (фактично виключаємо x_4 з решти рівнянь системи). Або це все одно, що рахувати елементи таблиці за формулою (6).

Таблиця 2

План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

c_i	База	0	0,4	0,2	0,5	0,8	0	0	0
		$\boldsymbol{A}_0$	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{A}_4$	$\boldsymbol{A}_5$	$\boldsymbol{A}_6$	$\boldsymbol{A}_7$
0,8	x_4	30	1/8	1/4	1/2	**1**	1/8	0	0
0	x_6	120	**3**	5	1	0	0	1	0←
0	x_7	270	47/8	-1/4	5/2	0	-1/8	0	1
	Δ_j^2	24	−0,3 ↑	0	−0,1	0	0,1	0	0

З останнього рядка таблиці 2 видно, що план можна поліпшити. Вибираємо головний стовпчик (найменший від'ємний елемент позначений стрілкою знизу) та головний рядок (стрілка збоку) аналогічно до попереднього. Ділимо головний рядок на головний елемент (на **3**) і робимо решту елементів у головному стовпчику нулями (аналогічно до попереднього). При цьому x_6 виводиться з бази, x_1 йде в базу в новій таблиці.

Таблиця 3

		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
c_i	База	0	0,4	0,2	0,5	0,8	0	0	0
		$\boldsymbol{A}_0$	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{A}_4$	$\boldsymbol{A}_5$	$\boldsymbol{A}_6$	$\boldsymbol{A}_7$
0,8	x_4	25	0	1/24	11/24	1	1/8	-1/24	0
0,4	x_1	40	**1**	5/3	1/3	0	0	1/3	0
0	x_7	35	0	-241/24	13/24	0	-1/8	-47/24	1
	Δ_j^3	36	0	0,5	0	0	0,1	0,1	0

Згідно з алгоритмом, таблиця 3 є останньою. З неї отримуємо розв'язок, прирівнюючи відповідні x_i з бази до елементів плану:

$$x_1 = 40,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 25\ .$$

При такому плані виробництва підприємство отримає максимальний прибуток, який дорівнює 36 тис. грн. (в останній таблиці $\Delta_0^3 = 36$).

Задачу мінімізації легко звести до задачі на знаходження максимуму $F_{\min} = -F_{\max}$ (змінити знаки цільової функції) і розв'язувати далі за наведеним алгоритмом. Строго кажучи, задача має бути зведена до канонічного вигляду. Однак ця процедура не обов'язкова, оскільки описаний алгоритм дозволяє розв'язувати і задачі мінімізації. При цьому оптимальний план буде отримано, якщо всі $\Delta_j \le 0$.

Розв'язок задач ЛП з довільним видом обмежень. Метод штучної бази

Якщо система обмежень містить нерівності $\ge$ або рівності, тоді початковий опорний план знайти не так просто. У цих випадках його шукають за допомогою штучних змінних. Покажемо це на прикладі.

***Приклад* 3.** Знайти максимум функції

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6 \\ x_1 + 4x_2 \qquad = 8 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Схема розв'язування. Запишемо задачу в канонічному вигляді

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 \qquad = 8 \end{cases} \qquad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Оскільки остання система не має додатної одиничної бази, введемо в неї три штучні змінні x_6, x_7, x_8, які дозволяють отримати початкову одиничну базу.

Для виключення з бази цих змінних введемо їх у цільову функцію з великими від'ємними коефіцієнтами M (у задачі мінімізації – з додатними M). Таким чином, отримаємо нову, так звану M–задачу.

У загальному випадку штучні змінні вводяться лише в ті обмеження, де є знаки $\ge$ і =.

У нашому випадку маємо M–задачу

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 - x_5 + 0x_6 + x_7 + 0x_8 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + x_8 = 8 \end{cases}, \qquad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,8}.$$

Базовими будуть вектори $\boldsymbol{A}_6$, $\boldsymbol{A}_7$, $\boldsymbol{A}_8$. Задачу розв'язуємо вже відомим симплекс -методом.

Якщо в оптимальному розв'язку M –задачі немає штучних змінних (штучні змінні вдається вивести з бази), то цей розв'язок є оптимальний і для вихідної задачі. Якщо ж в оптимальному розв'язку M –задачі хоча б одна зі штучних змінних відмінна від нуля, то система обмежень вихідної задачі несумісна і задача не має розв'язку.

Двоїстість (дуальність) у лінійному програмуванні. До кожної задачі ЛП зі змішаними обмеженнями виду

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, 2, ..., m_1, \; m_1 < m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = m_1 + 1, m_1 + 2, ..., m \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, ..., n_1, \; n_1 < n.$$

можна поставити другу задачу, яка називається *двоїстою* до першої

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \; i = 1, 2, ..., n_1, \; n_1 < n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \; j = n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n \tag{8}$$

$$y_i \geq 0, \; i = 1, 2, ..., m_1, \; m_1 < m.$$

Сумісний розгляд таких пар задач дозволяє дослідити вплив зміни керованих і некерованих змінних системи на значення цільової функції.

Порівнюючи форми запису прямої і двоїстої задач, можна встановити такі взаємозв'язки між ними:

1) якщо пряма задача (7) – задача максимізації, то двоїста (8) – мінімізації, і навпаки;
2) коефіцієнти цільової функції прямої задачі (7) є вільними членами обмежень двоїстої задачі (8);
3) вільні члени обмежень прямої задачі є коефіцієнтами цільової функції двоїстої;
4) матриця обмежень двоїстої задачі записується транспонуванням матриці обмежень прямої задачі;
5) кількість змінних двоїстої задачі рівна кількості обмежень прямої, і навпаки – кількість обмежень двоїстої задачі рівна кількості змінних прямої;
6) взаємно однозначна відповідність між змінними вихідної задачі і обмеженнями двоїстої задовольняє положення: *j*–те обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, якщо на *j*–ту змінну вихідної задачі накладено вимогу невід'ємності; якщо ж *j*–та змінна не обмежена в знаку, то це обмеження у двоїстій задачі буде рівністю.

Покажемо, на прикладі, як до задачі ЛП записати двоїсту задачу. Нехай маємо задачу

$$f = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge 4, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_5 \ge 3, \end{cases} \qquad x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Щоб записати двоїсту задачу, зведемо систему обмежень до вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \le -4, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - 2x_5 \le -3, \end{cases} \qquad x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Двоїста задача до даної матиме вигляд

$$F(\vec{y}) = y_1 - 4y_2 - 3y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \quad - y_4 \ge 1, \\ -y_1 + y_2 + y_3 \quad = -10, \\ -2y_2 + y_3 + y_4 \ge 2, \\ \quad y_2 - y_3 \qquad = -1, \\ -y_2 \qquad -2y_4 = 7, \end{cases} \qquad y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_4 \ge 0.$$

Пара задач може бути симетричною і несиметричною. У симетричних задачах система обмежень задається у вигляді нерівностей, а на змінні накладена умова невід'ємності. У несиметричних задачах система обмежень прямої задачі задається рівностями, а у двоїстій – нерівностями, причому в останній змінні можуть бути і від'ємними.

Оскільки систему нерівностей за допомогою додаткових змінних можна звести до системи рівностей, то всяку пару симетричних задач можна подати у вигляді пари несиметричних.

Оптимальні значення цільової функції прямої та двоїстої задач відрізняються лише знаком. Тонкощі побудови таких розв'язків добре описані в спеціальній літературі.

При розв'язуванні задач ЛП часто цікавить не лише статична інформація про оптимальний розв'язок, а й можливі зміни оптимального розв'язку в результаті невеликих змін параметрів обмежень вихідної математичної моделі. У цьому випадку проводять аналіз моделі на чутливість. Така задача виходить за межі нашої програми.

Транспортна задача (Т–задача). *Постановка задачі*. У n пунктах постачання $A_1, A_2, ..., A_n$ зосереджено однорідний вантаж відповідно в кількостях $a_1, a_2, ..., a_n$. Цей вантаж потрібно розвести в m пунктів споживання $B_1, B_2, ..., B_m$ відповідно в кількостях $b_1, b_2, ..., b_m$. Відома матриця витрат C на перевезення одиниці вантажу від кожного пункту постачання до кожного пункту споживання (іноді задано відстані між цими пунктами):

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Скласти план перевезень вантажу з мінімальними затратами на перевезення.

Схема розв'язання. Запишемо математичну модель задачі. Нехай x_{ij} – кількість вантажу, який перевозять з i–го пункту постачання в j–й пункт споживання. Загальні затрати на перевезення, які необхідно мінімізувати, дорівнюють

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1m}x_{1m} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{nm}x_{nm} \to \min . \quad (10)$$

Системи обмежень, зумовлені відповідними запасами та потребами, мають вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1m} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2m} = a_2 \\ .... \\ x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nm} = a_n \end{cases}, \begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{n1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{n2} = b_2 \\ .... \\ x_{1m} + x_{2m} + ... + x_{nm} = b_m \end{cases}. \quad (11)$$

Якщо в $(10-11)$ загальні запаси і потреби збігаються $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, то така задача називається *закритою*, в іншому випадку – *відкритою*.

При розв'язуванні відкритої задачі спочатку її закривають, вводячи умовного споживача чи умовного постачальника, з ресурсом, що дорівнює різниці між загальними запасами та потребами. При цьому затрати на перевезення – нульові. Наприклад, якщо загальні запаси більші від потреб, то нульові затрати на перевезення означають, що частина вантажу $(\sum a_i - \sum b_i)$ залишається в пунктах постачання.

Існують як ручні, так і машинні методи розв'язання транспортних задач. Найпоширеніший серед ручних – метод потенціалів, який ми й розглянемо. До машинних належать: угорський метод, метод диференційних рент та інші.

Метод потенціалів. Розв'язування транспортної задачі починається з того, що ми спочатку складаємо перший план перевезень методом північно-західного кутка або методом мінімального елемента, який може бути досить далекий від оптимального. (Першу табличку в методі північно-західного кутка заповнюємо з верхнього лівого кутка, рухаючись вправо та вниз, вичерпуючи запаси й задовольняючи потреби, не враховуючи вартості перевезень. При складанні першого плану методом мінімального елемента відразу враховуємо вартість. У першу чергу заповнюють клітинки з мінімальними вартостями, звертаючи увагу на запаси та потреби).

Перевірка плану на оптимальність відбувається так званим методом потенціалів. Потенціали u_i та v_j знаходять із системи $u_i + v_j = c_{ij}$, яка складена за заповненими клітинками таблиці. Вартості перевезень c_{ij} записують у верхній правий куток клітинок. Заповнених клітинок у першій, та й в інших таблицях має бути $n+m-1$.

Якщо для всіх незаповнених (вільних) клітинок виконується нерівність (після того як знайдені потенціали заповнених клітинок) $u_i + v_j \le c_{ij}$, то план оптимальний. У протилежному випадку його можна поліпшити, зробивши цикл перерахунку (сукупність знаків "+" та "–" , які ставляться лише на „поворотах" на заповнених клітинках, крім першого "+", з якого починається перерахунок). Перший "+" (початок циклу) ставиться в незаповненій клітинці, в якій не виконується нерівність $u_i + v_j \le c_{ij}$ з найбільшою розбіжністю. Серед клітинок з "мінусами" вибираємо найменше перевезення і складаємо нову таблицю, в якій там, де знак " плюс" цей мінімум додаємо, а де "мінус" – віднімаємо. Нова таблиця (новий план) поліпшена. Продовжуючи цей процес, ми врешті-решт прийдемо до таблиці, в якій для всіх вільних клітинок буде виконуватись вказана нерівність. І тоді останній план буде оптимальний.

При переході від однієї таблиці до іншої можна спостерігати, як зменшуються загальні витрати на перевезення, обчислюючи значення цільової функції для кожної таблиці (плану).

***Приклад* 4.** Розв'язати Т–задачу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_1 = 300, a_2 = 100, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 100, b_2 = 150, b_3 = 150, b_4 = 80, b_5 = 120.$$

Розв'язання. Заповнимо першу таблицю методом північно-західного кутка.

Таблиця 1

a_i \ b_j	100	150	150	80	120	v_j
300	100 $\boxed{1}$	150 $\boxed{3}$	− 50 $\boxed{4}$	+ $\boxed{2}$	$\boxed{5}$	0
100	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	+ 100 $\boxed{1}$	− 0 $\boxed{3}$	$\boxed{2}$	−3
200	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	80 $\boxed{6}$	120 $\boxed{1}$	0
u_i	1	3	4	6	1	

Заповнених клітинок тут має бути $3+5-1=7$, тому довелось заповнити одну клітинку “хибним” нулем. Причому його варто вписати там, де менша вартість перевезень і щоб заповнені клітинки утворювали східчасту фігуру.

Обчислюємо потенціали заповнених клітинок із системи $u_i + v_j = c_{ij}$. Ця система із 7 рівнянь має 8 невідомих. Для зручності беремо $v_1 = 0$ і легко знаходимо всі інші потенціали, заповнюючи їх у таблицю 1.

Тепер перевіряємо виконання нерівностей $u_i + v_j \le c_{ij}$ для вільних клітинок:

$6 + 0 \le 2$; $1 + 0 \le 5$; $1 - 3 \le 2$; $3 - 3 \le 4$; $1 - 3 \le 2$; $1 + 0 \le 3$; $3 + 0 \le 1$;
$4 + 0 \le 5$.

Перша і передостання нерівності не вірні. У першій розбіжність на 4 одиниці, у передостанній – на 2. Вибираємо “гіршу”, ставимо в ній “+”, і складаємо цикл перерахунку. Знаходимо мінімум серед перевезень де проставлений знак “–”: $\min\{50;\ 0\} = 0$.

Заповнюємо нову таблицю 2, в якій: де знак “плюс”, цей мінімум додаємо, де знак “мінус” – віднімаємо.

Таблиця 2

a_i \ b_j	100	150	150	80	120	v_j
300	$\boxed{1}$	− $\boxed{3}$	$\boxed{4}$	+ $\boxed{2}$	$\boxed{5}$	0

	100	150	50	0		
100	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ 100	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	−3
200	$\boxed{3}$	+ $\boxed{1}$	$\boxed{5}$	− $\boxed{6}$ 80	$\boxed{1}$ 120	4
u_i	1	3	4	2	−3	

$$f_1 = f_2 = 100 + 450 + 200 + 0 + 100 + 480 + 120 = 1450.$$

Вартість перевезень не змінилась, тому що 0 просто перекочував в іншу клітинку. Знову перераховуємо потенціали заповнених клітинок і діємо аналогічно до попереднього.

Таблиця 3

a_i \ b_j	100	150	150	80	120	v_j
300	$\boxed{1}$ 100	$\boxed{3}$ 70	$\boxed{4}$ 50	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{5}$	0
100	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ 100	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	−3
200	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$ 80	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$ 120	−2
u_i	1	3	4	2	3	

$$f_3 = 100 + 210 + 200 + 160 + 100 + 80 + 0 + 120 = 970.$$

Для всіх вільних клітинок виконується нерівність, яка гарантує оптимальність плану.

Відповідь: $x_{11} = 100, x_{12} = 70, x_{13} = 50, x_{14} = 80, \quad x_{23} = 100, x_{32} = 80, x_{35} = 120$, всі інші $x_{ij} = 0$.

$$f_{\min} = f_3 = 970.$$

Метод диференційних рент. Метод диференційних рент належить до групи методів розв'язування транспортної задачі, коли розв'язування починається з оптимального недопустимого плану, який потім перетворюється у допустимий, не втрачаючи оптимальності.

Наведемо алгоритм методу, вважаючи, що задача закрита.

1. Початковий план перевезень заповняємо найкращим чином, вибираючи у кожному стовпчику таблиці мінімальні вартості (виділяємо їх дужкою у верхньому кутку клітинки). У виділених клітинках заповняємо максимально допустимі перевезення. При цьому весь ресурс може бути не вичерпаний. Якщо ж потреби всі задоволені і запаси вичерпані, то задача розв'язана.
2. Якщо ж ресурс не вичерпаний, то у таблиці добавляємо рядок для різниць і стовпчик для нерозподілених ресурсів. Визначаємо надлишкові та недостатні рядки: рядок є надлишковим (додатним), якщо потреби задоволені і ще частина товару залишилась у пункті постачання; рядок є недостатнім (від'ємним), якщо запаси розподілені всі, а потреби ще не задоволені. Для рядка, у якого нерозподілений залишок дорівнює 0, можна користуватись правилом: рядок вважається додатним, якщо друга заповнена клітинка, яка знаходиться у стовпчику, що зв'язаний з таким рядком однією заповненою клітинкою, розташована у додатному рядку.
3. Для кожного стовпчика знаходимо різницю між вартістю перевезень у виділеній клітинці (перевезення в дужках) та найближчою до неї вартістю, яка записана у надлишковому рядку, причому якщо виділена клітинка знаходиться у додатному рядку, то різницю не визначають. Із всіх різниць вибирають найменшу за значенням – це проміжна рента.
4. Переходимо до нової таблиці – додаємо до відповідних вартостей перевезень, які знаходяться у від'ємних (недостатніх) рядках, проміжну ренту. Інші елементи не змінюємо.
5. Усі клітинки нової таблиці вважаємо вільними. Заповнюємо нову таблицю, де заповнених клітинок буде на одну більше. Ця додаткова клітинка є у стовпчику, в якому записана проміжна рента. У новій таблиці кількість клітинок, що заповнюються, є більша, ніж кількість стовпчиків. Обираємо деякий стовпчик (рядок), в якому є одна виділена клітинка. Цю клітинку заповнюємо і виключаємо з розгляду даний стовпчик (рядок). Продовжуючи цю процедуру, заповнюємо всі виділені клітинки. Якщо план допустимий, то він оптимальний, в іншому випадку переходимо до п.2.

Приклад 5. Розглянемо розв'язання транспортної задачі описаним вище методом. Нехай маємо транспортну задачу

Таблиця 1

b_j / a_i	140	100	160	Нерозподілений залишок і знаки рядків
90	(2) 90	5	(2) 0	-210
200	4	(1) 100	5	+100
110	3	6	8	+110
Різниці	1	-	3	

Розв'язання. Відповідно до вказаного вище, у дужках виділено мінімальні вартості по стовпчиках. У них вписано максимально можливі перевезення (по одному перевезенню в кожному стовпчику). Згідно з балансовими умовами заповнюємо останній стовпчик, надаючи перевезенням рядкам відповідний знак. В останньому рядку виписано різниці (лише для від'ємних рядків) між виділеною вартістю і найближчою до неї. Із всіх різниць вибирають найменшу (у нас – 1, проміжна рента). У новій таблиці до елементів вартостей, які є у від'ємних рядках, додаємо проміжну ренту. Інші елементи не змінюємо. Отримаємо таблиці

Таблиця 2

b_j / a_i	140	100	160	Нерозподілений залишок і знаки стрічок
90	(**3**) 30	6	(**3**) 60	-100
200	4	(**1**) 100	5	+100
110	(**3**) 110	6	8	-0
Різниці	1	-	2	

Таблиця 3

b_j \ a_i	140	100	160	Нерозподілений залишок і знаки рядків
90	0 (**4**)	7	90 (**4**)	-70
200	(**4**)	100 (1)	5	+0
110	(**4**)	7	9	+70
Різниці	-	-	1	

Таблиця 4

b_j \ a_i	140	100	160	Нерозподілений залишок і знаки рядків
90	5	8	90 (5)	+0
200	30 (**4**)	100 (1)	70 (5)	+0
110	110 (**4**)	7	9	+0

Обчислення закінчено, бо розподілено весь ресурс. З останньої таблиці виписуємо розв'язок: $x_{13} = 90, x_{21} = 30, x_{22} = 100, x_{23} = 70, x_{31} = 110$, всі решта $x_{ij} = 0$.

$$f_{\min} = 90 \cdot 5 + 30 \cdot 4 + 100 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 4 = 1460.$$

§ 2. Чисельні методи пошуку екстремуму

Поряд із задачами на відшукання екстремуму функції, при певних обмеженнях, часто доводиться шукати безумовний екстремум функції

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min). \qquad (1)$$

Методи розв'язування таких задач поділяють на прямі й непрямі. У прямих методах пошук екстремуму починається з довільної точки і здійснюється за допомогою послідовного поліпшення результату. У непрямих – екстремум знаходять із необхідних умов екстремуму

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Метод Ейлера полягає в розв’язанні системи рівнянь (2) та перевірці, за критерієм Сильвестра, достатніх умов екстремуму. Для цього знаходять визначники матриць Гесса та встановлюють характер стаціонарних точок за знаками визначників (див. розділ 7, §§4-5).

Метод Ейлера зручно застосовувати у випадку, коли система (2) має точний розв’язок.

Метод Ньютона. Для функції (1) запишемо необхідну умову екстремуму (2)

Нехай $\boldsymbol{x}^{(k)}$ є k – е наближення кореня системи (2). Тоді точний корінь $\boldsymbol{x}$ системи (2) має вигляд

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)}, \tag{3}$$

де $\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$ – приріст кореня. Підставляючи (3) у (2), отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Розкладаючи ліву частину (6) в околі точки $\boldsymbol{x}^{(k)}$ в ряд Тейлора, обмежуючись лінійними членами, маємо систему

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_i \partial x_j}\right)\cdot \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

або стисло

$$H^{(k)}\Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{(k)}, \tag{6}$$

де $H^{(k)}$ – матриця Гесса функції $f(\boldsymbol{x})$, визначена в точці $\boldsymbol{x}^{(k)}$.

Отримана система (6) є лінійною відносно приросту $\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$. Якщо матриця Гесса є невиродженою, то похибку можна записати так:

$$\Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\left(H^{(k)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{(k)}, \tag{7}$$

де $\left(H^{(k)}\right)^{-1}$ – матриця, обернена до $H^{(k)}$.

Враховуючи (3) і (7) можна перейти до (k+1)-го наближення:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \left(H^{(k)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{(k)}. \tag{8}$$

Тепер від наближення (8), анологічно до попереднього, можна перейти до наступного, тобто до $(k+2)$-го наближення.

Процес продовжується доти, доки не досягнемо заданої точності ε, тобто до виконання умови

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon \text{ для всіх } i = \overline{1,n}.$$

Цей параграф має описовий характер.

Вправи

***Завдання* 1.** Розв'язати графічно задачі ЛП:

1. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 3x_1 - x_2 \le 12, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

2. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3. $F = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

4. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5. $F = 3x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

6. $F = 6x_1 - 5x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

7. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

8. $F = -x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

9. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

***Завдання* 2.** Розв’язати задачі ЛП симплекс-методом:

1. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

2. $F = -2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

4. $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 20, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5. $F = x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 6x_1 + x_2 \le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6. $F = x_1 - 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

7. $F = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

8. $F = 5x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 6, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

9. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 16, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

10. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

11. $F = -2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

12. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge -3, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

13. $F = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

14. $F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4, \\ -5x_1 \quad + x_3 \ge -12, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

15. $F = -7x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + x_2 \ge 3, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

16. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

17. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

***Завдання* 3**. Розв'язати транспортні задачі (знайти мінімальні затрати на перевезення):

1. $C=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $a_1=30,\ a_2=50,\ a_3=20;$

$b_1=15,\ b_2=15,\ b_3=40,\ b_4=30.$

2. $C=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$; $a_1=40,\ a_2=30,\ a_3=35;$

$b_1=20,\ b_2=34,\ b_3=16,\ b_4=10,\ b_5=15.$

3. $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 22 & 5 \end{pmatrix}$; $a_1=60,\ a_2=70,\ a_3=20;$

$b_1=40,\ b_2=30,\ b_3=30,\ b_4=50.$

4. $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; $a_1=30,\ a_2=20,\ a_3=40,\ a_4=50;$

$b_1=35,\ b_2=20,\ b_3=55,\ b_4=30.$

5. $C=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; $a_1=100,\ a_2=120,\ a_3=150,\ a_4=130;$

$b_1=140,\ b_2=130,\ b_3=90,\ b_4=140.$

6. $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; $a_1=50,\ a_2=20,\ a_3=30,\ a_4=20;$

$b_1=40,\ b_2=30,\ b_3=35,\ b_4=15.$

7. $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $a_1=60,\ a_2=70,\ a_3=20;$

$b_1=40,\ b_2=30,\ b_3=30,\ b_4=50.$

8. $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $a_1=40,\ a_2=30,\ a_3=20;$

$b_1=30,\ b_2=25,\ b_3=18,\ b_4=20.$

9. $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $a_1=60,\ a_2=65,\ a_3=70;$

$b_1=40,\ b_2=60,\ b_3=70,\ b_4=25.$

10. $C=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; $a_1=40,\ a_2=25,\ a_3=35;$

$b_1=15,\ b_2=40,\ b_3=30,\ b_4=15.$

Відповіді

***До завдання* 1**

1. $F_{\max}=F(4;5)=9$. **2.** $F_{\max}=F(0,8;0,8)=4,8$. **3.** $F_{\max}=F(5,6;0,4)=45,6$.

4. $F_{\min}=F(1,5;0)=9$. **5.** $F_{\min}=F\left(1;\dfrac{10}{3}\right)=6\dfrac{1}{3}$. **6.** $F_{\max}=F(2;0)=12$.

7. $F_{\max}=F\left(\dfrac{5}{7};\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{9}{7}$. **8.** $F_{\min}=F(2;3)=-8$. **9**. $F_{\min}=F\left(0;\dfrac{9}{7}\right)=-5\dfrac{1}{7}$.

***До завдання* 2**

1. $F_{\max}=F\left(0;\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{16}{3}$; **2**. $F_{\min}=F\left(\dfrac{18}{5};\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{32}{5}$. **3**. $F_{\min}=F(1,1)=10$

4. $F_{\max} = F(15;0) = 60$. **5**. $F_{\max} = F(6,6;\ 2,4) = 13,8$. **6**. $F_{\max} = F\left(\frac{5}{7};\ \frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7}$.

7. $F_{\max} = F\left(5\frac{3}{5};\ \frac{2}{5}\right) = 45\frac{3}{5}$. **8**. $F_{\max} = F(0;\ 1) = 4$. **9**. $F_{\min} = F(2;\ 3) = 13$.

10. $F_{\max} = F(1;\ 3) = 12$. **11**. $F_{\min} = F(2;\ 0) = 4$. **12**. $F_{\max} = F\left(4\frac{1}{5};\ \frac{4}{5}\right) = 27\frac{4}{5}$.

13. $F_{\max} = F(3;\ 0;\ 3) = 33$. **14**. $F_{\max} = F\left(2\frac{2}{7};\ \frac{4}{7};\ 0\right) = 5\frac{1}{7}$.

15. $F_{\min} = F(2;\ 0) = -14$. **16**. $F_{\max} = F(12;\ 0) = 24$.

17. $F_{\min} = F\left(\frac{3}{2};\ 0\right) = 9$. **18**. $F_{\max} = F(2;3) = 8$. **9**. $F_{\min} = F\left(7\frac{3}{7};8\frac{4}{7}\right) = 22\frac{4}{7}$.

20. $F_{\max} = F\left(6\frac{2}{3};\ 4\frac{2}{3}\right) = 11\frac{1}{3}$.

До завдання 3

1. $F_{\min} = 240$; **2**. $F_{\min} = 432$; **3**. $F_{\min} = 310$; **4**. $F_{\min} = 345$; **5**. $F_{\min} = 1880$;
6. $F_{\min} = 320$; **7**. $F_{\min} = 310$; **8**. $F_{\min} = 220$; **9**. $F_{\min} = 265$; **10**. $F_{\min} = 555$.

Розділ 15. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Чисельні методи є одним із потужних математичних засобів розв'язування найрізноманітніших прикладних задач. Сучасні чисельні методи з використанням ЕОМ дають можливість розв'язувати такі задачі. Проте, застосовувати чисельні методи не просто. Крім побудови математичної моделі потрібно розробити алгоритм (сукупність арифметичних і логічних дій), який приведе до результату. При побудові алгоритму необхідно враховувати: швидкість; економію пам'яті; точність; простоту; надійність та інше. Для деяких задач існують алгоритми, які працюють завжди і невдачі малоймовірні. Проте, для багатьох математичних задач не існує універсальних алгоритмів розв'язування. Це означає, що для довільного алгоритму знайдеться задача із тієї ж предметної області, для якої цей алгоритм зовсім не підходить. Надійність вимірюється деякою комбінацією ймовірності отримання правильних результатів і ймовірності отримання неправильного результату без його виявлення.

Для складних задач розробка чисельних методів і складання програм для ЕОМ досить трудомісткі і багатовитратні та нерідко співрозмірні із вартістю експериментальної фізичної установки. Зате проведення окремого розрахунку набагато швидше, ніж проведення окремого експерименту.

В техніці та і в інших областях науки основним результатом отримання розв'язку задачі є числовий розв'язок. Незалежно від того чи визначається напруження і деформації в елементах будівельних конструкцій, чи вимірюється швидкість руху рідини або газу в трубопроводі, чи знаходиться температура в різних точках масиву і т.п., спеціаліста, як правило, цікавить числове значення того чи іншого параметра.

Вдосконалення швидкодіючої обчислювальної техніки зробило можливим розв'язання багатьох актуальних і складних прикладних задач, що привело до того що числові методи перетворились в область знань яка життєво необхідна для функціонування практично всіх галузей народного господарства. Важливим фактором при оцінці ефективності всякого числового методу є зручність його реалізації на комп'ютері.

§ 1. Наближені обчислення

При розв'язуванні прикладних задач важливо знати точність отриманого результату. Похибки які виникають в цих результатах обумовлені цілим рядом причин. Причому, наприклад похибки при заокругленні чисел, в процесі виконання великої кількості операцій накопичуються і породжують нові похибки що в кінцевому результаті може привести до суттєвих помилок у кінцевих результатах.

Простий приклад. Нехай необхідно знайти значення $c = a - b$, де $a = 139,27;$ $b = 138,97$. Маємо $c = 0,3$. Припустимо що величини a і b обчислені з похибками: $a = 140,62;$ $b = 137,62$. Обчислимо $c = 140,62 - 137,62 = 3,0$. Таким чином, похибка при знаходженні величин a і b не перевищує 1% від точних значень, привела до десятикратного збільшення числа c.

При застосуванні наближених методів розв’язування задач, наприклад методу послідовного наближення, точне значення шуканої величини можна отримати тільки після виконання нескінченної кількості кроків обчислень, що практично неможливо. Тому при виконанні скінченої кількості кроків, отримаємо наближені результати з похибками, які називаються *залишковими*. Часто в якості вихідних даних приймаються значення величин отримані із експерименту. В силу цілого ряду причин допускаються похибки вимірювання. Такі похибки називаються *незліквідними*. Коли неможливо розв’язати задачу точно, доводиться застосовувати наближені методи. Отримані результати містять похибки, характер яких залежить від використаного наближеного методу (*похибка методу*). Часто при вирішенні виробничих задач доводиться абстрагуватись від деяких факторів будуючи математичну модель задачі. Розв'язок реальної задачі не співпадає з розв'язом отриманим при розгляді її математичної моделі, навіть при застосуванні точних методів розв’язування. Виникаючі при цьому похибки називають *похибками математичного моделювання*.

Абсолютна і відносна похибки. Під абсолютною похибкою розуміємо модуль різниці між точним значенням величини і приблизним його значенням $\Delta = |A - a|$. За абсолютною похибкою важко оцінити міру розбіжності між точним та наближеним значенням. Так наприклад, похибка 1м повністю допустима при вимірюванні відстані між містами і недопустима при вимірюванні кімнати. Тому вводять відносну похибку $\delta = \dfrac{\Delta}{|A|}$, або $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$. Величини Δ і δ можуть бути обчислені коли відомо не тільки наближене значення величини але й точне її значення. Проте, останнє можливе далеко не у всіх випадках. Часто доводиться аналізувати цілу множину однотипних наближених величин (наприклад розміри серії виготовлених деталей). В такому випадку вводяться поняття *граничних* абсолютної і відносної похибок. В якості граничної абсолютної (відносної) похибки Δ^* (δ^*) наближеного числа можна взяти довільне число не менше абсолютної (відносної) похибки цього числа:

$$\Delta^* \geq \Delta \quad (\delta^* \geq \delta).$$

В якості граничних похибок Δ^* (δ^*) беруть найбільші із отриманих значень Δ і δ.

Задача. Глибина рідини в резервуарі вимірюється рейкою довжиною $h = 155$см. Знайти відносну похибку цього вимірювання, враховуючи те що рейка може бути опущена в резервуар не строго вертикально і при цьому кінець рейки на дні відхиляється на 10см від точки, яку вона займає при вертикальному положенні.

Розв'язання. Значення рівня може бути визначено із прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза h і один із катетів $a = 10$. Другий катет, який визначає фактичний рівень, дорівнює $\sqrt{h^2 - a^2} = h\sqrt{1 - \frac{a^2}{h^2}} \approx h - \frac{a^2}{2h}$. Тут використаний розклад функції $(1+x)^n$ у ряд Маклорена (взято перші два члени розкладу). Відносна похибка результату вимірювання

$$\delta \approx \frac{\frac{a^2}{2h}}{h - \frac{a^2}{2h}} \approx 0,002085.$$

Можна взяти відносну похибку (у відсотках), наближено рівну $\delta = 0,2\%$.

§ 2. Інтерполяція функцій

Часто, розв'язуючи прикладні задачі, зустрічаються із задачею багаторазового обчислення функції, яка має громіздкий вигляд, що дає певні незручності. В цьому випадку вигідно замінити задану функцію $f(x)$ наближеною формулою, тобто підібрати деяку функцію $P(x)$, яка в певному розумінні близька до заданої і просто обчислюється. Іноді аналітичний вигляд функції $f(x)$ невідомий, а, наприклад, експериментально отримано значення функції її в точках (вузлах) $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$: $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$. Постає питання, як знайти значення функції $f(x)$ в деяких інших точках $x \neq x_i$, $i = \overline{0,n}$, які знаходяться на відрізку $\left[x_0, x_n\right]$? Слід зауважити, що значення побудованої функції $P(x)$ мають співпадати із значеннями $f(x)$ у вузлах інтерполяції $P(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Функцію $P(x)$ називають *інтерполяційною*. Зручно, за інтерполяційну функцію брати многочлен. Таку інтерполяцію називають *параболічною*, оскільки вважається, що функцію $y = f(x)$ досить добре можна наблизити параболою певного порядку, аналітичним виразом якої є степеневий многочлен $P(x)$.

Задачу параболічної інтерполяції можна інтерпретувати так: знайти алгебраїчну криву виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, яка проходить через точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$.

Якщо x належить заданому відрізку $\left[x_0, x_n\right]$, то задачу знаходження наближеного значення функції називають інтерполюванням у вузькому розумінні. Якщо ж x знаходиться зовні відрізка $\left[x_0, x_n\right]$, то задачу визначення функції в точці x називають екстраполюванням.

1. ***Скінченні різниці.*** Нехай задано функцію $y = f(x)$. Позначимо через $\Delta x = h$ фіксовану величину приросту аргумента (крок). Тоді перша скінченна різниця функції $f(x)$ дорівнює:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

Другу скінченну різницю визначають:

$$\Delta^2 y = \Delta\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] = \left[f(x + \Delta x + \Delta x) - f(x+\Delta x)\right] -$$
$$-\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] = f(x + 2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x).$$

Аналогічно визначають скінченні різниці:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n = 3, 4, 5, ... \tag{2}$$

Приклад **1.** Побудувати скінченні різниці для функції $P(x) = x^2$, взявши за крок $\Delta x = 1$.

Розв'язання. Згідно алгоритму побудови скінченних різниць (2), маємо:

$$\Delta P(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1;$$
$$\Delta^2 P(x) = \left[2(x+1)+1\right] - \left[2x+1\right] = 3 - 1 = 2;$$

$$\Delta^n P(x) = 0, \text{ при } n > 2.$$

Символ Δ (дельта) можна розглядати як оператор, що ставить у відповідність функції $y = f(x)$ функцію $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$. Цей оператор володіє властивостями:

1) $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$;

2) $\Delta(Cu) = C\Delta u$, ($C -$ const);

3) $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{n+m}(u)$,

де $m, n -$ цілі числа, при цьому за визначенням $\Delta^0 y = y$.

Із формули (1) маємо:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x).$$

Розглядаючи Δ як символічний множник, отримаємо

$$f(x+\Delta x) = (1+\Delta) f(x).$$

Послідовно застосовуючи це співвідношення n разів, матимемо

$$f(x+n\Delta x) = (1+\Delta)^n f(x).$$

Користуючись формулою бінома Ньютона, останнє співвідношення можна записати

$$f(x+n\Delta x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x). \qquad (3)$$

Таким чином, формула (3) дає можливість знайти послідовні значення функції $f(x)$ через її скінченні різниці різних порядків.

Із тотожності $\Delta = (1+\Delta) - 1$, застосовуючи біном Ньютона, отримаємо

$$\Delta^n f(x) = \left[(1+\Delta) - 1\right]^n f(x) = (1+\Delta)^n f(x) - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} f(x) +$$
$$+ C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} f(x) - ... + (-1)^n f(x).$$

Використовуючи вище вказані співвідношення, остання формула набуває вигляду

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) = f(x+n\Delta x) - C_n^1 f(x+(n-1)\Delta x) + C_n^2 f(x+(n-2)\Delta x) - \\ - ... + (-1)^n f(x).\end{aligned} \qquad (4)$$

Формули (4) визначають скінченні різниці $n-$го порядку функції $f(x)$ через послідовні значення цієї функції.

2. *Побудова таблиці скінченних різниць.* На практиці часто доводиться розглядати функції $y = f(x)$, задані таблично $y_i = f(x_i)$ для систем рівновіддалених точок x_i, $(i = 0, 1, 2, ..., n)$, так що $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$, де

$h=$const. Скінченні різниці різних порядків для послідовності y_i визначають так:

$$\begin{aligned}
&\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \\
&\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \dots = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.
\end{aligned} \tag{5}$$

Із першої рівності, маємо

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i .$$

Звідси послідовно виводимо

$$y_{i+2} = (1+\Delta)^2 y_i, \quad y_{i+3} = (1+\Delta)^3 y_i, \dots, \quad y_{i+n} = (1+\Delta)^n y_i . \tag{6}$$

Скориставшись формулою бінома Ньютона для останньої рівності (6), отримаємо

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + C_n^2 \Delta^2 y_i + C_n^3 \Delta^3 y_i + \dots + \Delta^n y_i,$$

$$\Delta^n y_i = \left[(1+\Delta) - 1\right]^n y_i = (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + \dots + (-1)^n y_i.$$

Тепер, легко бачити що

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} - \dots + (-1)^n y_i . \tag{7}$$

Наприклад,

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Зауважимо, що для обчислення $\Delta^n y_i$ потрібно знати $n+1$ значення функції $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}$.

Скінченні різниці різних порядків зручно записувати у формі діагональної таблиці різниць

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>Δy</th><th>$\Delta^2 y$</th><th>$\Delta^3 y$</th></tr>
<tr><td>x_0</td><td>y_0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Δy_0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>y_1</td><td></td><td>$\Delta^2 y_0$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Δy_1</td><td></td><td>$\Delta^3 y_0$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>y_2</td><td></td><td>$\Delta^2 y_1$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Δy_2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>y_3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Приклад 2. Скласти таблицю скінченних різниць для функції

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$

до третього порядку, від початкового значення $x_0 = 0$, з кроком $h = 1$.

Розв'язання. Вибираємо чотири вузли $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$. Знайдемо значення заданої функції у цих точках

$y_0 = -1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 13, \quad y_3 = 44$.

Заповнимо ці дані та обчислені скінченні різниці у таблицю

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	–1			
		3		
1	2		8	
		11		12
2	13		20	
		31		
3	44			

3. ***Узагальнена степінь.*** Узагальненою степенню $n-$го порядку числа x називають добуток n співмножників, перший із яких дорівнює x, а кожен наступний на h менший за попередній:

$$x^{[n]} = x \cdot (x-h) \cdot (x-2h) \cdot \ldots \cdot (x-(n-1)h),$$

де $h-$ певне фіксоване стале число.

Показник узагальненої степені записують у квадратних дужках. Приймають, що $x^{[0]} = 0$. Якщо $h = 0$, то узагальнена степінь збігається зі звичайною $x^{[n]} = x^n$.

Обчислимо скінченні різниці для узагальненої степені, взявши $h = \Delta x$.

Для першої різниці маємо:

$$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = (x+h) \cdot x \cdot (x-h) \cdot \ldots (x-(n-2)) - x \cdot (x-h) \cdot \ldots \cdot (x-(n-1)h) =$$

$$= x \cdot (x-h) \cdot \ldots (x-(n-2)) \cdot \left[x + h - x + nh - h\right] = nhx^{[n-1]}.$$

Йдучи аналогічно, для другої різниці, отримаємо $\Delta^2 x^{[n]} = n(n-1)h^2 x^{[n-2]}$. Методом математичної індукції легко вивести формулу

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\ldots(n-(k-1))h^k x^{[n-k]}, \quad (k = \overline{1,n}).$$

Очевидно, що $\Delta^k x^{[n]} = 0$, якщо $k > n$.

4. *Перша інтерполяційна формула Ньютона.* Нехай для функції $y = f(x)$ задані значення y_i у рівновіддалених точках $x_i = x_0 + ih \quad (i = \overline{0,n})$, де $h -$ крок інтерполяції. Потрібно побудувати поліном $P_n(x)$, який має степінь не вищий за n і приймає у вузлах інтерполяції значення які співпадають із значеннями функції, тобто

$$P_n(x_i) = y_i, \quad (i = \overline{0,n}). \tag{8}$$

Умови (8) еквівалентні до $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, \quad (m = \overline{0,n})$.

Поліном шукаємо у вигляді

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n). \tag{9}$$

Використовуючи узагальнену степінь, вираз (9) запишемо так:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + ... + a_n(x - x_0)^{[n]}. \tag{10}$$

Визначимо коефіцієнти полінома $P_n(x)$. Підставимо у (10) $x = x_0$, отримаємо $P_n(x_0) = y_0 = a_0$. Щоб знайти коефіцієнт a_1 складемо скінченну різницю першого порядку

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + ... + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h.$$

Підставимо в останньому виразі $x = x_0$, отримаємо $\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h$. Звідси $a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{1! \cdot h}$.

Аналогічно, для визначення коефіцієнта a_2, складемо скінченну різницю другого порядку

$$\Delta^2 P_n(x) = 2! a_2 h^2 + 2 \cdot 3 a_3 (x - x_0)^{[1]} h^2 + ... + (n-1) n a_n (x - x_0)^{[n-2]} h^2.$$

Підставимо в останньому виразі $x = x_0$, отримаємо $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2! a_2 h^2$. Звідси $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо шукані коефіцієнти

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! \cdot h^i}, \quad (i = \overline{0,n}),$$

де $0! = 1, \quad \Delta^0 y_0 = y_0$.

Підставимо знайдені коефіцієнти у (10), отримаємо інтерполяційний поліном Ньютона

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x-x_0)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x-x_0)^{[2]}+...+\frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_0)^{[n]}. \qquad (11)$$

Очевидно, що поліном (11) повністю задовольняє вимоги поставленої задачі. Справді, по – перше, степінь полінома $P_n(x)$ не вища n, по – друге, $P_n(x)=y_0$ і враховуючи $\frac{x_k-x_i}{h}=(k-i)$

$$P_n(x_k)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x_k-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x_k-x_0)(x_k-x_1)+...+\frac{\Delta^k y_0}{k!\cdot h^k}(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})=$$

$$=y_0+k\Delta y_0+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0+...+\frac{k(k-1)(k-2)\cdot...\cdot 1}{k!}\Delta^k y_0=(1+\Delta)^k y_0=y_k, \quad (k=\overline{1,n})$$

Для практичного використання інтерполяційну формулу Ньютона (11) запишемо у перетвореному вигляді. Для цього введемо змінну $q=\frac{x-x_0}{h}$, тоді

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i}=\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{h}\cdot\frac{x-x_0-2h}{h}\cdot...\cdot\frac{x-x_0-(i-1)h}{h}=$$
$$=q(q-1)(q-2)\cdot...\cdot(q-i+1), \quad (i=\overline{1,n}).$$

Підставляючи ці вирази у формулу (11), отримаємо

$$P_n(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+...+\frac{q(q-1)\cdot...\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (12)$$

де $q-$ кількість кроків, необхідних для досягнення точки x, виходячи з точки x_0. Формула (12) – ***перша інтерполяційна формула Ньютона***. Її зручно використовувати для інтерполяції функції в околі початкового значення x_0, де q мале за абсолютною величиною.

Якщо в (12) взяти $n=1$, отримаємо формулу лінійного інтерполювання

$$P_1(x)=y_0+q\Delta y_0.$$

Якщо взяти $n=2$, отримаємо формулу параболічного чи квадратичного інтерполювання

$$P_2(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

Якщо задана необмежена таблиця значень функції y, то число n в інтерполяційній формулі (12) може бути довільним. Практично в цьому випадку число n вибирають так, щоб різниця $\Delta^n y_i$ була сталою зі заданою степеню точності. За початкове значення x_0 можна взяти довільне табличне значення аргумента x.

Якщо таблиця значень функції обмежена, то n дорівнює кількості значень функції мінус 1.

Приклад 2. Побудувати на відрізку $[3,50; 3,70]$,з кроком $h = 0,05$, інтерполяційний поліном Ньютона для функції, яка задана таблицею, й обчислити значення отриманого полінома в точці $x = 3,52$.

x_i	$3,5$	$3,55$	$3,60$	$3,65$	$3,70$
y_i	$33,115$	$34,813$	$36,598$	$38,475$	$40,447$

Розв'язання. Обчислимо скінченні границі, згідно викладеного

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$3,50$	$33,115$				
		$1,698$			
$3,55$	$34,813$		$0,087$		
		$1,785$		$0,005$	
$3,60$	$36,598$		$0,092$		$-0,002$
		$1,877$		$0,003$	
$3,65$	$38,475$		$0,095$		
		$1,972$			
$3,70$	$40,447$				

Оскільки різниці четвертого порядку практично дорівнюють нулю, то у формулі (12) візьмемо $n = 3$. Взявши $x_0 = 3,50, \quad y_0 = 33,115$ отримаємо

$$P_3(x) = 33,115 + 1,698 \cdot q + 0,087 \cdot \frac{q(q-1)}{2!} + 0,005 \cdot \frac{q(q-1)(q-2)}{3!},$$

де $q = \dfrac{x - 3,115}{0,05} = 20(x - 3,5)$.

Для розв'язання другої частини задачі обчислимо

$$q = 20(3,52 - 3,5) = 0,4.$$

Підставимо це значення у знайдений поліном

$$P_3(3,52) = 33,115 + 1,698 \cdot 0,4 + 0,087 \cdot \frac{0,4(0,4-1)}{2!} + 0,005 \cdot \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)}{3!} =$$
$$= 33,115 + 0,680 - 0,011 + 0,001 = 33,785.$$

5. ***Друга інтерполяційна формула Ньютона.*** Перша інтерполяційна формула практично незручна для інтерполювання функції поблизу кінця таблиці. Тоді використовують другу інтерполяційну формулу Ньютона.

Нехай маємо рівновіддалені значення аргумента $x_i = x_0 + ih$, та значення функції в цих точках $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$. Побудуємо поліном у вигляді
$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot ... \cdot (x - x_1),$$
або, використавши узагальнену степінь
$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_n)^{[2]} + ... + a_n(x - x_n)^{[n]}. \qquad (13)$$

Завдання полягає у визначенні коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_n$ так, щоб виконувались рівності
$$P_n(x_i) = y_i, \quad (i = \overline{0,n}).$$

Для цього достатньо, щоб
$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}, \quad (i = \overline{0,n}). \qquad (14)$$

Візьмемо $x = x_n$ у формулі (13),тоді отримаємо
$$P_n(x_n) = y_n = a_0.$$

Отже, $a_0 = y_n$.

Візьмемо від лівої й правої частин формули (13) скінченні різниці першого порядку
$$\Delta P_n(x) = a_1 h + a_2 2h(x - x_{n-1})^{[1]} + a_3 3h(x - x_{n-2})^{[2]} + ... + a_n nh(x - x_1)^{[n-1]}.$$

Звідси, поклавши $x = x_{n-1}$ і врахувавши співвідношення (14), отримаємо:
$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

Отже, $a_1 = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}$.

Аналогічно, склавши другу різницю від $P_n(x)$, отримаємо
$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 2! h^2 + a_3 3! h^2 (x - x_{n-2})^{[1]} + ... + a_n n(n-1) h^2 (x - x_1)^{[n-2]}.$$

Підставимо сюди $x = x_{n-2}$ знаходимо

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 2!h^2,$$

і, таким чином,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Продовжуючи цей процес n разів, отримаємо

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}, \quad (i = \overline{0,n}).$$

Підставляючи ці значення у формулу (13), отримаємо

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)^{[2]} + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)^{[n]}. \qquad (15)$$

Формулу (15) називають ***другою інтерполяційною формулою Ньютона.*** Запишемо її у зручнішому вигляді. Для цього візьмемо $q = \frac{x - x_n}{h}$. Тоді $\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1,$ $\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - x_n + 2h}{h} = q + 2,$ і т.д. Підставивши ці значення у формулу (15), отримаємо зручну формулу

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + ... + \frac{q(q+1)...(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (16)$$

6. ***Інтерполяційна формула Лагранжа.*** Інтерполяційні формули Ньютона використовують лише у разі рівновіддалених вузлів інтерполювання. Для довільно заданих вузлів інтерполювання застосовують так звану інтерполяційну формулу Лагранжа.

Нехай на відрізку $[a,b]$ взято $n+1$ різних значень аргумента $x_0, x_1, ..., x_n$ та відомі значення функції в цих точках $y_0, y_1, ..., y_n$. Побудуємо поліном $L_n(x)$, який має степінь не вищий n, значення якого у вузлах інтерполяції співпадають із значеннями $y_0, y_1, ..., y_n$: $L_n(x_i) = y_i, \quad (i = \overline{0,n})$.

Інтерполяційна формула Лапласа (без виведення) має вигляд:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdot ... \cdot(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdot ... \cdot(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdot ... \cdot(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdot ... \cdot(x_i - x_n)}. \qquad (17)$$

Легко бачити що поліном (17) у вузлах інтерполяції $x_0, x_1, ..., x_n$ співпадає із значеннями функції $y_0, y_1, ..., y_n$. Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені, то поліном Лагранжа співпадає із поліномом Ньютона.

Якщо $n=1$, то маємо два вузли і формула Лагранжа дає рівняння прямої і має вигляд ($a, b-$ абсциси цих точок):

$$y = \frac{x-b}{a-b} y_0 + \frac{x-a}{b-a} y_1 .$$

У випадку $n=2$, маємо рівняння параболи, яка проходить через три точки ($a, b, c-$ абсциси цих точок):

$$y = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} y_2 .$$

Для обчислення Лагранжевих коефіцієнтів зручно використовувати наведену нижче схему. Спочатку розміщують у таблицю різниці

$$\begin{array}{ccccc} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \ldots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 & \ldots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2 & \ldots & x_2-x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \ldots & x-x_n \end{array} \qquad (18)$$

Позначимо добуток елементів першої стрічки через D_0, другої – через D_1, і т.д. добуток елементів головної діагоналі (це многочлен $n+1$ степені) позначимо через $\Pi_{n+1}(x)$. Звідси випливає

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i}, \qquad (i = \overline{0,n}),$$

Отже, поліном Лагранжа у стислому вигляді записується

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i} . \qquad (19)$$

***Приклад* 3.** Для функції $y = f(x)$, яка задана таблицею

x_i	0	2	5	10
y_i	10	17,84	53,75	110

побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа, знайти значення побудованої функції в точці $x=1$ та визначити відносну похибку, якщо відомо що $f(1) = 11,99$.

Розв'язання. Згідно з умовою, оскільки задано чотири вузли, то поліном отримаємо третього степеня. Використовуючи формулу (17), маємо

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$
$$= 10\frac{(x-2)(x-5)(x-10)}{(0-2)(0-5)(0-10)} + 17,84\frac{(x-0)(x-5)(x-10)}{(2-0)(2-5)(2-10)} +$$
$$+53,75\frac{(x-0)(x-2)(x-10)}{(5-0)(5-2)(5-10)} + 110\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(10-0)(10-2)(10-5)}.$$

Виконавши відповідні дії, отримаємо поліном

$$L_3(x) = -0,1703x^3 + 2,804x^2 - 0,9952x + 10.$$

Підставимо у отриманий поліном $x = 1$: $L_3(1) = 11,6385$.

Таким чином $\delta(x=1) = \dfrac{11,99 - 11,6385}{11,99} = 0,02932.$

Для рівновіддалених вузлів інтерполювання $x_i = x_0 + ih$, формула Лагранжа (17) спрощується.

Введемо нову змінну $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Звідси $x - x_0 = ht, x - x_1 = x - (x_0 + h) = h(t-1), ..., x - x_n = h(t-n)$. Підставимо це у дріб формули (17), після спрощень, матимемо:

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} = (-1)^{n-i}\frac{1}{i!(n-i)!}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}.$$

Позначимо $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$, тоді поліном Лагранжа для рівновіддалених вузлів матиме вигляд

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)\,n!}y_i. \quad (20)$$

Коефіцієнти у (20), які є перед величинами y_i:

$$L_i^{(n)}(t) = (-1)^{n-i}C_n^i \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)\,n!}, \quad i = \overline{0,n},$$

називаються коефіцієнтами Лагранжа. Вони не залежать від вигляду функції $y = f(x)$ і величини кроку h, а залежать лише від i, n. Тому можна скласти таблиці для різних значень n і використовувати їх у різних задачах інтерполювання для рівновіддалених вузлів.

Поліном Лагранжа $L_n(x)$ співпадає з функцією $y = f(x)$ лише у вузлах інтерполяції, а в інших точках він представляє функцію з деякою похибкою, похибкою методу. Ця похибка (абсолютна похибка) оцінюється

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) \right|, \qquad (21)$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$. Якщо відома оцінка похідної $f^{(n+1)}(x)$ на $[a,b]$, то формула (21) дозволяє оцінити похибку, яку дає поліном Лагранжа.

***Приклад* 4.** Оцінити точність обчислення величини $\sin\frac{5}{180}\pi$ за інтерполяційною формулою Лагранжа, якщо в якості вузлів інтерполяції вибрані чотири значення аргумента: $x = 0, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{3}.$

Розв'язання. В даному випадку

$f(x) = \sin x, \quad n = 3, \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{3}, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \quad M_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (максимальне значення модуля функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$). Згідно оцінки (21), отримаємо

$$\left| \sin\frac{5\pi}{180} - L_4\left(\frac{5\pi}{180}\right) \right| \le \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4!}\left| \left(\frac{5\pi}{180} - 0\right)\left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right) \right| \approx 0,0009.$$

Задача інтерполяції у загальному випадку є дещо невизначена. Незважаючи на те що у вузлах інтерполяції нам відомі значення функції, у інших точках заданого відрізка значення функції можуть бути які завгодно. Тому інтерполяційні формули є зміст застосовувати для достатньо гладких функцій про яких відомо, що характер зміни функцій та їх похідних на заданому проміжку приблизно відповідає характеру зміни знайдених поліномів і їх відповідних похідних.

§ 3. Наближені методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Точні методи розв’язування систем лінійних рівнянь характеризуються тим, що виконуючи скінченну кількість обчислень (кроків) ми отримуємо точний розв’язок, якщо коефіцієнти при невідомих і вільні члени задані точно і у процесі обчислень не велось заокруглень. На практиці часто заокруглюються проміжні значення при складанні систем рівнянь і тому фактично така система описує наближено стан об’єкта. Тому часто розв’язують системи рівнянь наближеними методами використовуючи при цьому комп’ютерні програми.

1. ***Метод простої ітерації лінійних систем.*** Розглянемо систему n лінійних рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 = 0, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Переставимо рівняння системи таким чином, щоб діагональні елементи $a_{ii}^{(1)} \neq 0$ і запишемо їх у вигляді $a_{ii} = a_{ii}^{(1)} + a_{ii}^{(2)}$. Систему (1) у вигляді

$$\begin{cases} -a_{11}^{(1)}x_1 = b_1 + a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ -a_{22}^{(1)}x_2 = b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}^{(2)}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ .... \\ -a_{nn}^{(1)}x_n = b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}^{(2)}x_n. \end{cases}$$

Звідси, поділивши кожне рівняння системи відповідно на $-a_{11}^{(1)}, -a_{22}^{(1)}, ..., -a_{nn}^{(1)}$ та перепозначивши коефіцієнти

$$\alpha_{ii} = -\frac{a_{ii}^{(2)}}{a_{ii}^{(1)}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}^{(1)}}, (i \neq j), \quad \beta_j = -\frac{b_j}{a_{ii}^{(1)}}, \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n, \\ .... \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

У ряді випадків, наприклад, у ручному режимі розв'язання зручно брати $a_{ii}^{(2)}=0, \quad (i=\overline{1,n})$, тоді невідомі x_i не входять у праву частину $i-$го рівняння.

Приймемо у якості нульового наближення значення невідомих $x_1^{(0)}=\beta_1, x_2^{(0)}=\beta_2, ..., x_n^{(0)}=\beta_n$. Підставляючи їх у праву частину системи (2), отримаємо перше наближення

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=\beta_1+\alpha_{11}x_1^{(0)}+\alpha_{12}x_2^{(0)}+...+\alpha_{1n}x_n^{(0)}, \\ x_2^{(1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(0)}+\alpha_{22}x_2^{(0)}+...+\alpha_{2n}x_n^{(0)}, \\ \quad .... \\ x_n^{(1)}=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(0)}+\alpha_{n2}x_2^{(0)}+...+\alpha_{nn}x_n^{(0)}. \end{cases} \tag{3}$$

Продовжуючи аналогічні підстановки, отримаємо $k+1-$е наближення

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\beta_1+\alpha_{11}x_1^{(k)}+\alpha_{12}x_2^{(k)}+...+\alpha_{1n}x_n^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k)}+\alpha_{22}x_2^{(k)}+...+\alpha_{2n}x_n^{(k)}, \\ \quad .... \\ x_n^{(k+1)}=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(k)}+\alpha_{n2}x_2^{(k)}+...+\alpha_{nn}x_n^{(k)}. \end{cases} \tag{4}$$

Описаний принцип вибору нульового наближення та схема знаходження наближень (4) називається *простою ітерацією*. Процес послідовних наближень є збіжним якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k+1)}$.

Умова збіжності: процес розв'язання системи (1) є збіжним якщо матриця коефіцієнтів при невідомих є матрицею з діагональною перевагою, тобто для всіх значень i виконується умова $(i=\overline{1,n})$

$$|a_{ii}|>|a_{i1}|+|a_{i2}|+...+|a_{ii-1}|+|a_{ii+1}|+...+|a_{in}|. \tag{5}$$

Проте, матриця коефіцієнтів при невідомих часто не задовольняє умови (5), однак цього можна інколи добитися перестановкою рівнянь системи.

Якість наближеного розв'язку можна оцінити порівнянням $k+1-$го наближення з $k-$м наближенням. Вважаючи $k+1-$е наближення точним значенням, визначають відносну похибку $\delta_i^{(k)}=\dfrac{\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|}{\left|x_i^{(k+1)}\right|}$. Якщо всі $\delta_i^{(k)}$ не перевищують деякої заданої величини (потрібної точності) то процес завершено і за розв'язок беруть $k+1-$е наближення.

***Приклад* 1.** Розв'язати методом простої ітерації систему рівнянь з відносною похибкою яка не перевищує 5%

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 8 = 0, \\ 0,5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6,5 = 0, \\ 20x_1 + x_2 + x_3 - 23 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Переставимо рівняння так щоб виконувались умови (5)

$$\begin{cases} 20x_1 + x_2 + x_3 - 23 = 0, \\ 0,5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6,5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 8 = 0. \end{cases}$$

Працюючи в ручному режимі, визначимо x_1, x_2, x_3 відповідно з першого, другого і третього рівняння попередньої системи, матимемо:

$$x_1 = -0,05x_2 - 0,05x_3 + 1,15,$$
$$x_2 = 0,1x_1 + 0,6x_3 + 1,3,$$
$$x_3 = -0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,8.$$

В якості нульового наближення візьмемо $x_1^{(0)} = 1,15;\quad x_2^{(0)} = 1,3;\quad x_3^{(0)} = 0,8$. Перше наближення згідно з формулою (3)

$$x_1^{(1)} = -0,05 \cdot 1,3 - 0,05 \cdot 0,8 + 1,15 = 1,0525,$$
$$x_2^{(1)} = 0,1 \cdot 1,15 + 0,6 \cdot 0,8 + 1,3 = 1,895,$$
$$x_3^{(1)} = -0,2 \cdot 1,15 + 0,2 \cdot 1,3 + 0,8 = 0,83.$$

Знайдемо відносні похибки нульового наближення

$$\delta_1^{(0)} = \frac{|1,0525 - 1,15|}{|1,0525|} = 0,092637 > 0,05,$$

$$\delta_2^{(0)} = \frac{|1,3 - 1,895|}{|1,895|} = 0,31398 > 0,05,$$

$$\delta_3^{(0)} = \frac{|0,83 - 0,8|}{|0,8|} = 0,0375 < 0,05.$$

Оскільки потрібної точності $\delta_i < 0,05$ ще не досягнуто, знаходимо друге наближення та похибки першого наближення

$$x_1^{(2)} = -0,05 \cdot 1,895 - 0,05 \cdot 0,83 + 1,15 = 1,0138,$$
$$x_2^{(2)} = 0,1 \cdot 1,0525 + 0,6 \cdot 0,83 + 1,3 = 1,9033,$$
$$x_3^{(2)} = -0,2 \cdot 1,0525 + 0,2 \cdot 1,895 + 0,8 = 0,9685.$$
$$\delta_1^{(1)} = \frac{|1,0138 - 1,0525|}{|1,0138|} = 0,038224 < 0,05,$$
$$\delta_2^{(1)} = \frac{|1,9033 - 1,895|}{|1,9033|} = 0,043347 < 0,05,$$
$$\delta_3^{(1)} = \frac{|0,9685 - 0,83|}{|0,9685|} = 0,14301 > 0,05.$$

Знаходимо третє наближення та похибки

$$x_1^{(3)} = -0,05 \cdot 1,9033 - 0,05 \cdot 0,9685 + 1,15 = 1,0064,$$
$$x_2^{(3)} = 0,1 \cdot 1,0138 + 0,6 \cdot 0,9685 + 1,3 = 1,9825,$$
$$x_3^{(3)} = -0,2 \cdot 1,0138 + 0,2 \cdot 1,9033 + 0,8 = 0,9979.$$
$$\delta_1^{(2)} = \frac{|1,0064 - 1,0138|}{|1,0064|} = 0,0073033 < 0,05,$$
$$\delta_2^{(2)} = \frac{|1,9825 - 1,9033|}{|1,9825|} = 0,039975 < 0,05,$$
$$\delta_3^{(2)} = \frac{|0,9979 - 0,9685|}{|0,9979|} = 0,029453 < 0,05.$$

Отже, результати третього наближення можна прийняти в якості шуканого розв'язку. Зауважимо, що точним розв'язком системи є значення $x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 1$ до яких можна наблизитись методом ітерації з довільною, наперед заданою, точністю.

Метод простої ітерації володіє унікальною властивістю яка полягає в тому, що якщо у процесі обчислень була допущена помилка, метод сам виправляє її, проте це збільшить кількість ітерацій.

2. ***Метод Зейделя розв'язування лінійних систем.*** У методі простої ітерації процес обчислень невідомих у кожному наближенні заснований на значеннях попереднього наближення. Метод Зейделя при обчисленні невідомого $x_i^{(k+1)}$ в $k+1-$м наближенні враховує уже обчислені в цьому наближенні величини $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$,...., $x_{i-1}^{(k+1)}$. Умови збіжності методу Зейделя такі ж як у методі ітерації (перевага діагональних елементів матриці коефіцієнтів при невідомих). Метод Зейделя швидше приводить до результату. Продемонструємо це на попередньому прикладі. Нульове наближення таке ж $x_1^{(0)} = 1,15$; $x_2^{(0)} = 1,3$; $x_3^{(0)} = 0,8$.

Перше наближення

$$x_1^{(1)} = -0,05x_2^{(0)} - 0,05x_3^{(0)} + 1,15 = -0,05 \cdot 1,3 - 0,05 \cdot 0,8 + 1,15 = 1,0525,$$

$$x_2^{(1)} = 0,1x_1^{(1)} - 0,6x_3^{(0)} + 1,3 = 0,1 \cdot 1,0525 - 0,6 \cdot 0,8 + 1,3 = 1,8853,$$

$$x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(1)} + 0,2x_2^{(1)} + 0,8 = -0,2 \cdot 1,0525 + 0,2 \cdot 1,8853 + 0,8 = 0,96655.$$

Друге наближення

$$x_1^{(2)} = -0,05x_2^{(1)} - 0,05x_3^{(1)} + 1,15 = -0,05 \cdot 1,8853 - 0,05 \cdot 0,96655 + 1,15 = 1,00740,$$

$$x_2^{(2)} = 0,1x_1^{(2)} - 0,6x_3^{(1)} + 1,3 = 0,1 \cdot 1,00740 - 0,6 \cdot 0,96655 + 1,3 = 1,98067,$$

$$x_3^{(2)} = -0,2x_1^{(2)} + 0,2x_2^{(2)} + 0,8 = -0,2 \cdot 1,00740 + 0,2 \cdot 1,98067 + 0,8 = 0,99465.$$

Результати другого наближення методом Зейделя практично співпадають із значеннями невідомих, отриманих методом простої ітерації у третьому наближенні.

Вправа. Методами простої ітерації та методом Зейделя розв'язати систему рівнянь, щоб відносна похибка кожного значення не перевищувала 5%. Обчислення проводити до п'яти значущих цифр

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 10x_4 + 114 = 0, \\ 2x_1 + 0,5x_3 + 19,5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 3 = 0, \\ 0,8x_1 + 5,6x_2 + x_4 + 26 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 1,7526$, $x_3 = 10,215$, $x_4 = -4,0217$.

3. ***Метод Гаусса.*** Розв'язування систем лінійних рівнянь за методом Гаусса описано у розділі 1 (§3). Якщо система лінійних рівнянь громіздка або коефіцієнти десяткові дроби з кількома значущими цифрами після коми, то в цьому випадку зручно реалізовувати розв'язування на ЕВМ. Для цього достатньо вказати алгоритм, згідно з яким матриця A (коефіцієнтів біля невідомих) перетворюється до трикутного вигляду і вказати відповідні перетворення правих частин системи.

Не проводячи повних викладок, запишемо як перетворюються коефіцієнти системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (6)$$

у ході виключення невідомих із системи:

$$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}, \quad k, j = 1,2,...,n,$$

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k+1, k+2,...,n, \quad k = 1,2,...,n, \quad (7)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ij}^{(k-1)} c_{kj}, \quad i, j = k+1, k+2,...,n, \quad k = 1,2,...,n-1. \quad (8)$$

Обчислення правих частин трикутної системи здійснюється за формулами

$$b_k^{(0)} = b_k, \quad y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1,2,...,n, \quad (9)$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, \quad i = k+1, k+2,...,n. \quad (10)$$

Коефіцієнти c_{ij} і праві частини $y_i, \quad i = 1,2,...,n, \quad j = i+1, i+2,...,n$ зберігаються у пам'яті комп'ютера і використовуються при здійсненні оберненого ходу

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = n-1, n-2,...,1, \quad x_n = y_n. \quad (11)$$

Основним обмеженням методу є припущення про те, що не всі елементи $a_{kk}^{(k-1)}$ на які проводиться ділення відмінні від нуля. Число $a_{kk}^{(k-1)}$ називається *ведучим елементом на* $k-$*му кроці виключення*. Навіть тоді, коли ведучий елемент близький до нуля у процесі обчислень може накопичуватись значна похибка. Проте вихід із такої ситуації є. Він полягає в тому, що у якості ведучого елемента беруть не $a_{kk}^{(k-1)}$, а коефіцієнт який найбільший за модулем. Тобто виключають не наступну за номером невідому, а невідому коефіцієнт при якій найбільший.

Приклад **2.** Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса використавши стандартну програму

$$\begin{cases} 2,6x_1 - 3,4x_2 - 0,6x_3 + 0,4x_4 = 1,8 \\ 1,8x_1 + 1,2x_2 - 1,8x_3 + 1,54x_4 = 2,8 \\ 0,88x_1 - 0,7x_2 + 2,6x_3 - 0,68x_4 = -1,6 \\ 1,2x_1 - 1,48x_2 + 0,8x_3 - 1,58x_4 = -1,32 \end{cases}$$

```
Program Gauss;
var a:array[1..20,1..21] of real;
    b:array[1..20,1..21] of real;
    x:array[1..20] of real;
    prom:real;
    n,n1,i,j,j1,k:integer;
begin
writeln('n-?');
readln(n);
n1:=n+1;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n1 do
begin
writeln('a[',i,',',j,']-?');
readln(a[i,j]);
b[i,j]:=a[i,j];
end;
for i:=1 to n do
begin
prom:=a[i,j];
for j:=i to n1 do
a[i,j]:=a[i,j]/prom;
for k:=i+1 to n do
prom:=a[k,i];
begin
for j:=1 to n1 do
a[k,j]:=a[k,j] - a[i,j]*prom;
end;
end;
x[n]:=a[n,n+1]/a[n,n];
for j:=n-1 downto 1 do
begin
```

```
x[j]:=a[j,n1];
for j1:=j+1 to n do
x[j]:=x[j]-a[j,j1]*x[j1];
end;
for i:=1 to n do
writeln('x[',i,']=',x[i]:5:3;
end.
```

Результат: X[1]=2,73916
X[2]=1,61536
X[3]=-2,58081
X[4]=-3,44523.

§ 4. Чисельне диференціювання

Задача чисельного диференціювання полягає у наближеному обчисленні похідних функції $f(x)$ за заданими значеннями цієї функції в скінченній кількості точок відрізка $[a,b]$: $x_i = a+ih,\quad i=\overline{0,n}$. В якості наближеного значення $f'(x)$ можна взяти, наприклад, довільне із різницевих співвідношень

$$f_{\bar{x},i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h},\quad f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h},\quad f_{\overset{o}{x},i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \tag{1}$$

які називаються відповідно лівою, правою та центральною різницевими похідними функції $f(x)$ у точці $x = x_i$.

Розглянемо, наприклад, ліву похідну $f_{\bar{x},i} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h} = \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$. З формули Тейлора

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi),\quad \xi \in (x-h,x),$$

маємо:

$$f_{\bar{x},i} = f'(x_i) - \frac{h}{2} f''(\xi_i^{(1)}). \tag{2}$$

Аналогічно

$$f_{x,i} = f'(x_i) + \frac{h}{2} f''(\xi_i^{(2)}), \tag{3}$$

$$f_{\overset{o}{x},i} = f'(x_i) + \frac{h^2}{6} f'''(\xi_i^{(3)}), \tag{4}$$

де $\xi_i^{(j)}$, $j=\overline{0,3},$ – точки із інтервалу (x_{i-1},x_{i+1}). Формули (2), (3), (4) у скороченому вигляді можна записати

$$f_{\bar{x},i}=f_i'+O(h),\quad f_{x,i}=f_i'+O(h),\quad f_{\overset{o}{x},i}=f_i'+O(h^2).$$

Другу похідну в точці x_i можна замінити співвідношенням

$$f_{\bar{x}x,i}=\frac{1}{h}(f_{x,i}-f_{\bar{x},i})=\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}. \tag{5}$$

Такі різницеві співвідношення добре наближують похідні лише у випадку коли крок h достатньо малий. Щоб не виникало суттєвого зниження точності потрібно слідкувати за тим, щоб похибка заокруглення мала цей самий порядок, що і похибка апроксимації.

Формули чисельного диференціювання можна отримати шляхом диференціювання інтерполяційного многочлена $L_n(x)$. В якості прикладу запишемо формули чисельного диференціювання використовуючи многочлен Лагранжа $L_{2,i}(x)$, побудованого за трьома точками x_{i-1},x_i,x_{i+1} з нерівномірною сіткою.

Многочлен $L_{2,i}(x)$ має вигляд

$$L_{2,i}(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h_i(h_i+h_{i+1})}f_{i-1}-\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h_ih_{i+1}}f_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}f_{i+1} \tag{6}$$

Звідси отримаємо

$$L_{2,i}'(x)=\frac{(2x-x_i-x_{i+1})}{h_i(h_i+h_{i+1})}f_{i-1}-\frac{(2x-x_{i-1}-x_{i+1})}{h_ih_{i+1}}f_i+\frac{(2x-x_{i-1}-x_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}f_{i+1}. \tag{7}$$

Вираз (7) можна прийняти за наближене значення похідної функції $f'(x)$ у довільній точці $x\in\left[x_{i-1},x_{i+1}\right]$. Це зручно записати так

$$L_{2,i}'(x)=\frac{1}{\bar{h}_i}\left[(x-x_{i-0,5})\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}+(x_{i+0,5}-x)\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right], \tag{8}$$

де $\bar{h}_i=0,5(h_i+h_{i+1}),\quad x_{i-0,5}=x_i-0,5h_i$. Зокрема, для $x=x_i$, отримуємо

$$L_{2,i}'(x_i)=\frac{1}{2}\left[\frac{h_i}{\bar{h}_i}\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i}\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right], \tag{9}$$

і якщо сітка рівномірна, $h_{i+1}=h_i=h$, то матимемо центральну різницеву похідну, $L_{2,i}'(x_i)=f_{\overset{o}{x},i}$.

Використання многочленна першої степені таким же чином можна отримати односторонні різницеві похідні $f_{\bar{x},i}$ і $f_{x,i}$.

Використовуючи другу похідну многочленна $L_{2,i}(x)$, отримаємо наближений вираз для $f''(x)$ на відрізку $\left[x_{i-1}, x_{i+1}\right]$:

$$f''(x) \approx L''_{2,i}(x) = \frac{1}{\bar{h}_i}\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right]. \qquad (10)$$

На рівномірній сітці, (10) співпадає із другою різницевою похідною $f_{\bar{x}x,i}$.

Зрозуміло, що для наближеного обчислення похідних вищих порядків уже не достатньо $L_{2,i}(x)$, треба брати многочлени вищого порядку і тим самим збільшувати кількість вузлів, які беруть участь у апроксимації.

Порядок похибки апроксимації залежить як від порядку інтерполяційного многочленна так і від розміщення вузлів інтерполяції. Отримаємо вираз для похибки апроксимації, яка виникає замінюючи $f'(x)$ виразом $L'_{2,i}(x)$. Будемо вважати, що величини h_i, h_{i+1} мають однаковий порядок малості при подрібленні сітки. За формулою Тейлора у припущенні обмеженості $f^{IV}(x)$, маємо:

$$f_{i+k} = f(x) + (x_{i+k} - x) f'(x) + \frac{(x_{i+k}-x)^2}{2} f''(x) + \frac{(x_{i+k}-x)^3}{6} f'''(x) + O(h^4),$$

де $k = 0, \pm 1$, $h = \max(h_i, h_{i+1})$. Звідси отримаємо наступні різницеві співвідношення:

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = f'(x) - (x - x_{i-0,5}) f''(x) + \left(\frac{(x - x_{i-0,5})^2}{2} + \frac{h_i^2}{24}\right) f'''(x) + O(h^3), \qquad (11)$$

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = f'(x) - (x_{i+0,5} - x) f''(x) + \left(\frac{(x_{i+0,5} - x)^2}{2} + \frac{h_{i+1}^2}{24}\right) f'''(x) + O(h^3). \qquad (12)$$

Підставляючи (11) і (12) у вираз для різницевої похідної (8) та звівши подібні члени, на проміжку $\left[x_{i-1}, x_{i+1}\right]$, отримаємо:

$$L'_{2,i}(x) = f'(x) - \left[\frac{(x - x_i)^2}{2} - \frac{(h_{i+1} - h_i)(x - x_i)}{3} - \frac{h_i h_{i+1}}{6}\right] f'''(x) + O(h^3). \qquad (13)$$

Звідси видно, що різницевий вираз (8) апроксимує похідну $f'(x)$ з другим порядком. Дещо гірше вираз (10) апроксимує другу похідну. Із (5) видно, що на рівномірній сітці в точці $x = x_i$ має місце апроксимація $O(h^2)$. На нерівномірній сітці похибка апроксимації буде мати тільки перший порядок. Щоб це побачити підставимо (11) і (12) у вираз (10)

$$L''_{2,i}(x) = f''(x) + \left(x_i - x + \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \right) f'''(x) + O(h^2).$$

Тут навіть на рівномірній сітці другий порядок має місце лише у точці $x = x_i$, а у інших точках – апроксимація тільки першого порядку.

Вправа. Задано емпіричну залежність між тиском вуглекислого газу в холодильнику і температурою

t^o	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	$+3$
$p(t)$	$20,0$	$21,8$	$23,5$	$25,2$	$27,0$	$28,5$	$30,0$	$31,4$	$33,0$

Знайти $\frac{dp}{dt}$ для $t = -8^o C$.

Відповідь: $\frac{dp}{dt}\Big|_{t=-8} = 0,459.$

§ 5. Чисельне інтегрування

В розділі 9 вже згадувалось про наближені методи знаходження визначених інтегралів. В цьому параграфі розглянемо їх більш детально і оцінимо похибки розглянутих методів. Наближене обчислення визначених інтегралів

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

базується на заміні інтеграла скінченною сумою

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k), \tag{2}$$

де c_k – числові коефіцієнти, x_k – точки відрізка $[a,b]$, $k = \overline{0,n}$. Наближена рівність

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

називається *квадратурною формулою*, а сума (2) – *квадратурною сумою*. Різниця

$$\psi_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

називається *похибкою квадратурної формули*. Похибка залежить від того як розміщені вузли x_k, а також від вибору коефіцієнтів c_k. Оцінка похибки в наведених нижче прикладах передбачає що функція $f(x)$ достатньо гладка.

Введемо на $[a,b]$ рівномірну сітку з кроком k:

$$x_i = a + ih, \quad i = \overline{0,n}, \quad b - a = hn$$

і представимо інтеграл (1) у вигляді суми інтегралів

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \tag{3}$$

Тому для побудови формул чисельного інтегрування на всьому відрізку $[a,b]$ досить побудувати квадратурну формулу для інтеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{4}$$

на частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ і скористатись формулою (3).

1. ***Формула прямокутників.*** Замінимо інтеграл (4) виразом $f(x_{i-0,5})h$, де $x_{i-0,5} = x_i - 0,5h$. Геометрично це означає, що площа криволінійної трапеції заміняється площею прямокутника

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-0,5})h. \tag{5}$$

Формула (5) називається *формулою прямокутників на відрізку* $[x_{i-1}, x_i]$. Похибка методу (5) визначається величиною

$$\psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-0,5})h,$$

яку легко оцінити за допомогою формули Тейлора. Запишемо ψ_i у вигляді

$$\psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_{i-0,5}) \right) dx \tag{6}$$

і скористаємось розкладом

$$f(x)=f(x_{i-0,5})+(x-x_{i-0,5})f'(x_{i-0,5})+\frac{(x-x_{i-0,5})^2}{2}f''(\xi_i),$$

де $\xi_i=\xi_i(x)\in[x_{i-1},x_i]$. Тоді із (6) отримаємо

$$\psi_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{(x-x_{i-0,5})^2}{2}f''(\xi_i)dx\,.$$

Позначимо $M_{2,i}=\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\left|f''(x)\right|$, оцінимо ψ_i таким чином

$$\left|\psi_i\right|\le M_{2,i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{(x-x_{i-0,5})^2}{2}dx=\frac{h^3}{24}M_{2,i}\,.$$

Таким чином похибка формули прямокутників на частинному відрізку оцінюється

$$\left|\psi_i\right|\le\frac{h^3}{24}M_{2,i}\,. \tag{7}$$

Сумуючи всі похибки на кожному відрізку отримаємо загальну похибку методу прямокутників

$$\left|\psi\right|\le\frac{h^3n}{24}M_2=\frac{h^2(b-a)}{24}M_2\,, \tag{8}$$

де $M_2=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$. Отже, похибка методу є величина $O(h^2)$. В цьому випадку говорять що квадратурна формула має *другий порядок точності*.

Сумуючи рівності (5) отримаємо *складену формулу прямокутників* на всьому відрізку $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^n f(x_{i-0,5})h\,. \tag{9}$$

2. *Формула трапецій*. На відрізку $[x_{i-1},x_i]$ ця формула має вигляд

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx\approx\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h \tag{10}$$

і виходить вона шляхом заміни підінтегральної функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом першої степені, який побудований за вузлами x_{i-1},x_i (див. §2 фор.(17)), тобто

$$L_{1,i} = \frac{1}{h}\left[(x - x_{i-1})f(x_i) - (x - x_i)f(x_{i-1})\right].$$

Для оцінки похибки досить врахувати

$$f(x) - L_{1,i} = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2} f''(\xi_i(x)).$$

Звідси отримаємо

$$\psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - L_{1,i}(x))dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2} f''(\xi_i(x))dx.$$

Тому

$$|\psi_i| \le \frac{M_{2,i}h^3}{12} \qquad (11)$$

Оцінку (11) покращити не можна, тому що рівність у ній досягається наприклад, для $f(x) = (x - x_i)^2$.

Остаточна, *складена формула трапецій* має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}h = h(0,5f_0 + f_1 + ... + f_{n-1} + 0,5f_n), \qquad (12)$$

де $f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,n}, \quad b - a = hn$.

Похибка цієї формули

$$|\psi| \le \frac{h^2(b-a)}{12}M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

Таким чином, формула трапецій, як і формула прямокутників, має другий порядок точності, $O(h^2)$, проте похибка оцінюється величиною у два рази більшою ніж у формулі прямокутників (див. (9)).

3. ***Формула Сімпсона.*** Апроксимація інтеграла за формулою Сімпсона передбачає заміну підінтегральної функції параболою, яка на відрізку $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ проходить через точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ і $(x_{i-0,5}, f(x_{i-0,5}))$, тобто вважатимемо наближено $f(x) \approx L_{2,i}$ (інтерполяційний многочлен Лагранжа другого степеня)

$$L_{2,i}(x)=\frac{2}{h^2}\left\{(x-x_{i-0,5})(x-x_i)f_{i-1}-2(x-x_{i-1})(x-x_i)f_{i-0,5}+(x-x_i)(x-x_{i-0,5})f_i\right\}. \tag{13}$$

Про інтегрувавши, отримаємо

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx=\frac{h}{6}(f_{i-1}+4f_{i-0,5}+f_i),\quad h=x_i-x_{i-1}.$$

Таким чином маємо наближену рівність

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx\frac{h}{6}(f_{i-1}+4f_{i-0,5}+f_i), \tag{14}$$

яка називається *формулою Сімпсона* або *формулою парабол* на відрізку $\left[x_{i-1},x_i\right]$. На всьому відрізку $\left[a,b\right]$ формула Сімпсона має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{6}(f_{i-1}+4f_{i-0,5}+f_i)=$$

$$=\frac{h}{6}\left[f_0+f_n+2(f_1+f_2+...+f_{n-1})+4(f_{0,5}+f_{1,5}+...+f_{n-0,5}\right].$$

Щоб не користуватись дробовими індексами, можна позначити $x_i=a+0,5hi,\quad i=\overline{0,2n},$ і записати формулу Сімпсона у зручному вигляді

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6n}\left[f_0+f_{2n}+2(f_2+f_4+...+f_{2n-2})+4(f_1+f_3+...+f_{2n-1}\right]. \tag{15}$$

Зауважимо, без виведення, що похибка ψ_i, має оцінку

$$\left|\psi_i\right|\le\frac{h^5}{2880}M_{4,i},\quad M_{4,i}=\sup_{x\in\left[x_{i-1},x_i\right]}\left|f^{IV}(x)\right|,$$

А похибка формули (15)

$$\left|\psi\right|\le\frac{h^4(b-a)}{2880}M_4,\quad M_4=\sup_{x\in\left[a,b\right]}\left|f^{IV}(x)\right|.$$

Отже, формула Сімпсона набагато точніша ніж попередні формули, оскільки на частинному відрізку має точність $O(h^5)$, а на всьому відрізку інтегрування $O(h^4)$.

Приклад. Знайти наближене значення визначеного інтеграла $0,56\int_{1}^{5}\sqrt{3x^3+\sin x}\,dx$ скориставшись методами: прямокутників та методом Сімпсона і порівняти знайдені результати скориставшись відповідними програмами

метод прямокутників

```
program ko1;
label m;
var a,b,x,h,exs,s1,s2:real;i,n:longint;
begin
writeln('a,b');
readln(a,b);
writeln('n,eps-?');
readln(n,eps);
s1:=0;
m:h:=(b-a)/n;
s2:=0;
x:=a;
for i:=1 to (n-1) do;
begin
s2:=s2+0,56*(sqrt(3*x*x*x+sin(x)));
x:=x+h;
end;
if abs(s2-s1)>eps then
begin
s1:=s2; n:=2*n; goto m;
end;
writeln('int=', s2:7:5, 'n=', n:6);
end.
```

метод Сімпсона

```
program ko2;
label 50,100;
const eps=0.001;
var x,y,a,b,h,k,s1,s2,s3,s4:real;
n,n2,n1,i:longint;
function f1(x:real):real;
begin
f1:=0,56*(sqrt(3*x*x*x+sin(x)));
end;
begin
a:=1;
b:=5;
n:=10;
50:h:=(b-a)/n;
x:=a-h;
s1:=0; s2:=0; n1:=n div2;
for i:=1 to n1 do
begin
x:=x+2*h;
s1:=s1+f1(x);
end;
n2:=n1-1;
x:=a;
for i:=1 to n2 do
begin
x:=x+2*h;
s2:=s2+f1(x);
end;
s3:=(h/3)*(f1(a)+f1(b)+2*s1+4*s2);
if abs(s4-s3)<eps then goto 100;
s4:=s3;
```

Розв'язок:
Int=21.387452 n=200 eps=0,01

```
s3:=0;
n:=2*n; goto 50;
100:writeln('int=',s4:7:6,'n',n:7);
end.
```

Розв'язок:
Int=21.388244 n=20480 eps=0,01.

Як бачимо із наведеного прикладу, результати обчисленого інтеграла відрізняються на тисячні одиниці.

§ 6. Розв'язування нелінійних рівнянь

Нехай задана функція $f(x)$ дійсної змінної. Задача знаходження коренів рівняння

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

як правило, розв'язується у два етапи. Спочатку вивчається розміщення коренів цього рівняння і їх відокремлення (виділення проміжку у якому розміщений лише один корінь), крім того вивчається питання про кратність коренів. На другому етапі, використовуючи задане початкове наближення, будують ітераційний процес, який уточнює наближене значення кореня, а також проводять оцінку похибки знайденого наближеного значення. Ітераційні процеси провадять комп'ютерні програми у яких реалізовується наперед задана точність обчислень.

Розглянемо два методи відокремлення (відділення) дійсних коренів рівняння (1). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a,b]$. На цьому проміжку знайдемо значення функції у точках x_k $k=\overline{0,n}$. Якщо виявиться, що деякі значення $f(x_k)$, $f(x_{k+1})$ мають різні знаки, то це означатиме що на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ є хоча би один дійсний корінь. Потім інтервал $[x_k, x_{k+1}]$ можна розбити на більш дрібні інтервали і за допомогою тієї ж процедури уточнити розміщення кореня чи коренів. Другим способом відділення дійсних коренів є метод бісекції (ділення пополам). Нехай, для визначеності, наприклад, $f(a)>0$, $f(b)<0$. Обчислимо значення функції в точці $x_0=\dfrac{a+b}{2}$. Якщо $f(x_0)<0$, то шуканий корінь розміщений у інтервалі (a,x_0), якщо ж $f(x_0)>0$, то шуканий корінь є у інтервалі (x_0,b).

Із цих двох інтервалів (a, x_0) і (x_0, b) вибираємо той на краях якого функція має різні знаки. Далі, знаходимо середину вибираного інтервалу x_1, знаходимо значення функції в цій точці і повторяємо вищеописаний процес. Ділення пополам продовжуємо доти, поки довжина вибраного інтервалу не буде меншою заданої точності. Середину цього останнього вибраного інтервалу беремо у якості наближеного значення кореня рівняння (1).

Зауважимо, що якщо на (a,b) є декілька коренів, то вказаний процес зійдеться до одного із них, причому наперед невідомо якому. У цьому випадку, якщо корінь $x = x_r$ кратності m виділений, то для пошуку інших коренів на цьому відрізку розглядають функцію

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_r)^m}$$

і для неї повторяється процес знаходження кореня за вказаною вище схемою.

1. ***Метод простої ітерації.*** У методі простої ітерації рівняння (1) заміняється еквівалентним рівнянням

$$x = g(x) \tag{2}$$

і ітерації проводять за схемою

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0,1,2,..., \tag{3}$$

причому задається початкове наближення x_0. Для збіжності ітераційного процесу важливе значення має вибір функції $g(x)$. Цю функцію можна задавати різними способами, однак вона за звичай вибирається у вигляді

$$g(x) = x + \tau(x) f(x), \tag{4}$$

причому функція $\tau(x)$ не змінює знака на цьому відрізку де шукається корінь.

Зауважимо, що у формі методу простої ітерації (3) можна записати довільний однокроковий ітераційний метод. Зокрема, якщо $\tau(x) = \tau = \text{const}$, то отримаємо *метод релаксації*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n), \quad n = 0,1,..., \tag{5}$$

для якого $g'(x) = 1 + \tau f'(x)$, і метод збіжний за умови

$$-2 < \tau f'(x_*) < 0. \tag{6}$$

Якщо в деякому околі кореня виконуються умови

$$f'(x) < 0, \quad 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1, \tag{7}$$

то метод релаксації збіжний для $\tau \in (0,\ 2/M_1)$.

2. *Метод Ньютона.* Нехай початкове наближення x_0 відомо. Замінимо $f(x)$ відрізком ряду Тейлора

$$f(x) \approx H_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \tag{8}$$

і за наступне наближення x_1 візьмемо корінь рівняння $H_1(x) = 0$, тобто

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

У загальному випадку це виглядає так. Якщо відома ітерація x_k, то наступне наближення згідно *методу Ньютона* визначається

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{9}$$

Метод Ньютона називають також *методом дотичних*, так як нове наближення x_{k+1} є абсцисою точки перетину дотичної, проведеної в точці $(x_k, f(x_k))$ до графіка функції $f(x)$, з віссю OX.

Зауважимо дві особливості цього методу. Цей метод має *квадратичну збіжність*, тобто на відміну від лінійних задач похибка на наступній ітерації пропорційна до квадрату похибки на попередній ітерації $x_{k+1} - x_k = O((x_k - x_*)^2)$. Швидка збіжність методу Ньютона гарантується лише за умови коли початкове наближення достатньо близьке до точного значення. Якщо початкове наближення вибране невдало, то метод може збігатися повільно або зовсім не бути збіжним.

Модифікований метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{10}$$

застосовують у тому випадку, коли хочуть виключити багатократне обчислення похідної. Метод (10) вимагає менше умов до початкового наближення x_0, однак володіє лише *лінійною збіжністю*, тобто $x_{k+1} - x_k = O(x_k - x_*)$. Крім цього, якщо $f'(x_0) \neq 0$, то в (10) в ході ітерацій ніде вже не виникне ділення на нуль.

3. *Метод січних.* Цей метод отримаємо із методу Ньютона (9) заміною $f'(x_k)$ розділеною різницею

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

який на відміну від раніше розглядуваних методів є двокроковим, тобто нове наближення x_{k+1} визначається двома попередніми операціями x_k та x_{k-1}. У методі (11) необхідно задавати два початкові наближення x_0 та x_1.

Геометрична інтерпретація методу дотичних полягає у наступному: через точки $\left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$ і $\left(x_k, f(x_k)\right)$ проводиться пряма, абсциса точки перетину цієї прямої з віссю OX і є новим наближенням x_{k+1}. Інакше кажучи, на відрізку $\left[x_{k-1}; x_k\right]$ функція інтерполюється многочленом першого степеня і за наступне наближення x_{k+1} приймається корінь цього многочлена.

Питання збіжності та оцінки похибки наведених вище методів детально описані у [20] глава 5.

§ 7. Чисельні методи розв'язування задачі Коші

Існують дві групи чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь: багатокрокові різницеві методи і методи Рунге-Кутта. Розглянемо задачу Коші для одного рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y), \quad y(0) = y_0, \quad x \geq 0. \tag{1}$$

Введемо на осі OX рівномірну сітку з кроком $h > 0$, тобто розглянемо множину точок $x_i = hi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$.

Позначимо через $y(x)$ точний розв'язок задачі (1), а через $y_i = y(x_i) -$ наближений розв'язок. Зауважимо, що наближений розв'язок є сітковою функцією, тобто визначений тільки у точках сітки.

1. ***Метод Ейлера.*** Рівняння (1) заміняємо відповідним різницевим рівнянням

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i; y_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad y(0) = y_0. \tag{2}$$

Розв'язок рівняння (2) знаходиться явним чином за рекурентною формулою

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

З використанням наближених методів основним залишається питання збіжності методу. Питання збіжності наближеного методу можна формулювати по-різному. Щодо методу Ейлера (3) то найбільш розповсюдженим отримало поняття *збіжності при* $h \to 0$.

Функція $\psi_i = -\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + f(x_i; y(x_i))$ називається нев'язкою або похибкою апроксимації різницевого рівняння (2) на розв'язок заданого рівняння (1). Видно, що нев'язка являє собою результат підстановки точного розв'язку $y = y(x)$ у ліву частину різницевого рівняння (2). Якщо наближений розв'язок y_i співпадає з точним $y(x_i)$ то нев'язка дорівнює нулю. Кажуть що різницевий метод апроксимує початкове диференціальне рівняння, якщо $\psi_i \to 0$ коли $h \to 0$.

Порядок апроксимації методу Ейлера (2) неважко знайти використовуючи розвинення у ряд Тейлора. Оскільки

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'(x_i) + O(h), \tag{4}$$

то в силу рівняння (1) $\psi_i = -y(x_i) + f(x_i; y(x_i)) + 0(h) = 0(h)$, тобто метод Ейлера має перший порядок апроксимації. Тут враховувалась обмеженість $y''(x)$.

2. ***Симетрична схема.*** Диференціальне рівняння (1) заміняємо різницевим рівнянням

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{1}{2}\left[f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; y_{i+1})\right] = 0, \quad i = 0,1,2,3,..., \quad y(0) = y_0. \tag{5}$$

Цей метод дещо складний у реалізації ніж метод Ейлера, так як нове значення y_{i+1} визначається за знайденим раніше y_i шляхом розв'язування рівняння

$$y_{i+1} - 0{,}5 \cdot h \cdot f(x_{i+1}; y_{i+1}) = F_i, \tag{6}$$

де $F_i = y_i + 0{,}5 \cdot h \cdot f(x_i; y_i)$. За цією причиною метод називається неявним. Переваги методу (5) в порівняння з методом (2) в тому що він має більш високий порядок точності.

Методи Рунге-Кутта відрізняються від наведених вище різницевих методів тим, що в них можливе обчислення правих частин рівняння (1) не тільки у точках сітки, але й у деяких проміжних точках.

3. ***Метод Рунге-Кутта.*** Цей метод дозволяє будувати схеми різного порядку точності. Схеми Рунге-Кутта дуже зручні як для проведення розрахунків на ЕОМ так і для «ручних» розрахунків. Розглянемо метод Рунге-Кутта другого порядку точності.

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{du}{dx} = f(x;u(x)), \quad u(0) = u_0, \quad x \ge 0. \tag{7}$$

Розкладаючи розв'язок $u(x)$ в ряд Тейлора на інтервалі рівномірної сітки $x_i \le x \le x_{i+1}$ і позначаючи $u(x_i) = u_i$, отримаємо

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' + \dots \tag{8}$$

Для забезпечення другого порядку точності обмежимось у (8) першими трьома членами розкладу. Щоб обминути диференціювання $f(x,u)$, замінимо другу похідну різницею:

$$u'' = \frac{d}{dx} f(x,u) = \frac{f(x,u) - f(x,u)}{\Delta x}, \tag{9}$$

відповідно вибираючи значення $x, u, \Delta x$. Після такої заміни другий член у (8) можна формально об'єднати з третім, отримавши

$$y_{i+1} = y_i + h\{\beta\, f(x_i, y_i) + \alpha\, f(x_i + \gamma h,\, y_i + \delta h)\} \tag{10}$$

(оскільки ця схема для розрахунку наближеного розв'язку, то використовуємо позначення y_i замість u_i. Тут $\alpha, \beta, \gamma, \delta -$ параметри, значення яких треба визначити. Для цього розглянемо праву частину (10) як фінкцію від h і розкладемо її за степенями кроку

$$y_{i+1} = y_i + h\,(\alpha + \beta)\, f(x_i, y_i) + \alpha\, h^2 (\gamma\, f_x + \delta\, f_u)_i + \dots$$

Виберемо параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ так, щоб цей розклад був схожий на (8). Очевидно, що це буде, якщо взяти

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\,\gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha\,\delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i)\,.$$

Для визначення чотирьох параметрів маємо лише три рівняння, так що один параметр залишається вільним. Виразимо через α інші параметри і підставимо їх у (10), отримаємо однопараметричну сім'ю двочленних схем Рунге-Кутта

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(1-\alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f_i\right)\right], \quad 0 < \alpha \le 1, \quad f_i = f(x_i, y_i). \tag{11}$$

Для визначення похибки схеми (11) доводиться таке твердження. Якщо $f(x,u)$ неперервна і обмежена разом зі своїми другими похідними, то розв'язок, отриманий за схемою (11) рівномірно збіжний до точного розв'язку з похибкою $O(\max h^2)$, тобто двочленна схема Рунге-Кутта має другий порядок точності.

Якщо в (11) взяти $\alpha = 1$, то отримаємо схему особливо простого вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h\,f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}h\,f_i\right). \tag{12}$$

Якщо в (11) взяти $\alpha = 0{,}5$, то маємо схему

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf_i)\big). \tag{13}$$

Методом Рунге-Кутта можна будувати схеми різного порядку точності. Найбільш вживані схеми четвертого порядку точності, які утворюють сім'ю чотиричленних схем. Наведемо, без виведення, ту із них, яка записана у більшості стандартних комп'ютерних програм:

$$\begin{gathered} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f\left(x_i + h,\ y_i + h\,k_3\right) \end{gathered} \tag{14}$$

(біля величин k_m і кроці h треба ставити індекс сітки i, але для простоти запису тут його опускаємо).

Схеми Рунге-Кутта мають ряд переваг над іншими методами, а саме:

а) всі вони (крім першого порядку точності) достатньо точні;

б) вони є явними, тобто значення y_{i+1} знаходяться із попередніх значень, за певну кількість дій;

в) всі схеми допускають розрахунок із змінним кроком; значить, неважко зменшити крок, там де функція швидко змінюється, і збільшити його у протилежному випадку;

г) для початку розрахунку достатньо задати сітку x_i і значення y_0, а наступні обчислення проводяться за одними і тими ж формулами.

Всі ці властивості схем досить цінні для складання програм.

Приклад. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші
$y' = 1 + xy, \quad y(0) = 0$ на відрізку $\left[0,2\right]$, беручи крок розбиття $h = 0,2$, використовуючи метод Рунне-Кутта другого порядку точності.

Розв'язання. Візьмемо формулу (13) і запишемо її у вигляді зручному для програмування

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] / 2.$$

У нашому випадку $x_0 = 0, \quad b = 2, \quad h = 0,2, \quad y_0 = 0, \quad f(x, y) = 1 + xy$.

Вхідні параметри задачі: межі відрізка $x\varnothing, b$, крок розбиття h, значення функції в точці $x\varnothing$ позначимо $y\varnothing$.

Пропонується програма на мові PASCAL:

```
Program RK;
function f(x, y : real) : real;
begin
 f := 1 + x * y;
end;
var x∅, b, h, y∅, x, y, x1, z : real;   i : integer;   n :longint;
begin
writeln ('input x∅, b, h, y∅');
readln (x∅, b, h, y∅);
n:= round ((b – x∅) / h);
y:=  y∅ ;
for i := 0 to n – 1 do
begin
 x := x∅ + i * h;
 x1 := x + h;
 z := y + h * f(x, y);
 y := y + h*(f(x, y) + f(x1, z))/2;
writeln ('x1 =', x1,  ' y =', y);
end;
end.
```

Ввід даних – Ctri – F9 (Run) проводимо послідовно в порядку x_0, b, h, y_0 кожне окремо, беручи конкретні значення, використовуючи переведення стрічки.

Отримали результат:

$x1$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y	0,204	0,425	0,681	0,999	1,415	1,984	2,794	3,990	5,812	8,679

Якими із формул Рунне-Кутта (11) чи (14) краще користуватися? Якщо права частина диференціального рівняння неперервна і обмежена разом зі своїми похідними до четвертого порядку включно, то добрі результати дає схема четвертого порядку (14). Якщо ж права частина диференціального рівняння не має вказаних похідних, то користуються схемою (11).

§ 8. Чисельні методи розв'язування ДР в частинних похідних

До рівнянь в частинних похідних приводять задачі газодинаміки, теплопровідності, термопружності, електромагнітних хвиль, квантової механіки та багатьох інших. Такі задачі для нелінійних рівнянь з коефіцієнтами досить загального виду, або навіть лінійних задач, але в областях складної форми, рідко вдається розв'язати класичними методами. Основним способом розв'язування таких задач є чисельні методи, зокрема різницеві методи завдяки їх універсальності.

Для застосування методу скінченних різниць в області зміни змінних $G(\vec{x}, t)$ вводять деяку сітку. Всі похідні, які входять в рівняння і краєві умови, замінюють різницями значень функції $u(\vec{x}, t)$ у вузлах сітки (*проводять дискретизацію*: області; рівняння; початкових та граничних умов). Отримані при цьому алгебраїчні рівняння називають схемою скінченних різниць. Розв'язуючи отриману алгебраїчну систему, знайдемо наближений (різницевий) розв'язок у вузлах сітки.

Для дискретизації похідних використовують ряд Тейлора, наприклад, похідну u_t та другу частинну похідну за змінною x, u_{xx} (крок сітки вздовж осі T вибрано τ і маємо точки $t_m = m\tau$, $(m = \overline{0, M})$, вздовж осі $X - h$ і маємо точки $x_n = nh, (n = \overline{0, N})$, рис. 129) визначають

$u_t = (u_n^{m+1} - u_n^m)/\tau + O(\tau)$; $u_{xx} = (u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1})/h^2 + O(h^2)$.

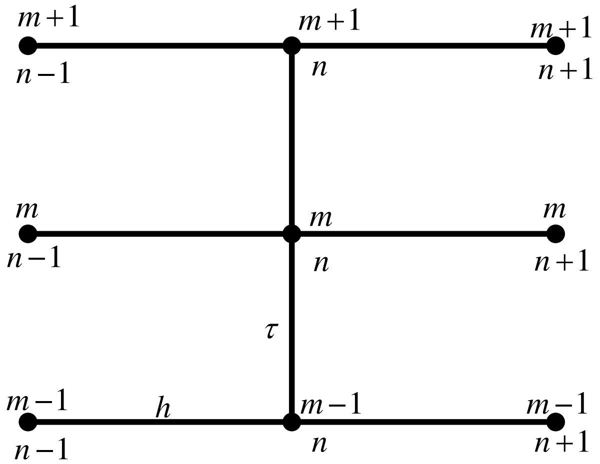


Рис. 129. Центральний вузол сітки (n;m) та сусідні вузли

Приклад **1**. Задача одновимірної лінійної теплопровідності на обмеженому відрізку

$$u_t = k\, u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \le T\,, \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = g_1(t), \quad u(a,t) = g_2(t)\,, \tag{2}$$

заміняється (апроксимується) різницевою схемою

$$\frac{1}{\tau}(y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{k}{h^2}(y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}), \quad 1 \le n \le N-1\,. \tag{3}$$

Кількість рівнянь у (3) менша ніж кількість невідомих $y_n^{m+1}, \quad 0 \le n \le N$, тому решта рівнянь беруть із початкових і граничних умов

$$y_n^0 = f(x_n), \quad 0 \le n \le N, \quad y_0^{m+1} = g_1(t_{m+1}), \quad y_N^{m+1} = g_2(t_{m+1})\,. \tag{4}$$

Конфігурацію вузлів, яку використовують для різницевої схеми, називають *шаблоном*. Для одної і тої ж задачі можна скласти багато різницевих схем, наприклад, для попередньої (1-2) можна вибрати інший шаблон і отримати іншу схему:

$$\frac{1}{\tau}(y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{k}{h^2}(y_{n+1}^{m} - 2y_n^{m} + y_{n-1}^{m}), \quad 1 \le n \le N-1\,, \tag{5}$$

а початкові і граничні умови для цієї схеми можна записати у формі (4).

Схема (5) в кожному рівнянні містить тільки одно значення функції на наступному шарі; це значення неважко явно виразити через відомі значення функції на даному шарі. Такі схеми називаються *явними*.

Схема (3) містить у кожному рівнянні декілька невідомих значень функції на новому шарі, такі схеми називаються *неявними*. В цьому випадку систему (3) переписують з врахуванням кураєвої умови (4) в такій формі:

$$y_{n-1}^{m+1} - \left(2 + \frac{h^2}{k\tau}\right) y_n^{m+1} + y_{n+1}^{m+1} = \frac{h^2}{k\tau} y_n^m, \quad 1 \le n \le N-1,$$

$$y_0^{m+1} = g_1(t_{m+1}), \quad y_N^{m+1} = g_2(t_{m+1}). \tag{6}$$

На кожному шару схема (6) є системою лінійних рівнянь для визначення y_n^{m+1}; праві частини цих рівнянь відомі, оскільки містять значення розв'язків з попереднього шару. Матриця лінійної системи тридіагональна і розвязок можна отримати алгебраїчною прогонкою.

***Приклад* 2.** Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуасона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{7}$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D. \tag{8}$$

Нехай D – прямокутна область розміром $]0, L[\times]0, P[$, ∂D – край цієї області. Задача (7-8) описує прогин прямокутної пластини навантаженої зусиллям $f(x, y)$. Граничні умови визначені функцією $g(x, y)$, задають поведінку країв пластини; якщо, наприклад $g(x, y) \equiv 0$, то краї пластини защемлені(не рухаються).

Розв'язання. Спочатку проводимо *дескретизацію* області D, диференціального рівняння (7) та граничних умов (8).

На площині XOY на область D накладаємо прямокутну сітку (для простоти візьмемо за область D (рис.130.) невеликий прямокутник на який накладено сітку 3×3). Вздовж осі абсцис крок сітки h, вздовж осі ординат – крок k.

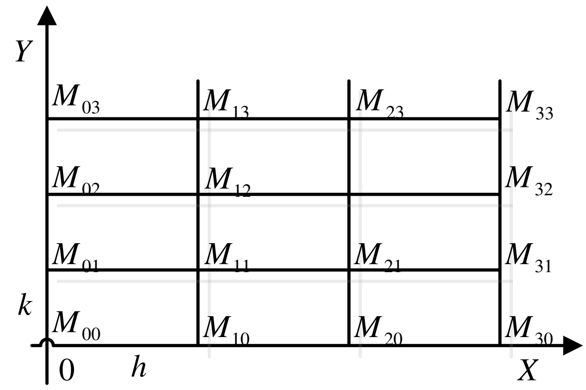


Рис. 130. Сітка на прямокутній області

В точках $M_{ij} = (ih; jk), \quad i, j = \overline{0,3}$ (у вузлах сітки) позначимо значення

$u_{ij} = u(ih, jk), \quad f_{ij} = f(ih, jk), \quad (u_x)_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x}(ih, jk), \quad (u_{xx})_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih, jk),$

$(u_y)_{ij} = \frac{\partial u}{\partial y}(ih, jk), \quad (u_{yy})_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(ih, jk).$

Враховуючи ці позначення, запишемо розклад у ряд Тейлора

$$u_{i-1,j} = u_{ij} - h(u_x)_{ij} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{ij} - \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_{ij} + ...,$$

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + h(u_x)_{ij} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{ij} + \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_{ij} + ...$$

Додаючи ці розклади, отримаємо;

$$(u_{xx})_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + O(h^2).$$

Аналогічно для змінної y

$$(u_{yy})_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{k^2} + O(k^2).$$

Тоді

$$\Delta u_{ij} = (u_{xx})_{ij} + (u_{yy})_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{k^2} + O(h^2 + k^2)$$

Якщо вибрати однакові кроки розбиття $(k = h)$, тоді

$$\Delta u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}}{h^2} + O(h^2).$$

Дискретизуємо граничні умови

$u_{ij} = g(ih, jk), \quad (i = 0, i = 3;\ j = \overline{0,3})$ та $(i = \overline{0,3};\ j = 0, j = 3)$.

У внутрішніх точках області D рівняння (7) замінюється системою

в точці M_{11}: $\dfrac{u_{01} - 2u_{11} + u_{21}}{h^2} + \dfrac{u_{10} - 2u_{11} + u_{12}}{k^2} = f_{11}$,

в точці M_{12}: $\dfrac{u_{02} - 2u_{12} + u_{22}}{h^2} + \dfrac{u_{11} - 2u_{12} + u_{13}}{k^2} = f_{12}$,

в точці M_{21}: $\dfrac{u_{11} - 2u_{21} + u_{31}}{h^2} + \dfrac{u_{20} - 2u_{21} + u_{22}}{k^2} = f_{21}$,

в точці M_{22}: $\dfrac{u_{12} - 2u_{22} + u_{32}}{h^2} + \dfrac{u_{21} - 2u_{22} + u_{23}}{k^2} = f_{22}$.

Врахувавши дискретизовані граничні умови (8), ($u_{01} = g_{01}$, і т.д.) у попередній системі, отримаємо дискретний аналог задачі (7), (8), яка виражається у вигляді системи лінійних рівнянь, де невідомими виступають змінні $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$:

$$\begin{cases} -2(h^2 + k^2)u_{11} + h^2 u_{12} + k^2 u_{21} = h^2 k^2 f_{11} - h^2 g_{10} - k^2 g_{01}, \\ h^2 u_{11} - 2(h^2 + k^2)u_{12} + k^2 u_{22} = h^2 k^2 f_{12} - h^2 g_{13} - k^2 g_{02}, \\ h^2 u_{11} - 2(h^2 + k^2)u_{21} + k^2 u_{22} = h^2 k^2 f_{21} - h^2 g_{20} - k^2 g_{31}, \\ h^2 u_{21} + k^2 u_{12} - 2(h^2 + k^2)u_{22} = h^2 k^2 f_{22} - h^2 g_{23} - k^2 g_{32}. \end{cases} \tag{9}$$

Якщо в системі (9) взяти однаковий крок $(k = h)$, то вона значно спрощується

$$\begin{cases} -4u_{11} + u_{12} + u_{21} = h^2 f_{11} - g_{10} - g_{01}, \\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = h^2 f_{12} - g_{13} - g_{02}, \\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = h^2 f_{21} - g_{20} - g_{31}, \\ u_{12} + u_{21} - 4u_2 = h^2 f_{22} - g_{23} - g_{32}. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язок системи (9) чи (10) є наближеними значеннями розв'язку краєвої задачі (7), (8) у вузлах сітки.

Зауваження. Якщо кількість вузлів розбиття області D досить велика, то кількість невідомих і рівнянь системи велика. Таку систему зручно розв'язувати за допомогою комп'ютерних програм.

Для прикладу, наведемо на мові PASCAL програму розв'язування систем рівнянь на основі методу Гаусса

{у фігурних дужках – коментар (не набирається)}

Program Gauss;

const $n = 3$; { $n-$ кількість невідомих, задається наперед }

var i, j, k : integer; s, d : real; a : array[$1..n, 1..n+1$] of real; array[$1..n$] of real;

begin writeln ('ввести коефіцієнти розширеної матриці по рядках:');

for $i := 1$ to n do begin for $j := 1$ to n do read($a[i, j]$); readln($a[i, n+1]$) end; {триангуляція матриці}

for $k := 1$ to $n-1$ do

for $i := k+1$ to n do

begin

for $j := k+1$ to $n+1$ do $a[i, j] := a[i, j] - a[i, k] * a[k, j] / a[k, k]$;

for $j := 1$ to k do $a[i, j] := \varnothing$;

end;

{обчислення визначника}

$d := 1$; for $k := 1$ to n do $d := d * a[k, k]$; writeln ('визначник det a=', d);

{знаходження розвязкуЇ

$x[n] := a[n, n+1] / a[n, n]$;

for $i := n-1$ downto 1 do

begin $s := \varnothing$; for $j := i+1$ to n do

$s := s + a[i, j] * x[j]$; $x[i] := (a[i, n+1] - s) / a[i, j]$ end;

writeln ('розв'язок системи:');

for $i := 1$ to n do writeln(' $x[', i, '] = ', x[i]$);

end.

Вправи

***Завдання* 1.** Знайти вказані похибки

1. Столярі для визначення довжини кола іноді поступають так: на прямій відкладають три діаметри і ще довжину, яка рівна 0,15 діаметра. Знайти відносну похибку.

2. Довжина стальної заготовки при температурі 0^o дорівнює $200\,мм$, при температурі 20^o – $200,044\,мм$. Знайти абсолютну і відносну похибки довжини.

3. Електроплита розрахована на напругу $220 \pm 10\,в$. Знайти опір спіралі електроплитки, якщо відомо що через неї тече струм $5 \pm 0,1\,а$.

4. Питомий електричний опір ρ металевого круглого дроту довжиною $l\,м$ з поперечним перерізом $d\,мм$ і опором $R\,ом$ визначається за формулою $\rho = \frac{\pi d^2 R}{4l}$. Знайти ρ, якщо $l = 12,50 \pm 0,01\,м$, $d = 2,00 \pm 0,01\,мм$, $R = 0,068 \pm 0,0005\,ом$, $\pi = 3,141 \pm 0,0001$. Визначити відносну похибку ρ.

***Завдання* 2.**

1. Функція задана таблицею

i	0	1	2
x_i	3	5	8
y_i	10	–6	15

Побудувати за цими даними інтерполяційний многочлен Лагранжа. Обчислити його значення в точці $x = 4$ та оцінити абсолютну похибку, якщо третя похідна заданої функції відома $f'''(x) = 2x - x^2$.

2. Функція задана таблицею

i	0	1	2
x_i	–6	-1	2
y_i	0,12	0,47	0,44

Побудувати за цими даними інтерполяційний многочлен Лагранжа. Обчислити його значення в точці $x_1 = 0,5$; $x_2 = 2$. Дати оцінку похибки, якщо четверта похідна заданої функції відома $f'''(x) = 2x - x^2$.

Завдання 3.

1. Чисельними методами Ейлера та Рунне-Кутта знайти розв’язок диференціальних рівнянь і порівняти результати

1) $y' \cos y + \sin y = x + 1, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0;1].$

2) $y' - y = 2^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0;1].$

3) $xy' + y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0;1].$

4) $y' = -y^2 + 1/x, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1;2].$

5) $y' = e^x - \sin y, \quad y(0) = 2, \quad x \in [0;1].$

2. Скласти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ в квадраті з вершинами $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$, $D(1;0)$ з кроком $h = 0,25$.

1) $u_{AB} = 20y, \quad u_{BC} = 20(1 - x^2), \quad u_{CD} = 0, \quad u_{AD} = 0.$

2) $u_{AB} = 20y, \quad u_{BC} = 20\cos\dfrac{\pi x}{2}, \quad u_{CD} = 20\cos\dfrac{\pi y}{2}, \quad u_{AD} = 20x^2.$

3) $u_{AB} = 30\sin \pi y, \quad u_{BC} = 20x, \quad u_{CD} = 20y, \quad u_{AD} = 30x(1-x).$

4) $u_{AB} = 10, \quad u_{BC} = 10, \quad u_{CD} = 10y^2, \quad u_{AD} = 10.$

5) $u_{AB} = 25y^2, \quad u_{BC} = 25, \quad u_{CD} = 25y, \quad u_{AD} = 25x(1-x).$

Відповіді

***До завдання* 1**.

1. $0,32\%$; 2. $\Delta l = 0,044\,мм$; $\delta = 0,022\%$; 3. $41,2ом \le R \le 46,9ом$;

4. $\rho = \dfrac{3,141 \cdot 0,068}{12,5} = 0,017$, $\delta_\rho = \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_R + \delta_l = 2,12\%$.

***До завдання* 2.**

1. $L(x) = 3x^2 - 32x + 79; \quad L(4) = -1; \quad \left| f(x) - L(x) \right| \le \dfrac{2}{3}$;

2. $L(x) = 5x^3 - 8x^2 + 0,3x - 1; \quad L(0,5) = -2,125; \quad L(2) = 7,6$.

Додатки

Додаток А

Синуси (косинуси), пеша четверть

sin*α*	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
											0,0000	**90°**			
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	**89°**	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	**88°**	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	**87°**	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	**86°**	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	**85°**	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	**84°**	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	**83°**	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	**82°**	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	**81°**	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	**80°**	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	**79°**	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	**78°**	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2108	2215	2233	2250	**77°**	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	**76°**	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2288	**75°**	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	**74°**	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	**73°**	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	**72°**	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	**71°**	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3352	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	**70°**	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	**69°**	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	**68°**	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	**67°**	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	**66°**	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	**65°**	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	**64°**	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	**63°**	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	**62°**	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	**61°**	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	**60°**	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	**59°**	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	**58°**	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	**57°**	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	**56°**	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	**55°**	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	**54°**	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	**53°**	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	**52°**	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	**51°**	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0,6428	**50°**	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	**49°**	3	6	9
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	**48°**	3	6	9
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	**47°**	3	6	9
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	**46°**	3	6	9
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	**45°**	3	6	9
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**cos*α***	**1'**	**2'**	**3'**

sin*a*	**0'**	**6'**	**12'**	**18'**	**24'**	**30'**	**36'**	**42'**	**48'**	**54'**	**60'**		**1'**	**2'**	**3'**
45°	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	**44°**	2	4	6
46°	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	**43°**	2	4	6
47°	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	**42°**	2	4	6
48°	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7549	**41°**	2	4	6
49°	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	0,7660	**40°**	2	4	6
50°	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	**39°**	2	4	6
51°	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	**38°**	2	4	5
52°	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	**37°**	2	4	5
53°	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	**36°**	2	3	5
54°	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	0,8192	**35°**	2	3	5
55°	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	**34°**	2	3	5
56°	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	**33°**	2	3	5
57°	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	**32°**	2	3	5
58°	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	**31°**	2	3	5
59°	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0,8660	**30°**	1	3	4
60°	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	**29°**	1	3	4
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	**28°**	1	3	4
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	**27°**	1	3	4
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	**26°**	1	3	4
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	0,9063	**25°**	1	3	4
65°	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	**24°**	1	2	4
66°	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	**23°**	1	2	3
67°	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	**22°**	1	2	3
68°	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	**21°**	1	2	3
69°	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0,9397	**20°**	1	2	3
70°	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	**19°**	1	2	3
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	**18°**	1	2	3
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	**17°**	1	2	3
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	**16°**	1	2	2
74°	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	0,9659	**15°**	1	2	2
75°	0,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	**14°**	1	1	2
76°	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	**13°**	1	1	2
77°	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	**12°**	1	1	2
78°	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	**11°**	1	1	2
79°	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0,9848	**10°**	1	1	2
80°	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	**9°**	0	1	1
81°	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	**8°**	0	1	1
82°	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	**7°**	0	1	1
83°	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	**6°**	0	1	1
84°	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0,9962	**5°**	0	1	1
85°	0,9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	**4°**	0	0	1
86°	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	**3°**	0	0	0
87°	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	**2°**	0	0	0
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	**1°**	0	0	0
89°	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1,0000	**0°**	0	0	0
90°	1,0000														
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**cos*a***	**1'**	**2'**	**3'**

Додаток Б

Тангенси (котангенси), перша четверть

tga	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
											0,0000	**90°**			
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	**89°**	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	**88°**	3	6	9
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	**87°**	3	6	9
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	**86°**	3	6	9
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0,0875	**85°**	3	6	9
5°	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	**84°**	3	6	9
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	**83°**	3	6	9
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	**82°**	3	6	9
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	**81°**	3	6	9
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	0,1763	**80°**	3	6	9
10°	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	**79°**	3	6	9
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	**78°**	3	6	9
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	**77°**	3	6	9
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	**76°**	3	6	9
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	0,2679	**75°**	3	6	9
15°	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	**74°**	3	6	9
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	**73°**	3	6	9
17^0	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	**72°**	3	6	10
18^0	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	**71°**	3	6	10
19^0	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0,3640	**70°**	3	7	10
20°	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	**69°**	3	7	10
21°	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	**68°**	3	7	10
22°	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	**67°**	3	7	10
23°	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	**66°**	3	7	10
24°	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	0,4663	**65°**	4	7	11
25°	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	**64°**	4	7	11
26°	4877	4899	4821	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	**63°**	4	7	11
27°	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	**62°**	4	7	11
28°	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	**61°**	4	8	11
29°	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0,5774	**60°**	4	8	12
30°	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	**59°**	4	8	12
31°	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	**58°**	4	8	12
32°	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	**57°**	4	8	12
33°	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	**56°**	4	8	13
34°	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	0,7002	**55°**	4	9	13
35°	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	**54°**	4	9	13
36°	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	**53°**	5	9	14
37°	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	**52°**	5	9	14
38°	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	**51°**	5	9	14
39°	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0,8391	**50°**	5	10	15
40°	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	**49°**	5	10	15
41°	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	**48°**	5	10	16
42°	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	**47°**	6	11	16
43°	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	**46°**	6	11	17
44°	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,0000	**45°**	6	11	17
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**ctg*a***	**1'**	**2'**	**3'**

tga	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
45°	1,0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	**44°**	6	12	18
46°	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	**43°**	6	12	18
47°	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	**42°**	6	13	19
48°	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	**41°**	7	13	20
49°	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1,1918	**40°**	7	14	21
50°	1,1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	**39°**	7	14	22
51°	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	**38°**	8	15	23
52°	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	**37°**	8	16	24
53°	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	**36°**	8	16	25
54°	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1,4281	**35°**	9	17	26
55°	1,4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	**34°**	9	18	27
56°	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	**33°**	10	19	29
57°	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	**32°**	10	20	30
58°	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	**31°**	11	21	32
59°	6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1,7321	**30°**	11	23	34
60°	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797	1,804	**29°**	1	2	4
61°	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873	1,881	**28°**	1	3	4
62°	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954	1,963	**27°**	1	3	4
63°	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041	2,050	**26°**	1	3	4
64°	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135	2,145	**25°**	2	3	5
65°	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236	2,246	**24°**	2	3	5
66°	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,300	2,311	2,322	2,333	2,344	2,356	**23°**	2	4	5
67°	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463	2,475	**22°**	2	4	6
68°	2,475	2,488	2,500	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592	2,605	**21°**	2	4	6
69°	2,605	2,619	2,633	2,646	2,660	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733	2,747	**20°**	2	5	7
70°	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888	2,904	**19°**	3	5	8
71°	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,060	3,078	**18°**	3	6	9
72°	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251	3,271	**17°**	3	6	10
73°	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376						**16°**	3	7	10
							3,398	3,420	3,442	3,465	3,487		4	7	11
74°	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606						**15°**	4	8	12
							3,630	3,655	3,681	3,706	3,732		4	8	13
75°	3,732	3,758	3,785	3,812	3,839	3,867							4	9	13
							3,895	3,932	3,952	3,981	4,011	**14°**	5	10	14
76°	4,011	4,041	4,071	4,102	4,134	4,165	4,198	4,230	4,264	4,297	4,331	**13°**			
77°	4,331	4,366	4,402	4,437	4,474	4,511	4,548	4,586	4,625	4,665	4,705	**12°**			
78°	4,705	4,745	4,787	4,829	4,872	4,915	4,959	5,005	5,050	5,097	5,145	**11°**			
79°	5,145	5,193	5,242	5,292	5,343	5,396	5,449	5,503	5,558	5,614	5,671	**10°**			
80°	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	**9°**			
81°	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	**8°**			
82°	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	**7°**			
83°	8,114	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	**6°**			
84°	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20	11,43	**5°**			
85°	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	**4°**			
86°	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	**3°**			
87°	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	**2°**			
88°	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	**1°**			
89°	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	-------	**0°**			
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**ctg*a***	**1'**	**2'**	**3'**

Додаток В

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0, 054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4349	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4486	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4687	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4759	4762	4767
2,0	0,4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4879	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4045	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	0,4986	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990
3,5	4997	4997	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
4,0	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
5,0	0, 49999997									
> 5	0,50000000.									

Додаток Е

Значення функції Пуассона $P(X=k)\approx\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0987
3	0,0001	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7	0	0	0	0,0001	0,0034	0,0216
8	0	0	0	0	0,0009	0,0081
9	0	0	0	0	0,0002	0,0027
10	0	0	0	0	0	0,0008
11	0	0	0	0	0	0,0002

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0003	0,0011	0,0004
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,1954	0,1755	0,1338	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1395	0,1171	0,0901
8	0,0298	0,0653	0,1032	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0709	0,0926	0,1186	0,1251
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0006	0,0034	0,0126	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729

Бібліографічний список

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.
2. Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: “Наука”, 1964.
3. Бубняк Т.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Львів: ЛНАУ, 2012., 596с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: В 3 ч. – М.: Наука, 1981. – Ч.1 – 3.
5. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1980.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1980.
7. Долгов Н. М. Высшая математика. – К.: Вища шк., 1988.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П. та ін. /Вища математика Зб. задач: Навч. посібник/ – К.: Вид – во А.С.К., 2003.
9. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. – К.: Вища шк., 1990.
10. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике. – М.: Наука, 1986.
11. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1078.,512с.
12. Коваленко И.Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990.
13. Козакова Т.В., Щеглова М.В. Высшая математика: Сб. задач. – М.: Изд-во МГУ, 1971.
14. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.

15. Минорский М.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1975.
16. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2002.
17. Ноздрин И.Н. Прикладные задачи по высшей математике /И.Н. Ноздрин, И.М. Степаненко, Л.К. Костюк / – К.: Вища шк., 1976, 176с.
18. Высшая математика/ П.Ф. Овчинников, Б.М. Лисицын, В.М. Михайленко. – К.: Вища шк., 1989.
19. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2т. – М.: Наука, 1985. – Т. 1 – 2.
20. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1967.
21. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.
22. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.
23. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432с. – ISBN 5-02-013996-3.
24. Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980., 576с.